

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOCIETATIS PHYSICAE HELVETICAE
COMMENTARIA PUBLICA

VOLUMEN XXII

BASILEAE • IN AEDIBUS BIRKHAUSER
MCMIL

Schweizerische Physikalische Gesellschaft
Copyright 1949 by: Société Suisse de Physique
Società Fisica Svizzera

Druck von Emil Birkhäuser & Cie., AG., Basel

Zur Kenntnis des Funkenzählers

von Albrecht Rytz.

(12. XII. 1948.)

Zusammenfassung: Neben Bestrahlung einer Funkenstrecke führt auch anderweitiges Hineinbringen von Ionen zu Funkenauslösung. Untersuchungen des Spannungssturzes beim Funkenübergang zeigten dessen Abhängigkeit von den Schaltelementen auf Zu- und Abflusseite. Die Verhältnisse sind dadurch kompliziert, dass elektrische Schwingungen auftreten. Mit dem Spannungssturz proportional erwies sich die pro Funken transportierte Ladung (Funkenintensität), deren untere Grenze, bei Weglassung jeder zusätzlichen Kapazität, kleiner ist als die Entladungen eines Spitzenzählers. Nebst zufälligen kleineren Intensitätsschwankungen wurde ein Unterschied beobachtet, je nachdem an welcher Elektrode der Hochohmwiderstand angeschlossen war. Dies lässt sich auf das verschiedene Verhalten der + und — Ionen zurückführen, das in der verschiedenen mechanischen Einwirkung auf eine Silberschicht zum Ausdruck kam.

Versuche mit zwei parallel geschalteten Anoden liessen vermuten, dass die bestrahlte Funkenstrecke UV aussendet, das die andere Strecke durch Photoeffekt zum Zünden bringt. Diese Hypothese liess sich experimentell prüfen und verifizieren durch zwei parallel geschaltete Funkenstrecken, zwischen denen eine quer verschiebbliche feine Spaltblende angebracht war. Es konnte nachgewiesen werden, dass das vor der Anode der einen Funkenstrecke ausgesandte UV auf die Kathode der zweiten einwirkt.

Geringe zusätzliche elektrische Felder ändern unerwarteterweise die Funkenfrequenz einer konstant bestrahlten Funkenstrecke erheblich, während das Funkenpotential praktisch dasselbe bleibt. Versuche mit einer ringförmigen Hilfselektrode, wobei die (axialen) Feldänderungen berechenbar waren, zeigten, dass die Verstärkung des Anodenfeldes von einer Frequenzerhöhung gefolgt wird. Aus der Ansicht, dass dabei der Raum vergrössert wird, worin die Elektronengeschwindigkeit zur UV-Anregung ausreicht, ergaben sich genauere Vorstellungen über Form und Grösse des Raums, in dem ionisierende Teilchen Funken auslösen können (Zählvolumen) bei 2 Kugeln, Kugel/Platte und bei Polwechsel. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen ist befriedigend und stützt auch die Erklärung des Auslösemechanismus.

Aus den im letzten Kapitel mitgeteilten Dauerversuchen geht hervor, dass der Funkenzähler zwar bis zu hohen Funkenfrequenzen brauchbar ist, aber seine (längere Zeit konstante) Empfindlichkeit gelegentlich ändert, was vermutlich von Änderungen der photoelektrischen Wirksamkeit der Kathode herrührt.

Einleitung.

Nachdem GREINACHER¹⁰⁻¹⁴⁾ über die Entwicklung des Funkenzählers und die damit aufgeworfenen Fragen berichtet hatte, haben sich STUBER³⁶⁾, LIECHTI²⁴⁾, JEANGUENIN²¹⁾, FREY⁹⁾, mit der weiteren Ausgestaltung, ferner der Wirkungsweise und Anwendung des neuen Zählgerätes befasst. Es hat sich dabei gezeigt, dass sich infolge der Kleinheit des zählempfindlichen Volumens und der grossen UV-Empfindlichkeit besondere Anwendungsmöglichkeiten bieten. Auch ist der Zähler infolge seiner einfachen Anordnung, welche sowohl die Verwendung von Gleich- als auch Wechselspannung erlaubt (GREINACHER¹⁵⁾), für Demonstrationszwecke vorzüglich geeignet. Hingegen ist seine Brauchbarkeit für genaue Messungen an die Erfüllung gewisser Bedingungen geknüpft. Dies hängt damit zusammen, dass zwar die Einrichtung recht einfach, der Entladungsprozess aber im Vergleich zur Spitzenzähler- und Zählrohranordnung wesentlich komplizierter ist. Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Funkenzählers war es daher nötig, näheren Aufschluss über die Funkenauslösung durch ionisierende Teilchen zu erhalten. Dabei war zu erwarten, dass Untersuchungen am Funkenzähler auch allgemein gewisse Einblicke in den Mechanismus der Funkenentladung gewinnen liessen.

Untersuchungen über elektrische Gasentladungen nehmen gewöhnlich ihren Ausgang von der Townsendschen Theorie des Durchschlags³⁷⁾ und deren Ergänzungen, wovon die wichtigsten Punkte kurz genannt seien: ROGOWSKI³¹⁾ (Raumladung), GREINER¹⁶⁾ (lichtelektrische Rückwirkung), SCHADE³³⁾ (Entladungsprodukte). Unter vereinfachenden Voraussetzungen wie homogenes Feld, niedriger Druck, kleine Stromdichte oder unselbständige sowie stabile Entladungen war die Entladungsforschung sehr erfolgreich und führte zur quantitativen Erfassung mehrerer Vorgänge (MEILI²⁶⁾, v. GUGELBERG¹⁷⁾). Andererseits ermöglichten Untersuchungen starker Funken^(2), 19), 29) wichtige Aussagen qualitativer Art, insbesondere die Entdeckung des Kanalaufbaus (siehe z. B. in DOSSE und MIERDEL⁸⁾). Die Entladungen des Funkenzählers nehmen nun gerade eine Mittelstellung ein, indem sie bei relativ hohem Druck und geringer Schlagweite (und Stromstärke) stattfinden. Im Jahre 1934 erklärte GREINACHER¹⁰⁾ die Funkenauslösung, dem damaligen Stande der Theorie entsprechend, durch die Rückwirkung der positiven Ionen an der Kathode. Später bezeichnete allerdings ROGOWSKI³²⁾ die positive Ionisierung als den wunden Punkt der Durchschlagstheorie. Doch stand der Ansatz von GREINACHER weder bei STUBER³⁶⁾ noch bei FREY⁹⁾ zur Diskussion und bildete

auch für diese Arbeit eine Ausgangshypothese. Daneben gewann aber das in den Funken erzeugte UV immer mehr an Bedeutung, und es seien hier einige Arbeiten kurz erwähnt: CHRISTOPH⁵⁾ (Coronaentladung in Luft und H_2 von 15 Tor, nimmt Anregung nahe der Anode an), RAETHER²⁹⁾ ($\lambda = 800 \div 1000 \text{ \AA}$, Absorptionskoeffizient in Luft, 760 Tor: 2 cm^{-1} , Raumionisierung), COSTA⁶⁾ ($\lambda = 800 \div 1000 \text{ \AA}$, in H_2), SCHWIECKER³⁴⁾ (Raumionisierung, Abs. koef. Luft 760 Tor: $1,5 \text{ cm}^{-1}$), BARTHOLOMEYCZYK⁴⁾ (theoretisch, Oberflächenionisierung). Schliesslich mögen hier noch die von WIEDEMANN entdeckten und von M. W. HOFFMANN¹⁸⁾ untersuchten «Entladungsstrahlen» erwähnt werden, die mit Hilfe von Phosphoren nachgewiesen wurden und zweifellos in einer intensiven UV-Strahlung bestanden.

Das Ziel vorliegender Arbeit war, auf experimentellem Weg eine Erklärung des Auslösemechanismus beim Funkenzähler und Unterlagen für seine praktische Anwendung zu erlangen.

1. Versuchsanordnung.

Schaltungen und Apparate.

Hier sei die allgemeine Versuchsanordnung beschrieben, während die für bestimmte Zwecke verwendeten Einrichtungen an den betreffenden Stellen angegeben werden sollen.

Ein Blockschema (Fig. 1) vermittelt einen Überblick über die Anordnung der Registrier- und Speisegeräte und des Funkenkreises.

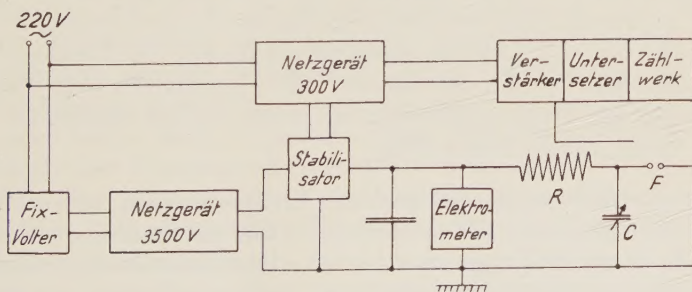


Fig. 1.

Schema der Anordnung.

Die Hochspannung wurde wie in der Arbeit von JEANGUENIN²¹⁾ erzeugt. Jedoch ist eine Spannungsstabilisierungseinrichtung, nach STRONG³⁵⁾, angeschlossen, da die Stabilisierung mittels Fix-Volter für die vorgesehenen Versuche nicht genügte. Dies hängt mit dem

Umstand zusammen, dass die Zählkurve des Funkenzählers im allgemeinen kein «Plateau» hat und sehr steil verläuft.

Die Schaltung des *Stabilisators* ist in Fig. 2 wiedergegeben. Die Pentode *E 446* eignet sich zu diesem Zwecke vorzüglich, da ihre Anode oben am Kolben herausgeführt ist. Es wurden Spannungen bis zu 3800 V angelegt.

Durch Ändern der Batterieabgriffe kann man das Gerät für jede beliebige Spannung auf die grösste Stabilisierungswirkung einstellen. Die negative Vorspannung wirkt grob, die Schirmgitter-

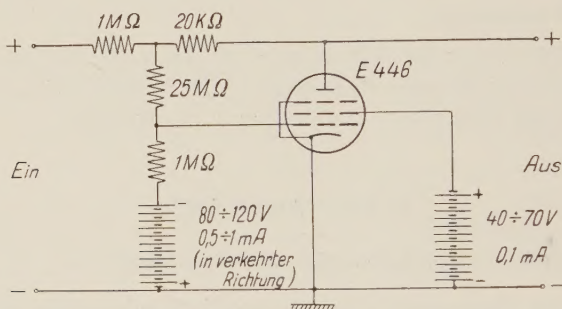


Fig. 2.

Hochspannungsstabilisator.

spannung mittel und das primärseitige Potentiometer am Netzgerät fein regulierend. Frische Leclanché-Batterien sind genügend konstant, um bei $\pm 5\%$ Netzspannungsschwankung die Ausgangsspannung innerhalb ± 5 V zu halten. Vom Einschalten weg sinkt die Spannung am Ausgang während der ersten halben Stunde um etwa 60 V, später jedoch kaum mehr.

Der *Funkenkreis* besteht aus dem Elektrodenpaar, einem Widerstand *R* (Fig. 1) von 10^8 bis 10^{10} Ohm und einem kleinen Kondensator *C*, wobei allerdings oft schon die natürlicherweise vorhandene Kapazität genügt¹³⁾. Wünscht man intensivere Funken, so gibt man einige bis etwa 100 pF zu. Da dies immer noch sehr wenig ist im Vergleich zur Speicherkapazität, kann man den Kondensator ebensogut gegen Erde wie parallel zum Widerstand *R* schalten. Dies hat den Vorteil, dass nur eine Belegung an Hochspannung liegt. Immerhin wurde die Äquivalenz der beiden Schaltungen bezüglich Intensität und Abreißspannung noch nachgeprüft und bestätigt.

Die *Registriervorrichtung* musste folgende Forderungen erfüllen:

1. Auszählung aller vorkommenden Funkenfrequenzen.
2. Unabhängigkeit von Funkenkreis und Registriereinrichtung.
3. Ansprechen auf kleinste Funkenintensitäten.
4. Unabhängigkeit davon, welcher Punkt des Funkenkreises geerdet ist, und an welcher Elektrode *R* angeschlossen ist.

2. und 3. liessen sich durch genügende Verstärkung erreichen. Dann konnte nämlich das Registriergerät äusserst lose angekoppelt werden. Es genügte, das 3 cm lange freie Ende der sonst abgeschirmten Leitung zum Verstärkereingang in 1–2 cm Entfernung von derjenigen Elektrodenzuleitung, die vom Hochohmwiderstand kam, anzubringen, um mit dieser «Antenne» genügend Energie aufzufangen, damit die Zählung einwandfrei erfolgen konnte. Dass es sich nicht einfach um eine kapazitive Übertragung handelte, war daran zu erkennen, dass starke Funken meist eine grössere Verstärkerempfindlichkeit verlangten als schwache. Diese Art der Ankopplung erwies sich auch darum als besonders zweckmässig, weil so der Funkenkreis vom Registriergerät völlig unabhängig war (vgl. die 2. Forderung oben), während das beim ehemals verwendeten *R-C*-Glied nicht der Fall sein konnte.

Die Erfüllung der Forderung 1. wurde durch einen *Untersetzer* erreicht, der, da er in gewissem Sinne auch Gleichrichter ist, auch 4. erfüllt. Er enthielt sechs Stufen, die alle einander gleich waren mit Ausnahme des Eingangs der ersten zwei Stufen. Als Vorlage wurde die von BALDINGER³⁾ angegebene Schaltung benützt, die verwendete Röhrentype war *EF 6*. Ein Stufenschalter gestattete drei Möglichkeiten der Anpassung des Eingangs an Dauer und Form der Stösse. Die kürzeste der drei Trennzeiten betrug $1/6300$ s. Da sie für alle Anwendungen ausreichte, wurde von einer weiteren Verkürzung, die zwar leicht möglich gewesen wäre, abgesehen. Damit konnte allerdings das Untersetzungsverhältnis 1:64 nicht voll ausgenützt werden, aber es verminderte die Abnützung und den oft lästigen Lärm des Zählwerkes. Zur Ermittlung der Trennzeit diente ein Kathodenstrahloszillograph. Die horizontalen Platten erhielten die Spannung des eingebauten Zeitablenkgerätes, die ebenfalls dem Untersetzereingang zugeführt wurde. Die 1:2 untersetzte Frequenz wurde an das andere Plattenpaar gelegt. Solange der Untersetzer richtig arbeitete, entstand eine Art Lissajoussche Figur auf dem Schirm, die beim Überschreiten des Auflösungsvermögens verschwand. Diese Grenzfrequenz wurde mit der eines geeichten Tonfrequenzgenerators verglichen. Das Reziproke davon darf als unge-

fährer Wert der Trennzeit betrachtet werden. Die Impulse jeder beliebigen Untersetzterstufe konnten über eine passende Endverstärkerstufe einen Telephongesprächszähler (Hasler) in Betrieb setzen, der an Zuverlässigkeit nichts zu wünschen übrig liess. Die Interpolation zwischen den Einheiten des Zählwerks erfolgte in üblicher Weise mit Hilfe von kleinen Glimmlämpchen. Ferner wurde ein Schalter angebracht, der erlaubte, zu Beginn einer Messung alle Stufen gleich zu stellen, nämlich so, dass alle Lämpchen brannten.

Die Funkenstrecken.

Die Anordnung der Funkenstrecke war je nach der Art der Versuche verschieden.

Als Material wurde meist Pt verwendet, gelegentlich aber auch Messing, Ni und Stahl und in besonderen Fällen Ag-Spiegel auf Glas (Beobachtung der Einschlagspuren, Kap. 3) und Bogenkohle (reflexionsarme Kathode zur Lokalisierung der UV-Bestrahlung, Kap. 2).

Am geeignetsten erwiesen sich Kugeln oder Halbkugeln von 1–1,5 mm \varnothing . Als Kathode diente oft auch eine Platte. Scharfe Ecken waren zu vermeiden, und Kugeln unterhalb etwa 0,75 mm \varnothing zeigten unbefriedigendes Verhalten. Indessen wurden für spezielle Zwecke (Bestimmung von V_α , Kap. 4) stumpfe Spitzen und (Beobachtung des Auslöseortes, Kap. 4) planparallele Platten verwendet.

Die Versuche beschränkten sich auf den Funkendurchgang in Luft. Die Verhältnisse erwiesen sich am günstigsten bei Atmosphärendruck. Jedoch wurde bei eingeschlossenen Funkenstrecken mit festem Elektrodenabstand gelegentlich mit Hilfe passender Druckänderung auf das gewünschte Funkenpotential eingestellt. Als Funkenpotential (V_0) soll fortan das niedrigste Potential (der nicht geerdeten Elektrode) bezeichnet werden, bei dem noch Funken durch β -Strahlen oder UV ausgelöst werden können. Um stabile Verhältnisse zu erhalten, wurde ferner die Luft in eingeschlossenen Funkenstrecken getrocknet. Dadurch wird bei Verwendung von Pt-Elektroden, wie FREY⁹⁾ gezeigt hat, die Nachwirkung nicht erheblich gesteigert. Trockenmittel: P_2O_5 oder «Blaugel».

Bei der Anordnung der Funkenelektroden musste auf genügende Isolation ($> 2 \cdot 10^{12}$ Ohm) und, wegen der kleinen Abstände, auf hinreichende mechanische Stabilität (Beachtung der elektrostatischen Anziehung) geachtet werden. Auch bei Einschmelzen in Duran- oder Jenaerglas war die Isolation erst genügend, wenn die Einschmelzstellen aussen mit (weissem) Siegelack umgeben waren.

Die folgende Tabelle bringt eine Zusammenstellung der Daten der verwendeten eingeschlossenen Funkenstrecken:

Bezeichnung	V ₀ (Volt) bei ca. 715 Tor	Trocken- mittel	Spezieller Verwendungs- zweck	Bemerkungen	Kap.
<i>F</i> 1 <i>F</i> 2	2650 1830	P ₂ O ₅	Funkenintensität, Spannungsverlauf, versch. Drucke	„Kugelgefäß“ (Frey)	3
<i>F</i> 3 <i>F</i> 4	800 570				
<i>F</i> 5 <i>F</i> 6	2400 2180	Blaugel	möglichst schwache Funken	in einem Gefäß vereinigt	3
		Blaugel	Dauerversuche, höchste Frequenz, Konstanz	wurden stets mit gleicher Polung verwendet	6

Alle Elektroden sind Pt-Kugeln, eingeschmolzen in Duran- oder Jenaerglas.

Pt-Kugeln, die man aus einem Draht im Sauerstoffgebläse schmilzt, zeigen oft kleine Buckel oder Spitzen, die dann meistens die Zählfähigkeit vermindern und daher abgetragen werden müssen. Es ist zweckmässig, Pt vor Inbetriebnahme zu glühen, sei es mit Hilfe einer Gebläseflamme oder mittels Induktorentladungen. Dadurch lassen sich auch gelegentlich plötzlich eintretende Störungen leicht beseitigen. Die nötige Alterung durch Funken kann jedoch durch nichts ganz ersetzt werden.

2. Arten und Ort der Funkenauslösung.

Da der Funkenzähler wie auch die andern Entladungszähler auf sämtliche ionisierenden Strahlen sowie auf durch Belichtung ausgelöste Elektronen anspricht, war anzunehmen, dass er auch durch sonstige in die Entladungsbahn hineingebrachte Ionen zum Zünden gebracht werden kann. Um dies zu bestätigen, wurden Versuche mit Glühionen ausgeführt. Es ergaben sich indessen keine eindeutigen Resultate, da es schwer hält, einen Glühdraht genügend nahe an die Funkenstrecke heranzubringen, ohne die Versuchsbedingungen zu ändern. Jedoch führten Versuche mit Ionen einer Spitzenentladung und solchen, die von α -Strahlen erzeugt waren, zu einem positiven Ergebnis.

Eine spitze Nähnadel ist von der Seite her in ein weites Glasrohr eingekittet. Dieses Rohr führt einen trockenen Luftstrom durch eine Düse und ein Loch im Mantel eines die Funkenstrecke umgebenden

Metallzylinders. Der Luftstrom durchsetzt gerade das Zählvolumen, d. h. den Raum, ausserhalb dessen Teilchen keine Funken auslösen können. Die Düse ist so gebogen, dass kein direktes UV austreten kann. Eine Influenzmaschine lädt die Nadel auf etwa 10 KV, und an der Funkenstrecke liegt eine das Funkenpotential etwas übersteigende Betriebsspannung. Obschon der Nulleffekt, d. h. die Störung durch Verunreinigungen, beträchtlich ist, kann man in der Tat mehr Funken beobachten, wenn die Nadel geladen ist, als wenn man sie erdet, und zwar unabhängig vom Vorzeichen.

Bei diesen Versuchen hätte man noch den Einwand machen können, dass sich möglicherweise die Glasdüse durch den Ionenstrom auflädt und dann unter Emission von UV gegen den Metallzylinder entlädt, und so die Funken auslösen könnte.

Diesem Einwand begegnen indessen die Versuche mit den durch α -Teilchen erzeugten Ionen. Statt der Nähnadel hat das Glasrohr einen seitlichen Ansatz, in dem sich ein Po-Präparat befindet (zirka 500 est. E.). Dieses liegt auf einem eisernen Schlitten und kann mit einem Magneten von aussen so verschoben werden, dass einmal vor der Düse möglichst viele Ionen gebildet werden, das andere Mal gar keine. Die α -Teilchen selber können das Glasgefäss nicht verlassen, insbesondere können sie die Funkenstrecke nicht erreichen. Bei hinreichender Betriebsspannung genügt schon ein ganz schwacher Luftstrom, um reichlich viele Funken auszulösen, jedoch nur, falls das Po die richtige Lage hat. Im reinen α -Zählbereich (zwischen V_α und V_0 , siehe Kap. 4) sind auf diese Weise wahrscheinlich, unterhalb dieses Bereiches sicher, keine Funken zu erhalten.

Die späteren Versuche machen es wahrscheinlich, dass die Funkenauslösung durch Elektronen bewirkt wird.

Neben allen diesen sichtlich durch Ionen verursachten Funkenentladungen gibt es aber auch solche, deren Entstehung noch ungeklärt ist. So kann die Funkenverzögerung aufgehoben werden durch Dampfspuren z. B. von Kampher (GREINACHER) wie auch durch vorangegangene Funken, so dass die Erscheinung der Nachwirkung entsteht. Diese ist an der Störung der normalen Funkenstatistik zu erkennen, wenn man Funken durch Strahlen auslöst. Nach FREY⁹⁾ ist die Nachwirkung in trockenen Gasen, ganz besonders in N_2 und H_2 , gross. Da Wasserstoff keine metastabilen Zustände kennt, ist eine Erklärung durch metastabile Atome nicht wahrscheinlich. Zudem scheint es mehr als eine Art von Nachwirkung zu geben. Bei der Anordnung von FREY lag die Ursache offenbar im Gas, in anderen Fällen jedoch in der Oberfläche der Elektroden. Manchmal wurde nämlich durch Vergrösserung der Zeit-

konstanten des Funkenkreises die Nachwirkung verhindert, manchmal aber gerade durch Verkleinerung bei Wegnahme des Kondensators.

Eine befriedigende Erklärung für die Nachwirkung konnte jedoch bisher nicht gefunden werden. In der Literatur ist gelegentlich von «Feldelektronenemission dünner Isolatorschichten» die Rede (PAETOW²⁸), ROGGEN und SCHERRER³⁰). Welches aber hier der Mechanismus der Funkenauslösung ist, entzieht sich noch unserer Kenntnis.

Bei allen Arten der Funkenauslösung ist der Entladungsvorgang (Funkenintensität, Spannungsverlauf usw.) praktisch derselbe. Dies führte seinerzeit schon GREINACHER¹⁰) zur Vermutung, dass der Funkenmechanismus im wesentlichen stets der gleiche sei.

Über den Ort der Funkenauslösung bei α -Strahlen geben die Versuche von Kap. 4 Auskunft. Darüber und auch über den Fall der UV-Bestrahlung hat bereits STUBER³⁶) berichtet. Die dortigen Angaben müssen allerdings um einen kleinen Betrag korrigiert werden, da bei der Berechnung der Breite des Zählvolumens bei α -Bestrahlung die Breite des Strahlenbündels nicht addiert, sondern subtrahiert werden sollte. Ferner ist zu beachten, dass bei Ausmessung des Zählvolumens für UV-Bestrahlung, infolge der Reflexionen an den Elektroden leicht ein zu grosser Wert für die Breite vorgetäuscht wird. Immerhin geht schon aus STUBERS Messungen hervor, dass in diesem Falle das Zählvolumen keine Höhenausdehnung besitzt und sich auf einen Teil der Kathodenoberfläche beschränkt.

Um ein Resultat unter möglichster Ausschaltung von UV-Reflexionen zu erhalten, wurde ein Versuch mit einer Kohlekathode ausgeführt. Mit Hilfe eines Mikroskops liess sich feststellen, wo ein fein ausgeblendeter UV-Strahl die Kathode traf, ferner ob und wo ein Funken ausgelöst wurde. Es zeigte sich nun, dass das was FREY⁹) als «Funkenfläche» bezeichnet hat, gerade ungefähr die zählempfindliche Fläche darstellt. Im übrigen verteilten sich aber die Funken über die Funkenfläche unabhängig davon, wo das UV diese traf.

3. Spannungsverlauf und Funkenintensität.

Die Funkenintensität kann durch die pro Funken transportierte Ladungsmenge Q angegeben werden. Zur Messung von grösseren Intensitäten wurde ein ballistisches Galvanometer (50 Ohm) in den Abfluss eingeschaltet. Ein Parallelwiderstand (1167 Ohm) sorgte für aperiodische Dämpfung, und ein Parallelkondensator (2 MF) für wechselstrommässigen Kurzschluss. Im Falle kleinerer Intensitäten luden die Entladungsstösse einen kleinen Kondensator auf,

dessen Spannung ($< 2\text{ V}$) mit einem POHLschen Elektrometer gemessen wurde.

Der Spannungssturz δV (Betriebsspannung minus Abreißspannung: $\delta V = V - V_a$) wurde ähnlich wie bei STUBER³⁶⁾ mit dem K. O., jedoch ohne Zeitablenkung, gemessen (siehe Fig. 3). Die Batterie diente dazu, die Nullstellung des Kathodenstrahles aus dem Gesichtsfeld heraus nach oben abzulenken. Auf dem Leuchtschirm war eine mit Gleichspannung geeichte Skala angebracht, und man beobachtete, bis wie weit herab sich der Elektronenstrahl senkte, wenn ein Funken übergang. Der Spannungsteiler (1:31,5) gestattete unmittelbar die Berechnung des Spannungssturzes. Dabei brauchte der Nebenschluss 1 Megohm + Batterie nicht in Rechnung gesetzt zu werden. Es war aber wichtig, dass Eichung und Messung bei gleicher Strahlstromstärke stattfanden.

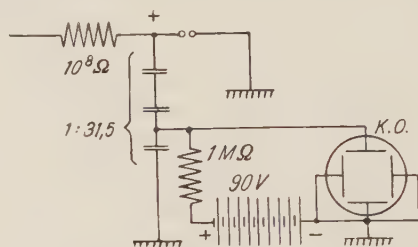


Fig. 3

Messung der Abreißspannung.

Beim Funkenzähler sendet jede Entladung stark gedämpfte Wellenzüge sehr verschiedener Frequenzen aus. Der Spannungsverlauf ist also im allgemeinen ein oszillatorischer, wie dies KLÄY²²⁾ bei intensiven Funken gezeigt hat, und daher wesentlich anders als bei Spitzenzähler und Zählrohr (z. B. TUOKKO³⁸⁾). Er erlaubt denn auch die in Fig. 1 angedeutete äusserst lose Ankopplung des Registriergeräts. Ferner verursachen die Funken in einem Radioempfänger (Kurzwellenbereich) selbst auf grössere Distanz deutliche Knalle (vgl. ¹³⁾). Diese Knalle sind bei unter gleichen Umständen ausgelösten Funken ganz verschieden stark, was darauf hinweist, dass das Frequenzspektrum von Funken zu Funken ändert. Weiter können in der Leitung, die die eine Elektrode erdet, hohe Spannungen auftreten, die sogar (bei nicht allzu schwachen Funken) eine der Erdleitung parallelgeschaltete Glimmlampe zum Leuchten bringen, und zwar ganz verschieden stark bei gleich intensiven Funken. Schlechte Verbindungen in den Zuleitungen werden oft durch Funken überbrückt und sind daher bei Messungen der Funkenfrequenz zu vermeiden.

Trotz der hochfrequenten Schwingungen haben in den Abfluss eingeschaltete Induktivitäten praktisch keinen Einfluss auf Intensität und Abreißspannung des Funkens. Hingegen wächst, in Bestätigung der Versuchsergebnisse von STUBER³⁶⁾, mit zunehmender Grösse des Abflusswiderstandes R_2 (Fig. 4) die Abreißspannung, ohne dabei von der Grösse des Zuflusswiderstandes R_1 stark abhängig zu sein. Für die Funkenintensität wurde entsprechend eine Abnahme bei wachsendem R_2 gefunden, fast unabhängig von R_1 . Werden andererseits die Widerstände und der eine Kondensator festgehalten, so ändert sich die Abreißspannung nur, wenn C_2 variiert wird. Die Intensität hingegen ändert sich stark mit C_1 und schwächer mit C_2 . Im letzten Falle zeigte sich das unerwartete Verhalten, dass die Funkenintensität bei Verwendung von Abflusswi-

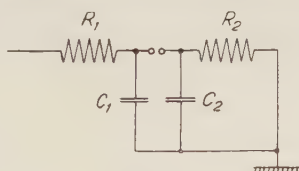


Fig. 4.

Schaltelemente des erweiterten Funkenkreises. $R_1 \gg 10^8 \text{ Ohm}$, $R_2 < R_1$

derständen zwischen 5 und 500 K Ω und Anwachsen der Kapazität C_2 von 20 auf 300 pF ein Minimum durchläuft (das tiefste Minimum betrug 40% der Werte am Rand des C_2 -Intervalles). Dieses gleichstrommässig nicht erklärbare Verhalten kommt vielleicht durch Reflexionen der angestossenen Wellenzüge zustande, die je nach den Schaltelementen verschieden stark ausfallen.

Es ist anzunehmen, dass das eben erwähnte Minimum auch für den Spannungssturz auf der Zuflußseite gilt, denn es ergab sich Proportionalität zwischen Funkenintensität und Spannungssturz. Wenn γ die natürliche Kapazität bedeutet, kann man ansetzen:

$$Q = (C_1 + \gamma) \delta V.$$

Diese Beziehung möge durch folgende, mit F 1 bei verschiedenen Drucken ausgeführten Messungen, belegt werden:

p Tor	V_0 Volt	δV Volt	Q $10^{-9} C$	$Q/\delta V$ pF
140	740	290	6,35	21,9
281	1320	676	13,3	19,7
441	1765	1062	24,1	22,7
562	2130	1432	32,4	22,7
708	2500	1771	40,6	22,9
				Mittel: 22,0

Mit dem Werte $C_1 = 13,5 \text{ pF}$ ergibt sich somit für γ , die Kapazität der Elektrode und des Widerstandes gegen Erde, $8,5 \text{ pF}$. Die Messungen wurden mit dem ballistischen Galvanometer ausgeführt.

Mit der Grösse des Spannungssturzes hängt eng die Frage nach der Trennzeit zwischen den Funken zusammen. Je kleiner δV , umso grösser das Auflösungsvermögen, da die Funkenladung umso rascher nachfliessen kann. Die Trennzeit berechnet sich nach GREINACHER¹³⁾ zu

$$\tau = R_1 C_1 \cdot \ln \frac{\delta V}{\Delta V}, \text{ wobei } \Delta V = V - V_0 = \text{Überspannung.}$$

Man kann versuchen, den Spannungssturz durch Vergrösserung von R_2 oder Verkleinerung von C_2 herabzusetzen, kommt aber wegen der gleichzeitigen Verzögerung des Abflusses zu keiner Erhöhung der Auflösung. Ferner wurde versucht, mit einer Schaltung ähnlich der von NEHER und HARPER²⁷⁾ für Zählrohre angegebenen, den Spannungssturz zu vermindern, jedoch ohne Erfolg, denn die Abreißspannung wurde just noch erniedrigt. Obschon für R_2 wesentlich kleinere Werte genügten, konnte kein grösseres Auflösungsvermögen erzielt werden. Ebenso blieben Versuche bei vermindertem Luftdruck erfolglos. Der Spannungssturz wurde zwar kleiner. Da aber gleichzeitig auch das Funkenpotential und der Zählbereich abnahmen, führte dies keineswegs zu günstigeren Verhältnissen.

Es wurde auch die Frage geprüft, welche untere Grenze der Funkenintensität sich erreichen lässt. Mit der Funkenstrecke F 3 gelang es, Intensitäten bis hinab zu 0,22 est. E. ($V = 1000 \text{ Volt}$) zu erhalten. Die untere Grenze war im wesentlichen dadurch bestimmt, dass die natürliche Kapazität der Funkenstrecke nicht verkleinert werden konnte. Andererseits war es möglich, mit einem Spitzenzähler Stösse bis zu 0,32 est. E. zu erhalten ($V = 3100 \text{ Volt}$), so dass man sagen kann, dass sich beide Entladungsarten intensitätsmässig etwas überschneiden.

Die Funkenintensität ist unabhängig davon, welches Ereignis den Funken ausgelöst hat, und für α -Teilchen kann man zeigen, dass es auch gleichgültig ist, wo das Teilchen das Zählvolumen durchquert hat. Hingegen kann man beim Beobachten vieler, unter gleichen Bedingungen ausgelösten Funken eine, je nach vorgegebener Intensität, verschieden grosse Streuung der Ladungsmenge von im Mittel $\pm 3\%$ feststellen. Gelegentlich gruppieren sich die gemessenen Intensitäten auch um zwei etwa gleich wahrscheinliche Werte (Abstand etwa 10%) derart, dass dazwischen eine grössere, von gemessenen Werten freie, Lücke entsteht. Die Ursache der Streuung der Intensität muss in den beim Funken beteiligten zufälligen Vorgängen (Anregung, Ionisation, Photoeffekte, Diffusion) gesucht werden.

Oberflächlich betrachtet ist es für die Funkenintensität gleichgültig, an welcher Elektrode der Hochohmwiderstand angeschlossen ist. Versuche ergaben jedoch Unterschiede bis zu 5%, und zwar schwächere Funken, wenn der Widerstand an der Anode lag. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Elektronen sich, dank ihrer grossen Beweglichkeit, rascher auf die Anode begeben können als die positiven Ionen auf die Kathode. Wenn also der Widerstand an der Anode liegt, wird die Abreißspannung früher erreicht und weniger Ladung transportiert als im umgekehrten Fall.

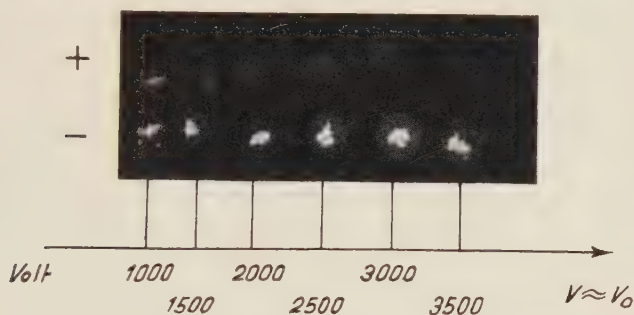


Fig. 5.

Einschläge von je 100 Funken auf Ag-Spiegel.

Vergrösserung 20fach. $R = 10^9$ Ohm, ohne C .

Untere Reihe: Spiegel Kathode. Obere Reihe: Spiegel Anode.

Das je nach Vorzeichen unterschiedliche Verhalten der Ladungsträger kommt auch in Fig. 5 zum Ausdruck, wo ein als Elektrode benutzter Ag-Spiegel (auf Glas) abgebildet ist.

Die Gegenelektrode war eine Pt-Kugel. Die Betriebsspannung wurde schrittweise um 500 Volt geändert und dazu die Schlagweite jeweils so eingestellt, dass das Funkenpotential knapp überschritten war. Bei jeder Einstellung wurde eine frische Stelle auf dem Spiegel benutzt, eine Serie von 100 Funken hindurchgesandt und danach das Vorgehen bei kommutierter Spannung wiederholt. Es fällt auf, dass die Spuren der Funken am anodisch verwendeten Spiegel umso deutlicher sind, je kleiner die Schlagweite (und Spannung) war, wogegen das an der Kathode nicht der Fall ist. Die Funken Spuren geben ein Mass für die Energie der auf die Elektroden fallenden Ladungsträger. Die positive Raumladung schirmt die Anode umso mehr ab, je grösser die Schlagweite und damit die Funkenintensität ist. Deshalb kommen die Elektronen mit umso grösserer Geschwindigkeit auf der Anode an, je kleiner die Schlagweite ist.

4. Zum Mechanismus der Funkenauslösung durch α -Teilchen.

Damit in einer Entladungsstrecke freie Elektronen eine selbständige Entladung einleiten können, muss die Rückwirkung auf das Gas oder die Kathode so stark sein, dass genügend Elektronen nachgeliefert werden. Art und Stärke der Rückwirkung (Stoss- oder Photoionisation von Gas oder Kathodenoberfläche, Elektronenbefreiung durch metastabile Atome) hängen ab von der Beschleunigung, die die Elektronen erhalten, ferner von der Wechselwirkung der Entladungsprodukte.

Die nachfolgend beschriebenen Versuche hatten das Ziel, die Art der Rückwirkung bei durch α -Teilchen ausgelösten Funken festzustellen.

Zunächst wurde der Ort der Funkenauslösung mit Hilfe einer planparallelen Funkenstrecke näher untersucht. Einer polierten, runden Messingplatte stand eine ebensolche vom doppelten Durchmesser (2 cm) gegenüber, die durch drei Schrauben der ersten möglichst parallel gestellt wurde. Die bei passender Betriebsspannung ausgelösten Funken verteilten sich dann gleichmässig über den verfügbaren Raum. Zunächst wurde nun eine Spannung im reinen α -Zählbereich gewählt, der bei einem V_0 von 3000 V nur etwa 20 V betrug. Die Bestrahlung des Plattenzwischenraumes geschah mit einem schmalen Fächer von Po-Strahlen, der mit Hilfe eines 0,1 mm weiten und 6 mm tiefen Spaltes ausgeblendet wurde. Die Funkenstellen wurden mit einem Mikroskop beobachtet. Die Blickrichtung war den α -Strahlen entgegengerichtet, senkrecht zu den Feldlinien. An welcher Stelle man auch den Strahlenfächer durch den Plattenraum streichen liess, immer befanden sich die Funken, wie erwartet, innerhalb des Fächers. Erhöhte man aber die Spannung etwas über das Funkenpotential, so entstanden auch ausserhalb des Strahlenfächers Funken und zwar besonders an einigen, wohl wegen Unregelmässigkeiten der Oberflächen, bevorzugten Stellen. Beim Bestrahlen dieser Stellen zündeten die Funken fast nur dort. Aber auch wenn diese Stellen 5 mm ausserhalb des α -Strahlenfächers lagen, konnten daselbst noch Funken beobachtet werden.

Um nun die Art der Fernwirkung zwischen Bestrahlungs- und Funkenort zu untersuchen, griff man gleichsam aus den unendlich vielen Funkenorten zwischen den Platten zwei heraus, indem einer polierten Ni-Platte (—) zwei halbkugelig abgerundete Pt-Drähte (+) gegenübergestellt wurden. Die beiden Anoden waren über denselben Widerstand an die Hochspannung angeschlossen, so dass stets nur eine Funkenstrecke aufs Mal zünden konnte. Um die von Auge zu

bestimmende Funkenfrequenz nicht allzu hoch zu erhalten, wurde ein grosser Zuflusswiderstand (10^9 Ohm) gewählt. Die beiden Schlagweiten waren nicht genau gleich (Unterschied in V_0 etwa 200 V), und die Achsen der beiden Funkenstrecken hatten etwa 3 mm Zwischenraum. Das Po mit Spaltblende konnte auf einem Mikroskopkreuztisch messbar verschoben werden. Die günstigste Betriebsspannung lag ein wenig über dem höheren V_0 . Der Spalt

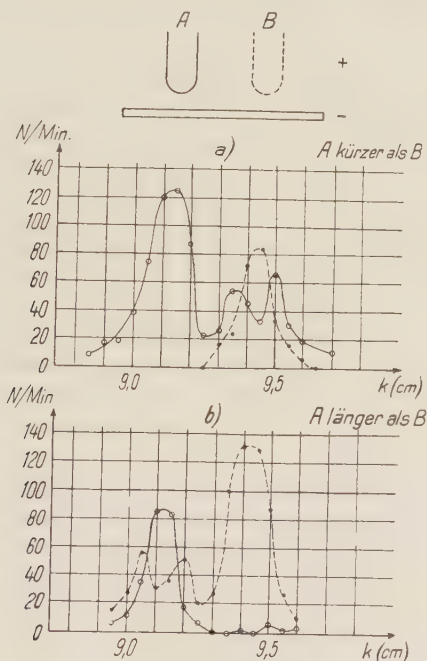


Fig. 6

Versuche mit der Zwillingfunkenstrecke.

wurde nun in kleinen Schritten seitlich verschoben, so dass der Fächer zuerst das eine Zählvolumen überstrich und darauf das andere. Erwartungsgemäss ergab sich für jede Funkenstrecke ein Maximum der Funkenfrequenz, wenn der Fächer ihr Zählvolumen mitten durchsetzte. Ausserdem erhielt man aber auch Funken in der unbestrahlten Funkenstrecke. In Fig. 6 ist die Funkenfrequenz als Funktion der seitlichen Verschiebung k des Strahlenfächers aufgetragen, und zwar gibt die ausgezogene Kurve (—) die Frequenz für die Strecke A und die gestrichelte (---) die für B. Wurde die anfänglich kürzere Funkenstrecke A (Fig. 6a) länger gewählt als B, so ergab sich analog der spiegelbildliche Frequenzverlauf (Fig. 6b). Die

Figur zeigt ferner, dass bei Bestrahlung der längeren Funkenstrecke (abwechselnd) sowohl diese als auch die kürzere anspricht, nicht aber umgekehrt. Das höhere Minimum der dreigipfligen Kurve kommt dabei so zustande, dass dort die längere Strecke der kürzeren in der Zündung zuvorkommt und ihr diese Funken vorwegnimmt, da eben nur eine Strecke aufs Mal zünden kann. Wären beide Schlagweiten gleich, so würde fast immer die gerade bestrahlte Strecke zünden.

Die so festgestellte Zählvolumengemeinschaft zweier getrennter Funkenstrecken spricht dafür, dass man es beim Funkenzähler, ähnlich wie beim Zählrohr¹⁾¹⁶⁾, mit lichtelektrischer Rückwirkung zu tun hat. Diese Auffassung wird auch bestätigt durch einen Versuch, den COSTA und RÄTHER⁷⁾ in ähnlicher Richtung durchführten. Sie untersuchten unselbständige Entladungen in verdünntem H_2 (0,86 Tor) und wiesen nach, dass das in einer primären Entladungsstrecke erzeugte UV eine «Nachweisstrecke» zum Zünden brachte.

Es war aber wünschenswert und für weitere Untersuchungen nötig, den Nachweis des Austausches von UV zwischen den Funkenstrecken noch besonders zu erbringen. Dies war durch Anbringen von Blenden zu versuchen. Hierbei erwies sich aber der Zwischenraum der Anoden in der letzten Anordnung als zu klein, um eine Blende einschieben zu können, ohne das Feld allzu sehr zu verzerren. Jedoch gelang dies durch Anwendung zweier völlig getrennter Elektrodenpaare, unter Beibehaltung des gemeinsamen Widerstandes (10^8 Ohm). Die Anordnung der Elektroden ist aus Fig. 7 ersichtlich. Als Kathode der von den α -Teilchen (senkrecht zur Zeichenebene) nicht bestrahlten Funkenstrecke (*B*) erwies sich ein Pt-Draht am geeignetsten, der schief und eben abgeschnitten war und diese Fläche der Anode der andern Funkenstrecke (*A*) zuwandte. Die übrigen Elektroden waren Pt-Kugeln. Auf diese Weise war es möglich, bei einem seitlichen Abstand der Funkenstrecken von 5 mm, durch Bestrahlen der (längeren) Strecke *A* dort nur etwa 10, an der Strecke *B* dagegen bis über 200 Funken pro Minute zu erhalten. Die verwendete Betriebsspannung von 2700 Volt stellte für *A* eine Überspannung von 5 V, für *B* eine solche von 300 V dar. Bei Änderung des seitlichen Abstandes der Funkenstrecken änderte sich die Frequenz an *B* nicht mehr, als aus geometrischen Gründen zu erwarten war. Deshalb war keine nennenswerte Absorption des UV in der Luft anzunehmen. Nach vielen Misserfolgen gelang es endlich noch, durch Einschieben eines dünnen Glasplättchens in den Zwischenraum, die Zählvolumina zu trennen und zu zeigen, dass immer wenn die Verbindungsgerade zwischen *A* und *B* durch das Glas hindurchführte, die Funken an *B* ausblieben.

Um den Weg des UV noch genauer zu erfahren, wurde so vorgegangen: Zunächst wurde der α -Strahlenfächer möglichst breit genommen, um die Bestrahlungsstärke an *A* so stark wie möglich zu erhalten. Nun wurden an Stelle des oben genannten Glasplättchens deren zwei angebracht, die, in einer Ebene liegend, eine Spaltblende von 0,2 mm Weite bildeten. Eine Mikrometerschraube erlaubte, diesen Spalt in seiner Ebene und parallel zu den Achsen beider Funkenstrecken auf $\frac{1}{100}$ mm messbar zu verschieben. Der gläserne Spalt wurde dann schrittweise um 0,05 mm verschoben, und bei jeder Stellung zählte man die Funken pro Minute an der Funkenstrecke *B*. Die Strecke *A*, an der es sozusagen keine Funken gab, wurde hierauf umgepolt und die Messung wiederholt.

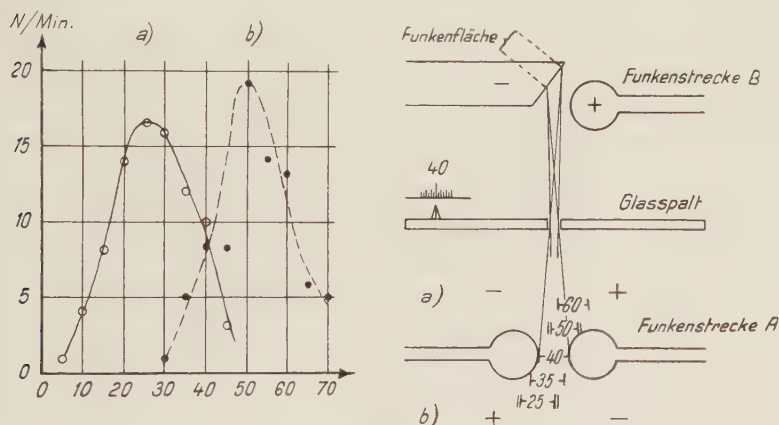


Fig. 7.

Die Versuche mit der doppelten Funkenstrecke.

Die Versuchsergebnisse sind in Fig. 7 links veranschaulicht. Da einerseits der gläserne Spalt nicht zu weit sein durfte, andererseits lange Messzeiten nicht ratsam waren, weil man nur mit ununterbrochenen Messreihen zuverlässige Resultate erhielt, waren die Funkenfrequenzen sehr niedrig ($< 20/\text{Min.}$). Dies erforderte zahlreiche Kontrollen und Stichproben, aber die Reproduzierbarkeit war befriedigend, zudem der Nulleffekt sehr gering. Um jedoch völliges Vertrauen in die Resultate zu erhalten, musste noch nachgewiesen werden, dass die Funkenstrecke *B* ihre Zählempfindlichkeit bei Verschiebung des Glasspalt es nicht änderte. Zu diesem Zwecke wurde sie mit einem Ra-Präparat bestrahlt. Während der Spalt in jede beliebige Stellung gebracht wurde, zählte die Strecke (abgesehen von statistischen Schwankungen) stets gleichviel, und bei völ-

liger Entfernung des Spaltes war nur eine geringe Frequenzänderung zu bemerken.

Um die Ergebnisse auswerten zu können, musste ein Plan der Anordnung gezeichnet werden, den Fig. 7 rechts zeigt. Deshalb wurden die Elektroden und der Glasspalt mit der Spitze eines Glasfadens unter dem Mikroskop abgetastet. Der geeignet gebogene Glasfaden war am Kreutztisch befestigt.

Es darf angenommen werden, dass von der Strecke *A* kurzdauernde UV-«Blitze» ausgingen, die *B* zum Zünden brachten und in der Luft nicht wesentlich absorbiert wurden. Somit ist der Weg des UV, welches an *B* Funken auslösen konnte, durch den Glasspalt und die kathodische Funkenfläche der Strecke *B* vorgezeichnet. Der Ursprungsort des UV muss also in dem Raumwinkel liegen, den wir durch Rückwärtsprojektion der Funkenfläche durch den Spalt zeichnen können (siehe Fig. 7). Jetzt kennt man also zu jeder Spaltstellung (Abszisse in Fig. 7 links) den zugehörigen Winkel und die Funkenfrequenz an *B*. Die besonders hervorgehobenen Winkel 25 und 50, die den Maxima der Kurven a) und b) entsprechen, liegen symmetrisch bezüglich der Funkenstrecke *A*, und die zu einem Winkel gehörende Funkenzahl ist umso kleiner, je weiter dessen Mittellinie vom Anodenrand entfernt ist. Bei der Abszisse 40 zeigen beide Kurven dieselbe Funkenzahl, und der zugehörige Winkel liegt in der Tat symmetrisch zu den Elektroden. Würden wir aber von der Annahme ausgehen, der Photoeffekt, der *B* zum Zünden bringt, erfolge nicht oder nicht nur an der kathodischen Funkenfläche, so wäre eine zwanglose Deutung der Symmetrieverhältnisse, wie sie durch das Umpolen entstehen, unmöglich. Dies rechtfertigt die anfangs gemachte Annahme der Photoionisation der Funkenfläche.

Diese Versuche ermöglichen also die örtliche Trennung von Vorentladung, Rückwirkung und Funken. Die Rückwirkung besteht in einem Photoeffekt an der Kathode, und zwar sind die Elektronen die Stosspartner der Luftmoleküle und nicht die positiven Ionen, da das UV aus der Anodennachbarschaft kommt. Auf den Ort der Anregung kommen wir noch in Kap. 5 zu sprechen. Die Vorentladungen der Strecke *A* waren, zum Teil wenigstens, unselbständig, jedoch bildeten sie zählbare Ereignisse. Es muss noch erwähnt werden, dass dies nicht ändert, falls die Betriebsspannung im reinen α -Zählbereich der Strecke *A* liegt. Zusammenfassend bietet sich uns der Mechanismus der Funkenauslösung durch α -Teilchen wie folgt dar: Die α -Teilchen befreien aus Luftmolekülen Elektronen, welche dort, wo das Feld ausreicht, Gasatome durch Stoss anregen. Das daherige UV liefert Photoelektronen aus der Kathode nach. Dies

wiederholt sich, bis das Elektroden- und Raumladungsfeld auch noch andere Prozesse ermöglicht.

Die Versuche mit der Doppelfunkenstrecke lassen sich grundsätzlich nur mit α -Teilchen ausführen, aber es darf angenommen werden, dass mit anderen Ionisatoren im wesentlichen dasselbe herauskäme. Es ist sogar denkbar, dass ein einzelnes Elektron einen Funken auslösen kann.

Die geschilderten Versuche illustrieren übrigens die ausserordentliche Empfindlichkeit für UV, die den Funkenzähler ja schon bei Messungen des Photoeffekts an Flüssigkeiten wertvoll gemacht hat^{10) 21)}. Der Versuch, das UV der Strecke A (ohne Optik) zu photographieren, misslang trotz achtstündiger Exposition. Entweder war

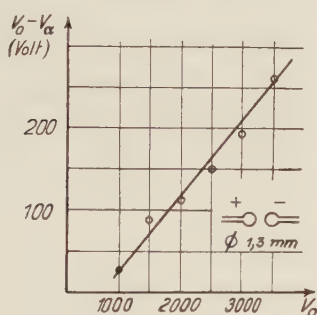


Fig. 8

Reiner α -Zählbereich in
Abhängigkeit von V_0 .

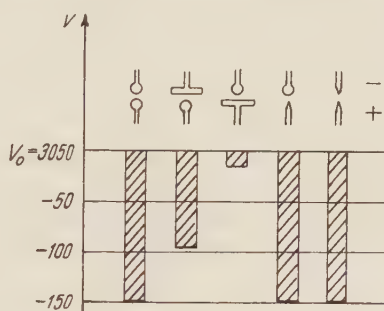


Fig. 9

Reiner α -Zählbereich für ver-
schiedene Elektrodenkombinationen.

die Gelatine für diese Wellenlängen undurchlässig oder die Intensität überhaupt zu gering.

Es muss aber angenommen werden, dass im einzelnen der Funkenablauf bei den stark ionisierenden α -Teilchen etwas anders erfolgt als bei anderen Ionisatoren. Die α -Teilchen können nämlich auch bei Betriebsspannungen unterhalb des gewöhnlichen Funkenpotentials noch Funken auslösen (reine α -Zählung). In diesem Fall kann auch nicht die sonst zulässige Annahme von FREY⁹⁾ zutreffen, dass es sich um die Aufhebung der Funkenverzögerung handelt. In diesem Zusammenhang musste die genauere Kenntnis des reinen α -Zählbereichs, bzw. dessen unteren Grenze V_α , interessieren. Es wurde daher V_α in Abhängigkeit von V_0 (das leichter zu messen ist als die Schlagweite) näher untersucht. Der Fig. 8 ist zu entnehmen, dass der reine α -Zählbereich ($V_0 - V_\alpha$) etwa linear mit V_0 wächst. In Fig. 9 sind dann die Messungen von V_α einiger Elektrodenkombinationen wiedergegeben. Bei allen Messungen war V_0 auf denselben

Wert eingestellt. Man kann die verschiedenen V_α also nur qualitativ miteinander vergleichen. Die Ermittlung des V_α ist weit mühsamer und weniger exakt als die von V_0 , d. h. die α -Zählkurve beginnt mit ganz geringer Steigung. Ferner hängt V_α noch von der Stärke des α -Strahlers ab. So löste beispielsweise ein schwaches Po-Präparat unterhalb ($V_0 = 130$) Volt keine Funken mehr aus, während $V_0 = V_\alpha$ für ein starkes Präparat 165 Volt ergab. Schliesslich sei noch an die schon von FREY⁹⁾ erwähnte Tatsache erinnert, dass V_α nochmals um 50–100 Volt tiefer zu liegen kommt, falls die α -Teilchen durch die Achse des Zählvolumens fliegen.

Es ist zu vermuten, dass man einen analogen, wenn auch kleineren reinen Zählbereich für Protonenstrahlen findet. Versuche in dieser Hinsicht konnten aber nicht ausgeführt werden, da das verfügbare Po-Präparat zur Erzeugung einer genügenden Menge von Protonen nicht ausreichte.

Es ist bemerkenswert, dass vor kurzem auch beim Zählrohr eine Besonderheit der α -Zählung gefunden wurde²⁰⁾, indem radiale α -Teilchen zufolge der besonderen Raumladungsbildung aussergewöhnlich intensive Entladungen bewirken. Die dortigen Überlegungen lassen sich jedoch nicht auf den Funkenzähler anwenden, da hier die Funkenintensität beim Übergang in den reinen α -Zählbereich keine Unstetigkeit zeigte.

5. Funkenpotential und Zählvolumen.

Das Funkenpotential hängt nicht nur von den Elektroden und dem Zwischengas, sondern auch von der Umgebung der Funkenstrecke ab. Bei den beim Funkenzähler verwendeten kleinen Elektrodenabständen war anzunehmen, dass eine durch die Umgebung vorhandene Feldstörung keinen nennenswerten Einfluss besitzt, und dass dementsprechend auch die durch Bestrahlung ausgelöste Funkenfrequenz hiedurch nicht berührt werde. In der Tat konnte man feststellen, dass durch ein zusätzliches äusseres Feld sich das Funkenpotential nur wenig beeinflussen lässt. Die Funkenfrequenz zeigte jedoch unerwarteterweise schon merkliche Änderungen, wenn man z. B. die Polarität an den (symmetrischen) Kugelelektroden vertauschte, und liess sich stark durch Aufladung der Umgebung beeinflussen. Es war daher von Interesse, den Einfluss elektrischer Felder einerseits auf das Funkenpotential, andererseits auf das Zählvolumen genau zu untersuchen.

In Fig. 10 soll der achsiale Feldverlauf zwischen zwei Funkenelektroden, a) zwischen Kugel/Platte, b) zwischen zwei gleichen

Kugeln angegeben werden. Bei b) und einseitiger Erdung ist der Verlauf, infolge der geerdeten Umgebung, leicht unsymmetrisch, doch ist das Funkenpotential nicht merklich polaritätsabhängig. Auch bei a) entspricht die gefundene Polaritätsabhängigkeit nicht

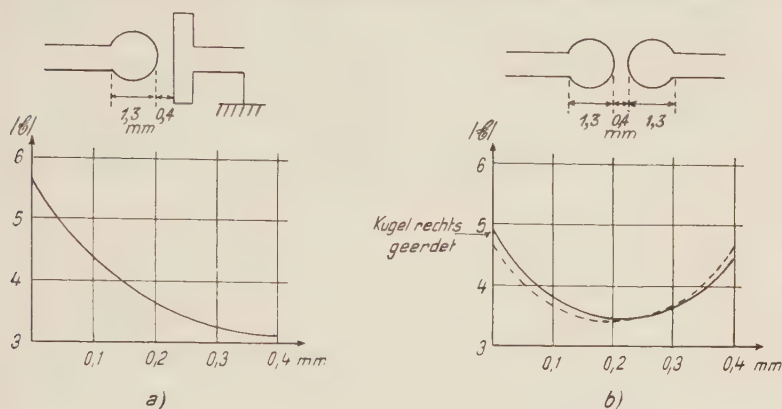


Fig. 10.

Feldstärke (in willkürlichen Einheiten) auf der Achse.

Spannung (2500 V) für a) und b) gleich.

dem stark unsymmetrischen Feldverlauf, tritt jedoch deutlich in Erscheinung. Tabelle 1 möge dies zeigen:

Tabelle 1.

Unterschied von V_0 beim Umpolen von Platte/Kugel bei verschiedenen Kugeldurchmessern und Spannungen. Bei + Kugel ist V_0 immer kleiner.

\varnothing (mm) ↓	1500	2000	2500	3000	3500	V_0 (Volt)
4	5	10	15	20	30	
1,48	5	20	35	45	70	
0,75	15	20	40	60	125	

Fig. 11 zeigt noch die Werte von V_0 und V_α für drei verschiedene Elektrodenkombinationen. Es ist bemerkenswert, dass V_α stärker auf die Feldänderung reagiert als V_0 . Weitere Einzelheiten über V_α wurden schon in Kap. 4 angeführt.

Um den Einfluss eines Zusatzfeldes zu untersuchen, wurde um die Funkenstrecke coaxial ein Draht ring angebracht (Fig. 12). Hier liess sich die durch dessen Aufladung bewirkte Feldänderung genauer angeben. Zur Berechnung der Feldverteilung in der Achse kann das

Verfahren der elektrischen Bilder von W. THOMSON angewendet werden (in MAXWELL²⁵) oder Hdb. d. Ph. ²³). Die Ladungsverteilung auf den Kugeln (ohne Ring) ersetzen wir danach durch eine unendliche Folge von Punktladungen und berechnen deren Werte und Lage. Die Potentiale der Kugeln seien $+V$ und $-V$. Dann ist die Ringebene (Fig. 12) die Niveaufläche für das Potential Null. Wird nun der Ring herangebracht und mit $+V$ verbunden, so erhält er die Ladung $+cV$, wo c seine im vorliegenden Fall etwa 0,25 cm betragende Kapazität bedeutet*). Der positiv geladene Ring influenziert auf beiden Kugeln negative Ladungen, und das

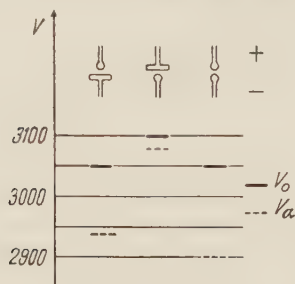


Fig. 11.
 V_0 und V_α bei verschiedenen
Funkenstrecken.

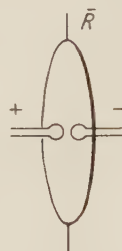


Fig. 12.
Funkenstrecke
mit Ringelektrode \bar{R} .

Feld dieser (gleichnamigen) Influenzladungen samt ihren Bildfolgen sowie das des Ringes selber überlagert sich dem der (ungleichnamig geladenen) Kugeln. Es ist leicht einzusehen, dass in diesem Fall das Feld an der Anode geschwächt, an der Kathode um gleich viel verstärkt und im Mittelpunkt nicht verändert wird. Tabelle 2 teilt

Tabelle 2.

Feldstärke (in willkürlichen Einheiten) an den Kugelscheiteln,
je nach Ringpotential.

	Anode	Kathode
ohne Ring	4,688	4,688
Ring +	4,540	4,836
Ring —	4,836	4,540

die Ergebnisse der Berechnung der Feldstärke an den Kugelscheiteln mit. Der Rechnung liegt eine Schlagweite von 0,4 mm zugrunde,

*) Ich verdanke Herrn Dr. SCHILT eine einfache Formel zur Berechnung der Ringkapazität.

was ungefähr $V_0 = 2500$ V entspricht. Die Feldstärkeänderung beträgt zirka 6%, während V_0 um nur etwa 1% geändert wird. Es leuchtet ein, dass man qualitativ auf dasselbe Ergebnis kommt, wenn der Ring nicht genau in der Symmetrieebene ist oder wenn man eine Kugel erdet. Ein Beispiel möge den Einfluss des Ringpotentials auf das Funkenpotential beleuchten:

Kugeldurchmesser: 1,3 mm

Ringdurchmesser: 10 mm (Draht \varnothing 0,3 mm).

V_0 für $\bar{R} +$	V_0 für $\bar{R} -$
3000 Volt	2940
2300	2290

Mit $\bar{R} + (R -)$ soll fortan ausgedrückt werden, dass der Ring dasselbe Potential wie die Anode (Kathode) besitzt.

Der Einfluss der Umgebung auf das Zählvolumen ist so gross, dass er sich schon ohne Hilfelektrode nachweisen lässt. Es wurden folgende acht Schaltungsmöglichkeiten geprüft und dafür die angegebenen Zählfrequenzen gefunden:

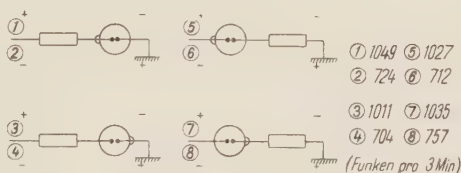


Fig. 13.

Einfluss der Polung auf die Zählfrequenz.
Funkenstrecke F 1, Ra-Bestrahlung.

Es fällt auf, dass bei den ungeraden Schaltungen die Frequenz erheblich höher war als bei den geraden. Nun liegt der Unterschied der beiden Schaltungsgruppen darin, dass die Glaswand, die stets etwa Erdpotential hat, bei den ungeraden Schaltungen dasselbe Potential wie die Kathode hat, bei den geraden jedoch wie die Anode. Bestätigung: Erdete man die Mitte der Hochspannung, so lag die Frequenz nahezu in der Mitte.

Es wurden nun Versuche mit Hilfelektrode gemacht (Anordnung wie in Fig. 12). Die eine Kugel war geerdet, und der Ring konnte geerdet oder über einen Schutzwiderstand von 10^7 Ohm an die Hochspannung angeschlossen werden. Bei konstanter Ra-Bestrahlung und verschiedenen grossen Ringen wurde nun die Frequenz

gemessen und, wie zu erwarten, immer dann höher gefunden, wenn der Ring das Potential der Kathode besass (siehe Tabelle 3). Das Verhalten des Quotienten q (Frequenz bei $R -$ durch die bei $\bar{R} +$) ist auch ohne weiteres verständlich.

Tabelle 3.

Funkenfrequenzen (pro Min.) bei verschiedenen Ringdurchmessern \varnothing .

\varnothing (cm)	$\bar{R} +$	$\bar{R} -$	$q = \frac{\bar{R} -}{\bar{R} +}$
3,6	318	374	1,18
1,7	276	384	1,39
1,0	297	442	1,49

In einem weiteren Versuch wurde q bei verschiedenen Überspannungen gemessen (Fig. 14). Die Verwendung einer ebenen Kathode

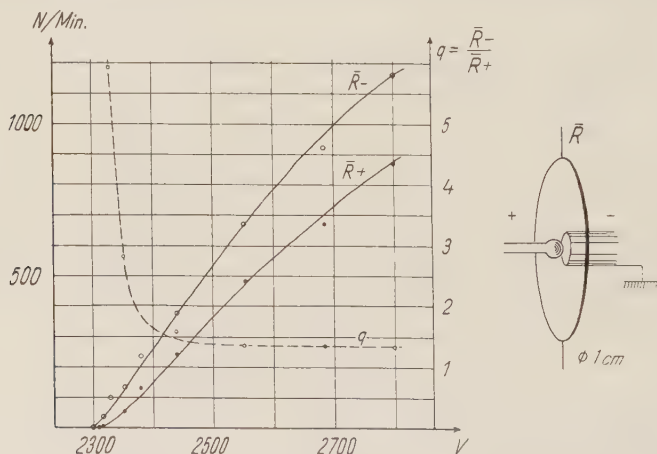


Fig. 14.

Ringpotentialabhängigkeit als Funktion der Überspannung.

hat keine Bedeutung. Die V_0 -Änderung von etwa 10 V kann für grössere Überspannungen niemals als Ursache der Frequenzänderung infolge Umpolens des Ringpotentials in Betracht kommen.

Die Versuche mit der Ringelektrode wurden auch bei UV- und Po-Bestrahlung ausgeführt und ergaben im wesentlichen dasselbe.

Da einerseits Bestrahlung, Spannung, Gasart und -druck hinreichend konstant und das Auflösungsvermögen genügend gross war, andererseits die V_0 -Änderung zu gering, kommt nur noch das

Zählvolumen in Frage, um die obigen Versuche zu erklären. Es lässt sich allerdings nicht entscheiden, ob sich nur die Grösse oder auch die Empfindlichkeit des Zählvolumens ändert. Ein «Kanalversuch», ähnlich dem von FREY⁹⁾ angegebenen, bestätigte, dass das Zählvolumen wirklich geändert wird: Eine ebene Messingkathode war von einem feinen Loch durchbohrt. Die Anode (Pt-Kugel) stand dem Loch genau gegenüber. Als Hilfs Elektrode war ein koaxialer Ring von 1 cm Durchmesser angebracht. Die Bestrahlung (Po) erfolgte einmal durch das Loch, einmal von der Seite. Die Betriebsspannung wurde unterhalb V_0 gewählt (reiner α -Zählbereich), um nicht eine zu grosse Funkenfrequenz zu erhalten. Messungen mit $\bar{R} +$ und $\bar{R} -$ ergaben, dass der Ring nur dann von Einfluss war, wenn die Bestrahlung von der Seite kam, das Zählvolumen also nicht von vornherein festgelegt war.

Das Zählvolumen, nach GREINACHER¹³⁾ der Raum, in dem Strahlen angezeigt werden, ist unter gewöhnlichen Verhältnissen sehr klein, von der Grössenordnung 0.1 mm^3 . STUBER³⁶⁾ hat das Zählvolumen direkt ausgemessen, und FREY⁹⁾ hat versucht, durch Messung von «Funkenfläche» und «Funkenraum» sowie der entsprechenden Funkenfrequenzen, Aussagen mehr statistischer Art darüber zu erhalten. Auf Grund der beschriebenen Versuche ist es nun möglich, sich eine bestimmte Vorstellung über das Zählvolumen zu machen und diesem Begriff einen physikalischen Inhalt zu geben. Den Schlüssel dazu geben die Versuche mit der doppelten Funkenstrecke. Sie hatten gezeigt, dass die UV-Blitze, welche die Funkenstrecke A emittierte, diese selbst nicht zur Zündung brachten, wohl aber die Strecke B , deren Überspannung höher war. Die Vorgänge in der Nähe der Anode von A , die in einer Vorentladung bestehen, lösen also an der Kathode von B Funken aus. Diese Vorentladungen sind schon bei geringerer Feldstärke möglich als die Hauptentladungen und finden bereits unterhalb V_0 statt. Die Funkenstrecke besitzt Zähl-eigenschaft, ohne selbst zu zünden. Ihr kann also ein bestimmtes Zählvolumen zugeschrieben werden, das erst bei hinreichender Unterschreitung des Funkenpotentials auf Null zusammenschrumpft.

Fasst man die Doppelfunkenstrecke als eine Zähleinheit auf, so kann man dieser ein zweigeteiltes Zählvolumen zuschreiben, eines (A), wo nur Vorentladungen bzw. Anregung ausgelöst wird und eines (B), wo Anregung und Funkenübergang zugleich eintreten. Genau besehen besitzt auch B eine solche Randzone mit blosser Anregung. Man gelangt so allgemein zur Vorstellung, dass bei jeder Zählfunkenstrecke ein solch doppelt gegliedertes Zählvolumen vor-

handen ist, ein inneres, wo Vor- und Hauptentladung möglich sind und ein äusseres, wo das Feld nur zur Anregung und Auslösung einer Vorentladung ausreicht. Dabei ist nicht gesagt, dass jedes durch das UV an der Kathode befreite Elektron eine Zündung herbeiführt. Es wird im allgemeinen nur ein gewisser Prozentsatz der ins Zählvolumen eindringenden ionisierenden Teilchen gezählt: Das Zählvolumen besitzt eine je nach Anordnung und Teilchenart verschieden grosse Zählempfindlichkeit (siehe FREY⁹)), die von innen nach aussen abnimmt.

Auf Grund der gewonnenen Vorstellungen über das Zählvolumen lassen sich nun die Verhältnisse bei verschiedenen Elektrodenanordnungen genauer überblicken, und es lassen sich entsprechende Versuche zur experimentellen Bestätigung anführen.

Zunächst seien die Verhältnisse für zwei Kugelelektroden dargestellt (Fig. 15). Der Raum, in dem die Feldstärke zur UV-Anregung

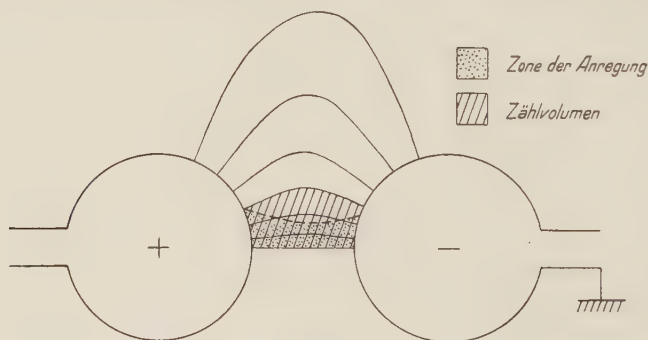


Fig. 15.
Zählvolumen zweier Kugeln.

ausreicht, sei punktiert. Alle Elektronen, die von einem Punkt des schraffierten Gebiets ausgehen, gelangen in diesen Raum, wobei angenommen wird, dass sich die Elektronen ungefähr längs der Feldlinien bewegen. Der schraffierte, von einem Mantel aus Feldlinien umgebene Raum stellt also das Zählvolumen dar.

Etwas anders liegen die Verhältnisse bei der Anordnung Kugel/Platte. Ist die Kugel Anode, so ist zwar das Resultat ähnlich dem vorhergehenden (Fig. 16a), nicht aber, wenn sie Kathode ist (Fig. 16b). Hier nimmt das Feld von der Kathode zur Anode ab, wie auch die Breite der Anregungszone. Da ferner alle aus der Kathode (Photoeffekt) und nahe davor (Ionisation) befreiten Elektronen unmittelbar in diese Zone gelangen, ist sie mit dem Zählvolumen identisch. Dieses wird somit nicht von Feldlinien begrenzt und ist, wie ersichtlich, kleiner als im andern Falle.

Ein Versuch, dessen Elektrodenanordnung schon in Fig. 14 dargestellt wurde, ermöglichte zu zeigen, dass Fig. 16 die Verhältnisse richtig wiedergibt. Um bei beiden Polaritäten vergleichbare Verhältnisse zu erhalten, müsste auf gleiche Überspannung eingestellt werden. Der V_0 -Unterschied beträgt im vorliegenden Fall (Tabelle 1) etwa 40 V. Obschon die positive Spannung 30 V zu tief gewählt wurde, betrug die Funkenfrequenz, wie folgende Zahlen zeigen, das dreifache von der bei negativer Kugel gemessenen. Es

Funken/Min. Ra-Bestrahlung.

Spannung an Kugel	$\bar{R} -$	$\bar{R} +$
— 2700	96	99
+ 2630	313	283

darf ohne weiteres angenommen werden, dass $\frac{\bar{R} - + R +}{2}$ den Frequenzen entsprechen, die man ohne Ring gemessen hätte. Es ist ferner bemerkenswert, dass der Einfluss des Ringes hier je nach

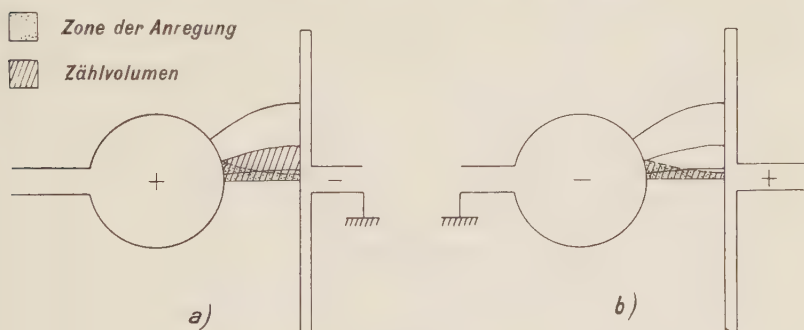


Fig. 16.

Zählvolumen zwischen Kugel und Platte.

Polarität verschieden ist. Nun hängt gemäss Fig. 16 das Zählvolumen bei + Kugel von der Anodenfeldstärke ab, bei — Kugel aber von der Kathodenfeldstärke. Der negative Ring verstärkt aber jedesmal die Anodenfeldstärke und schwächt das Feld an der Kathode.

Im Falle zweier Kugeln, wovon immer eine geerdet ist, haben wir an der nicht geerdeten Kugel die grössere Feldstärke. Danach wäre das Zählvolumen bei geerdeter Kathode um ein wenig grösser. Die Existenz dieses kleinen Effektes kann jedoch nur

schwer festgestellt werden, denn der Einfluss der Umgebung kann kaum genügend ausgeschaltet werden, auch zählt keine Funkenstrecke in beiden Richtungen genau gleich. In diesem Sinne müssen auch die bei Fig. 13 vermerkten Zahlen mit einer gewissen Zurückhaltung beurteilt werden.

Aus der in Tabelle 4 wiedergegebenen Versuchsreihe folgt, dass der Ringeinfluss grösser ist, wenn die Kathode geerdet ist ($E-$). Die Anordnung war die von Fig. 12, die Ra-Bestrahlungsintensität jedoch für jede Spannung wieder anders. Man könnte auch so sagen:

Tabelle 4.

V (Volt)	$E -$		$E +$		q_{E-}	q_{E+}
	$\bar{R} -$	$\bar{R} +$	$\bar{R} -$	$R +$		
2900	308	88	196	100	3,50	1,96
2960	174	55	122	65	3,17	1,88
3000	143	37	118	42	3,87	2,81

Wenn man beispielsweise Schaltung 1 und 2 (Fig. 13) vergleicht, so erhält man $q_1 > q_2$, wobei $q = \bar{R}-/\bar{R}+$. In diesen Fällen hängt das Zählvolumen fast nur vom Anodenpotential ab. Ist die Anode geerdet ($E+$), dann wirkt die Umgebung entgegen $\bar{R}-$ und mit $\bar{R}+$, aber der Ringeinfluss überwiegt. Also ist $q_{E-} > q_{E+}$.

Weitergehende Versuche über den Einfluss verschiedener Kathodenmaterialien unterblieben, da die interessierenden Metalle schlechte Zählwirkung aufweisen. Die angeführten Versuche dürften aber schon weitgehende Aufschlüsse über die Funkenauslösung erlauben. In diesem Zusammenhang hat das, was FREY⁹⁾ als Funkenraum bezeichnete, seine Bedeutung verloren, da das Zählvolumen von anderen Grössen abhängt als der Funkenraum.

6. Der Funkenzähler als Messgerät.

Schon FREY⁹⁾ konnte zeigen, dass der Funkenzähler mit Pt-Kügelchen in geschlossenem, trockene Luft enthaltenden Glasgefäss während einer längeren Messreihe konstante Zählempfindlichkeit besass. Dies ermöglichte ihm auch, die genaue Proportionalität zwischen Funkenfrequenz und Bestrahlungsintensität festzustellen. Es musste nun die Frage interessieren, wie sich der Zähler bei langandauerndem Gebrauch und nach Einschalten längerer Pausen verhält, ferner, welche Lebensdauer er besitzt. Eingehende Versuche wurden mit $F\ 5$ durchgeführt. Zunächst wurde eine ungefähr

14 Tage dauernde Messreihe aufgenommen, wobei innert nicht ganz 100 Stunden etwa 500 000 Funken übergingen. Die mittlere Frequenz eines Tages (bei stets gleicher Bestrahlungsintensität) nahm in dieser Zeit von 92 allmählich auf 79 (pro Minute) ab. Einige Tage später wurde eine zweite, fünf Tage dauernde, wieder 500 000 Funken umfassende, Serie aufgenommen, wobei die Funken durch eine Zusatzkapazität von 50 pF verstärkt waren. Die Frequenz wies jetzt einen nur zwischen 171 und 179 schwankenden Wert auf. Um nun innert kürzerer Zeit auf wesentlich höhere Funkenzahlen zu kommen, wurde in der Folge mit Untersetzer gearbeitet und der Kondensator weggelassen. Nachdem die Funkenstrecke etwa zwei

Tabelle 5.

Dauerversuche mit F 5 (ohne Kapazität, $R = 10^8 \Omega$).

Datum	\bar{N}	$\frac{\bar{p}}{\sqrt{\bar{N}}}$	N_0	f	t h Min.	Σ
25. 2. 47	3227	0,8		2	0.12	39 000
26.	3231	0,5		12	7. 5	1 370 000
27.	3064	1,3		24	5.20	980 000
28.	3273	1,1		33	7. 4	1 390 000
1. 3.	3273	1,0		13	3.19	650 000
3. 3.	3170	1,2	0	16	3. 5	585 000
						5 014 000
11. 6. 47	4163	0,8		10	6.27	1 610 000
12.	4007	0,9		9	3.40	881 000
13.	3981	2,9	0	10	3.22	803 000
						3 294 000
10. 7. 47	4144	1,8		9	3.10	790 000
11.	4444	1,7		15	8.44	2 330 000
12.	4536	3,8		9	3.26	1 025 000
14.	4412	2,4		16	9.20	2 470 000
15.	4251	2,1	1,3	5	0.35	150 000
						6 765 000
Total (+ 2 im Text erwähnte Serien): 16 035 600						

Legende:

 \bar{N} mittl. Funkenfrequenz pro Minute. f Anzahl der \bar{N} -Messungen. \bar{p} mittl. Abweichung vom Mittel. t Betriebsdauer. N_0 Nulleffekt pro Minute. Σ Anzahl der Funken.

Ra-Bestrahlung, konstant und gleich für diese 3 Messreihen.

Spannung: 2865 Volt.

Monate unbenützt gestanden hatte, wurden die in Tabelle 5 zusammengestellten Zahlen gefunden. Man erkennt, dass die mittlere Frequenz innert einiger Tage merklich konstant blieb, aber doch (trotz konstanter Bestrahlung), nach einer Pause von drei Monaten, um zirka 30% zugenommen hat. Um festzustellen, inwieweit die Funkenfolge einer rein statistischen Verteilung entspricht, ist auch \bar{p}/\sqrt{N} angegeben. Während die Werte am Anfang in der Nähe des theoretischen Wertes 1 liegen, nehmen sie schliesslich zu, was auf das Auftreten einer Nachwirkungserscheinung hindeutet. Im Übrigen arbeitete der Zähler mit bemerkenswerter Konstanz. So konnte beim Vergleich zweier schwacher Ra-Präparate, trotz relativ kleiner Funkenzahl, ein auf 2,5% genaues Resultat ermittelt werden. Auch konnte die Konstanz der Betriebsspannung mittels der Funkenfrequenz sogar genauer als mit dem Elektrometer beurteilt werden.

Abschliessend ist zu sagen, dass die Funkenstrecke F 5 bis etwa $6 \cdot 10^6$ Funken einwandfrei zählte, aber auch nach $1,6 \cdot 10^7$ Funken noch funktionierte. Allerdings wiesen die Elektroden neben den Funkenflächen eine dunkelbraune Bestäubung auf, und das Silicagel zeigte durch seine Verfärbung (gelblich bei Betrieb, farblos nachher: nur die nächstliegenden Körner) eine gewisse Änderung des Gasgehaltes an.

Es wurde nun versucht, eine zweite gleiche Funkenstrecke herzustellen. Es zeigte sich aber, dass dies nicht ohne weiteres möglich ist. Denn diese Funkenstrecke (F 6) wies deutliche Nachwirkung auf, die mit dem K. O. leicht zu erkennen war, und die auch nach 10^7 Funken und nach Reinigen und Ausglühen nicht verschwand.

Schliesslich war zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Funkenzählers wichtig zu ermitteln, wie hoch hinauf die Frequenz statistisch verteilter Funken getrieben werden kann. So erreichte man mit F 2 bei einer Überspannung von 670 V und starker Ra-Bestrahlung eine mittlere Frequenz von 258 Funken in der Sekunde. Diese Frequenz war zu hoch, als dass Beobachtungen mit dem K. O. über die Verteilung der Funken hätten Aufschluss geben können. Da aber die drei verschiedenen Trennzeiten des Untersetzers bekannt waren, war eine gewisse Möglichkeit gegeben, statistische Verteilung von regelmässiger Folge zu unterscheiden:

Es wurden gezählt	(n_0)	234,3	257,0	258,2	(pros)
Trennzeit	(τ)	1/1950	1/4800	1/6300	(s)
wahre Frequenz: $n=n_0 e^{-n_0 \tau}$		269	272	269	

Obschon der Nulleffekt beträchtlich war (zirka 17/Minute), darf angenommen werden, dass es sich bei dieser Frequenz doch noch

um ein Zählen unregelmässig verteilter Funken gehandelt hat (16200 in der Minute).

Nachwirkung und Nulleffekt können im allgemeinen niedrig gehalten werden. Somit richtet sich die Verwendbarkeit des Funkenzählers in erster Linie nach der Konstanz der Empfindlichkeit. Versuche zeigten, dass das Funkenpotential unabhängig ist vom Abnutzungszustand der Elektroden. Deshalb muss geschlossen werden, dass die Empfindlichkeitsänderungen von Änderungen des Zählvolumens herrühren. Diese bestehen wohl vor allem in den Schwankungen der photoelektrischen Eigenschaften der Kathode, wie sie z. B. infolge Kathodenzerstäubung eintreten können. Es liess sich zeigen, dass solche Zählempfindlichkeitsänderungen auch künstlich hervorgerufen werden können. Es genügte, einen als Kathode verwendeten Ag-Spiegel mit einer Kerzenflamme zu berussen. Die (allerdings wenig zuverlässig arbeitende) Funkenstrecke war hernach sogar für sichtbares Licht empfindlich.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. Dr. H. GREINACHER im Physikalischen Institut der Universität Bern ausgeführt. Ich möchte meinem verehrten Lehrer für sein Interesse und seine wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.

Literatur.

- 1) F. ALDER, E. BALDINGER, P. HUBER und F. METZGER, H. P. A. **20**, 73 (1947).
- 2) T. E. ALLIBONE and J. M. MEEK, Journ. sc. instr. **21**, 21 (1944).
- 3) E. BALDINGER, H. P. A. **19**, 202 (1946).
- 4) W. BARTHOLOMEYCZYK, Zs. f. Phys. **116**, 235 (1940).
- 5) W. CHRISTOPH, Ann. d. Phys. (5) **30**, 446 (1937).
- 6) H. COSTA, Zs. f. Phys. **113**, 531 (1939).
- 7) H. COSTA und H. RAETHER, Nat. Wiss. **26**, 593 (1938).
- 8) J. DOSSE und G. MIERDEL, Der elektrische Strom im Hochvakuum und in Gasen, Leipzig 1943.
- 9) P. FREY, H. P. A. **19**, 41 (1946).
- 10) H. GREINACHER, H. P. A. **7**, 360, 514, 641 (1934).
- 11) H. GREINACHER, H. P. A. **8**, 89, 265 (1935).
- 12) H. GREINACHER, Zs. f. techn. Phys. **16**, 165 (1935).
- 13) H. GREINACHER, H. P. A. **9**, 590 (1936).
- 14) H. GREINACHER, Zs. f. techn. Phys. **19**, 132 (1938).
- 15) H. GREINACHER, H. P. A. **20**, 222 (1947).
- 16) E. GREINER, Zs. f. Phys. **81**, 543 (1933).
- 17) H. L. VON GUGELBERG, H. P. A. **20**, 307 (1947).
- 18) M. W. HOFFMANN, Ann. d. Phys. u. Chem. **60**, 269 (1897).
- 19) W. HOLZER, Zs. f. Phys. **77**, 676 (1932).

- ²⁰⁾ P. HUBER, W. HUNZINGER und E. BALDINGER, H. P. A. **20**, 525 (1947).
 - ²¹⁾ P. JEANGUENIN, H. P. A. **17**, 319 (1944).
 - ²²⁾ H. KLÄY, H. P. A. **12**, 443 (1939).
 - ²³⁾ F. KOTTLER, Hdb. d. Phys. (GEIGER und SCHEEL), Bd. **12**, 424 (1927).
 - ²⁴⁾ A. LIECHTI, Strahlentherapie **62**, 343 (1938).
 - ²⁵⁾ J. C. MAXWELL, A Treatise on Electricity and Magnetism. 2 Bde., Oxford 1892 (3. Aufl.).
 - ²⁶⁾ E. MEILL, H. P. A. **18**, 79 (1945).
 - ²⁷⁾ H. V. NEHER and W. W. HARPER, Phys. Rev. **49**, 940 (1936).
 - ²⁸⁾ H. PAETOW, Zs. f. Phys. **111**, 770 (1939).
 - ²⁹⁾ H. RAETHER, Zs. f. Phys. **110**, 611 (1938).
 - ³⁰⁾ F. ROGGEN und P. SCHERRER, H. P. A. **15**, 497 (1942).
 - ³¹⁾ W. ROGOWSKI, Arch. f. Elektrot. **25**, 551 (1931).
 - ³²⁾ W. ROGOWSKI, Zs. f. Phys. **100**, 1 (1936).
 - ³³⁾ R. SCHADE, Zs. f. Phys. **108**, 353 (1938).
 - ³⁴⁾ W. SCHWIECKER, Zs. f. Phys. **116**, 562 (1940).
 - ³⁵⁾ J. STRONG, Procedures in Experimental Physics. New York 1946, S. 294.
 - ³⁶⁾ R. STUBER, H. P. A. **12**, 109 (1939).
 - ³⁷⁾ J. S. TOWNSEND, Marx: Hdb. d. Rad. I, 1920.
 - ³⁸⁾ R. TUOKKO, Acta Soc. Sc. Fennicae, Nova Series A, III, No. 2, 8 (1939).
-

Herstellung und Untersuchung von BaTiO_3 Einkristallen

von H. Blattner, W. Känzig und W. Merz.

(16. XII. 1948.)

Zusammenfassung: Auf Grund der interessanten dielektrischen Eigenschaften einer gesinterten Mischung von BaO und TiO_2 wurde eine Methode zur Herstellung von BaTiO_3 -Kristallen ausgearbeitet. Ausserdem wurde die Darstellung und Bestimmung von zwei neuen, mit dem BaTiO_3 chemisch verwandten, dielektrisch jedoch völlig verschiedenen Verbindungen beschrieben.

Die Eigenschaften von BaTiO_3 -Kristallen waren Gegenstand der folgenden Untersuchungen: Es wurde der Verlauf der Dielektrizitätskonstanten, der spezifischen Wärme und der Resonanzfrequenz in Funktion der Temperatur gemessen, und es zeigte sich, dass BaTiO_3 -Kristalle ferroelektrische Eigenschaften besitzen. Das Aufspalten des Kristalls in senkrecht zueinander spontan polarisierte Domänen ist deutlich sichtbar. Der Curiepunkt liegt bei 120°C . Es treten bei 120°C , sowie bei zirka 5°C Anomalien der Dielektrizitätskonstanten und der spezifischen Wärme auf.

I. Einleitung.

Seit einigen Jahren haben die Verbindungen vom Typus $\text{Me}^{\text{II}}\text{TiO}_3$ (Me^{II} bedeutet ein Erdalkalimetall) auf Grund ihrer zum Teil aussergewöhnlichen dielektrischen Eigenschaften erhöhtes Interesse gewonnen. W. JACKSON und W. REDDISH¹⁾ berichten von einer gewaltigen Steigerung der Dielektrizitätskonstanten (DK), wenn man statt reines Titandioxyd ein gesintertes Produkt von Titandioxyd und Bariumoxyd (bzw. Strontiumoxyd) verwendet. Ausserdem wird der Wert der DK stark temperaturabhängig und zeigt bei einer bestimmten Temperatur ein scharfes Maximum. Untersucht man feste Lösungen von BaTiO_3 - SrTiO_3 , so verschiebt sich dieses Maximum linear mit der Änderung des Mischungsverhältnisses zu andern Temperaturen, wie folgende Kurve zeigt. (Fig. 1.)

J. H. VAN SANTEN und G. H. JONKER²⁾ haben die DK von gesintertem Bariumoxyd + Titandioxyd in Funktion der Temperatur gemessen und den in Fig. 2 dargestellten Verlauf festgestellt. Das Maximum der DK für BaTiO_3 liegt demnach bei zirka 120°C .

HELEN D. MEGAW³⁾ hat die Struktur von polykristallinem BaTiO_3 untersucht und ist anhand von Pulverdiagrammen zu nachstehenden Ergebnissen gekommen: BaTiO_3 kristallisiert nach dem Perowskit-typ; in den acht Ecken eines Würfels sitzen die Titanatome oktaedrisch von je sechs Sauerstoffatomen umgeben. Das Zentrum des

Würfels ist durch ein Bariumatom besetzt (Fig. 3). Bei 120° C findet eine polymorphe Umwandlung statt: Oberhalb des Umwandlungspunktes ist der Würfel ideal, die Struktur ist kubisch. Unter-

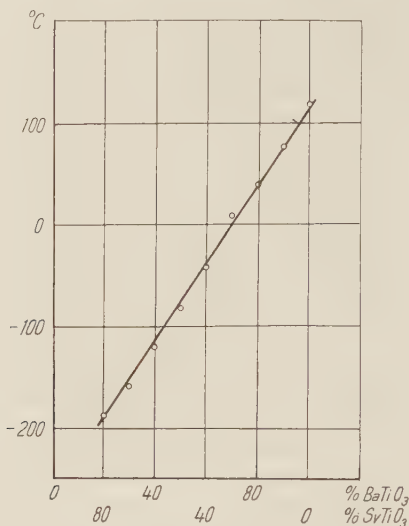


Fig. 1.

(W. JACKSON und W. REDDISH.)

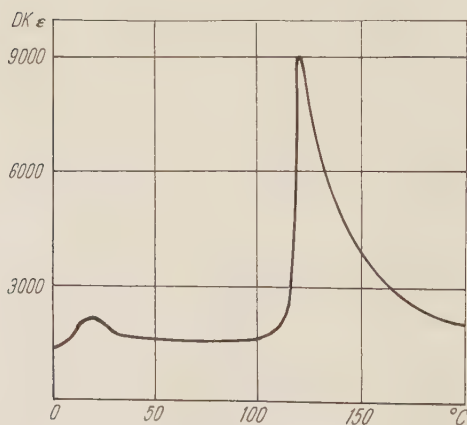


Fig. 2.

 $\epsilon_{\text{BaTiO}_3}$ in Funktion der Temperatur. (SANTEN und JONKER.)

halb 120° C wird der Würfel in einer Richtung (*c*-Richtung) ganz wenig gestreckt, die Struktur wird tetragonal (oft auch pseudokubisch genannt); die möglichen Raumgruppen sind nach MEGAW

D_{4h}^1 , C_{4v}^1 oder S_4^1 . Eine Einschränkung dieser drei Möglichkeiten wird später gegeben.

Bei zirka 5° C erreicht die Abweichung von der kubischen Struktur ihr Maximum (der Achsenabschnitt der c -Achse wird un-

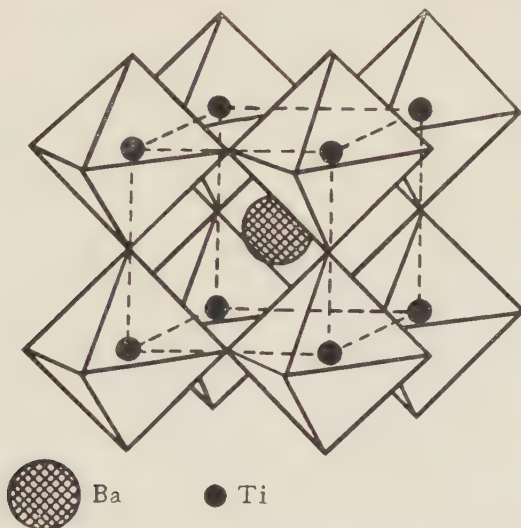


Fig. 3.

gefähr 1 Prozent grösser als derjenige der a -Achse), was in folgender Figur veranschaulicht ist, in welcher das Verhältnis der Länge der kristallographischen c -Achse zur a -Achse (c/a) in Funktion der Temperatur aufgetragen ist (Fig. 4).

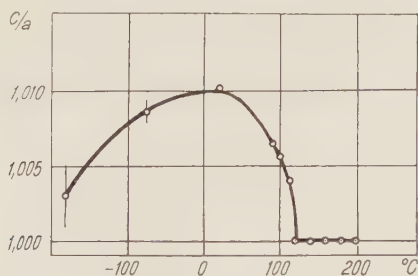


Fig. 4.

c/a in Funktion der Temperatur. (H. D. MEGAW.)

Die hohe DK und ihre Temperaturabhängigkeit, sowie auch die Feststellung von dielektrischer Hysterese an gesinterten Mischungen von Bariumoxyd und Titandioxyd lassen vermuten, dass BaTiO₃ ferroelektrisch ist mit einem Curiepunkt bei zirka 120° C (B. WUL⁴).

Um aber zu einer sicheren Aussage über die dielektrischen und piezoelektrischen Eigenschaften und deren Richtungsabhängigkeit zu gelangen, sowie auch auf die Frage, ob wirklich ein Ferroelektrikum vorliegt, Antwort geben zu können, mussten wir *Einkristalle* von BaTiO_3 herstellen⁵⁾.

II. Herstellung der Kristalle.

Trotz vieler Versuche liessen sich aus wässriger Lösung keine Kristalle von der Zusammensetzung BaTiO_3 isolieren, da das TiO_3 Ion in wässriger Lösung sehr leicht hydrolysiert, wobei sich Hydrate des TiO_2 abscheiden. Die Titanate werden im allgemeinen auf pyrochemischem Wege hergestellt und fallen dabei als polykristallines Pulver an. Um Kristalle von makroskopischem Ausmass zu erhalten, wurde versucht, das polykristalline Material aus einem lösenden Schmelzfluss auskristallieren zu lassen, ganz analog wie man zum Beispiel ein wasserlösliches Salz aus wässriger Lösung kristallisiert.

Im allgemeinen wurde folgendermassen vorgegangen: Bariumoxyd und Titandioxyd wurden im Mörtel fein zerrieben und mit einem Überschuss von der Verbindung, die den Schmelzfluss bilden sollte, versetzt. Die innige Mischung wurde sodann geschmolzen und während längerer Zeit bis zum Erstarrungspunkt abgekühlt. Durch Behandeln des kalten Schmelzkuchens mit verdünnter Säure wurden die Kristalle, die in verdünnten Mineralsäuren praktisch unlöslich sind, isoliert und von den ebenfalls ungelöst bleibenden Resten von Titandioxyd und Bariumoxyd durch Schlämmanalyse getrennt, was wegen der hohen Dichte der Kristalle leicht geht.

Es hat sich gezeigt, dass die Wahl des Schmelzflusses und des Tiegelmaterials sowie des Molverhältnisses der einzelnen Komponenten von entscheidender Bedeutung ist für das Gelingen der gewünschten Reaktion. Benützt man Platingefässe, so wird bei Verwendung eines Alkalicarbonat-Schmelzflusses und längerer Einwirkung desselben (mehrere Tage) so viel Platin gelöst und an die Stelle von Titan in den Kristall eingebaut, dass eine neue Verbindung resultiert. Es entstehen hexagonale Kristalle, die einerseits ein vom pseudokubischen BaTiO_3 völlig verschiedenes dielektrisches Verhalten aufweisen, deren Struktur aber andererseits sehr nahe verwandt ist mit derjenigen von BaTiO_3 .

Führt man die Reaktion mit einem starken Überschuss von Bariumoxyd gegenüber Titandioxyd in einem Platintiegel durch, so wird ebenfalls kein BaTiO_3 gebildet. Es entstehen orthorhombische Kristalle, deren Herstellung und Bestimmung zusammen mit der hexagonalen Verbindung noch näher beschrieben werden.

a) Soda-Pottascheschmelzfluss.

16 g Bariumoxyd, 7,5 g Titandioxyd, 100 g Natriumcarbonat, 100 g Kaliumcarbonat wurden in einem Platintiegel erhitzt und die Schmelze während 14 Tagen von 940°C bis zum Erstarrungspunkt kontinuierlich abgekühlt. Es wurde ein Gemisch von Natrium- und Kaliumcarbonat gewählt, um den Schmelzpunkt der reinen Komponenten zu erniedrigen und dadurch ein grösseres Temperaturintervall für die Kristallisation aus der flüssigen Phase zu erhalten.

Der erkaltete Tiegelinhalt wurde mit verdünnter Salzsäure versetzt, wobei Soda und Pottasche in Lösung gingen und am Boden und Rand des Plattingefässes schwarze, glänzende Kristalle bis zu

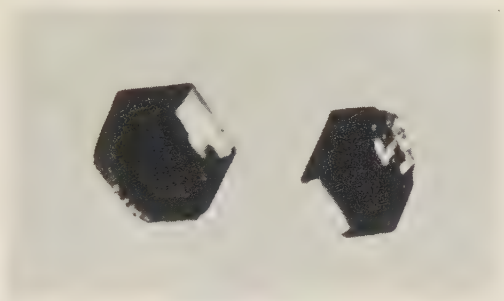


Fig. 5.

drei Millimeter Grösse von typisch hexagonalem Habitus zurückblieben (Fig. 5).

Es war offensichtlich, dass die Kristalle nicht mit dem pseudokubischen BaTiO_3 identisch waren. Wir vermuteten zuerst, es könnte sich um eine mit BaTiO_3 polymorphe Verbindung handeln. Die quantitative chemische Analyse (die Methode wird am Schluss dieses Kapitels ausführlich beschrieben) ergab jedoch, dass die Kristalle aus

$$\begin{aligned} &51,2 \pm 0,3\% \text{ Ba} \\ &13,2 \pm 0,5\% \text{ Ti} \\ &17,5 \pm 0,5\% \text{ Pt} \\ &\text{Rest Sauerstoff} \end{aligned}$$

bestanden (die Angaben sind in Gewichtsprozenten gemacht), was der Formel $\text{Ba}_6\text{Ti}_{4,5}\text{Pt}_{1,5}\text{O}_{18}$ entspricht, die auch folgendermassen geschrieben werden kann, um die Verwandtschaft mit dem tetragonalen BaTiO_3 zu illustrieren: $\text{Ba}(\text{Ti}_{\frac{3}{4}}, \text{Pt}_{\frac{1}{4}})\text{O}_3$. Das heisst, dass das Platin das Titan im Kristallgitter ersetzt. Das Zentrum von einem

Viertel von allen TiO_6 Oktaedern ist mit Platin statt mit Titan besetzt. Die röntgenographische Strukturbestimmung ergab völlige Übereinstimmung mit den hier angegebenen Tatsachen. Die Raumgruppe dieser hexagonalen Kristalle ist D_{6h}^4 ⁶⁾.

b) Bariumchlorid-Schmelzfluss.

BOURGEIS⁷⁾ schmolz Bariumchlorid, Bariumcarbonat und Titandioxyd bei Rotglut und konnte in dem erhaltenen Produkt unter dem Mikroskop honiggelbe Kriställchen von würfelförmiger und oktaedrischer Form identifizieren, deren Dichte er zu $5,91 \text{ g cm}^{-3}$ bestimmte und für deren Zusammensetzung er die Formel $\text{Ba}_2\text{Ti}_3\text{O}_8$ angab.

Wir untersuchten diese Reaktion eingehender und stellten fest, dass beim Zufügen von Titandioxyd zu geschmolzenem Bariumchlorid (zirka 1000°C), dem etwas Bariumcarbonat zugegeben wurde, sich das Titandioxyd augenblicklich unter Gasabgabe (CO_2) löst, dass andererseits aber bei Abwesenheit von Bariumcarbonat keine merkliche Lösung des Titandioxyd im Bariumchlorid auftritt. Es spielt sich dabei über verschiedene Zwischenstufen folgender Endvorgang ab:



Das Bariumchlorid dient als Lösungsmittel- und Flussmittel.

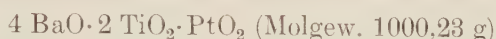
Auf Grund dieser Ergebnisse wurde folgender Versuch angesetzt: 50 g entwässertes Bariumchlorid, 30 g Bariumcarbonat und 6 g Titandioxyd (das Molverhältnis BaCO_3 zu TiO_2 ist ungefähr 2:1) wurden in einem Platintiegel auf 1110°C erhitzt und während der Dauer von fünf Tagen allmählich auf Zimmertemperatur abgekühlt. Die erkaltete Schmelze wurde während einigen Stunden mit heisser verdünnter Salpetersäure behandelt und die Kristalle wie früher beschrieben abgetrennt. Es entstanden bis vier Millimeter lange und zwei Millimeter breite braune Plättchen von orthorhombischer Symmetrie (Fig. 6).

Die Raumgruppe wurde zu D_{2h}^{18} bestimmt⁶⁾. Die DK war relativ klein; es handelte sich um eine neue Verbindung, weder identisch mit dem von BOURGEIS beschriebenen $\text{Ba}_2\text{Ti}_3\text{O}_8$, noch mit dem von uns gewünschten pseudokubischen BaTiO_3 . Die Zusammensetzung dieser orthorhombischen Kristalle war folgende:

$54,7 \pm 0,3\% \text{ Ba}$; $9,5$ bis $9,9\% \text{ Ti}$;

$19,5 \pm 0,5\% \text{ Pt}$; Rest Sauerstoff, Spuren Chlor.

Berechnet man daraus das Molverhältnis der einzelnen Komponenten, so erhält man die Formel $\text{Ba}_4\text{Ti}_2\text{PtO}_{10}$, oder anders geschrieben:



Im Gegensatz zum hexagonalen $\text{Ba}(\text{Ti}_{\frac{1}{3}}, \text{Pt}_{\frac{1}{3}})\text{O}_3$, in dem ein Teil des Titan im TiO_6 -Oktaeder durch Platin statistisch ersetzt ist, wobei die Anzahl der substituierten Titanatome zwischen bestimmten Grenzen variieren kann, ist die orthorhombische Verbindung an

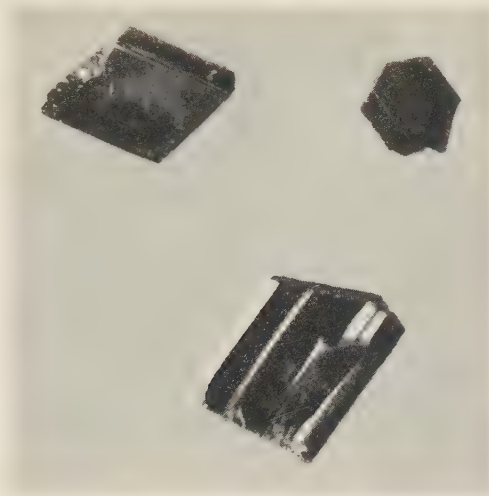


Fig. 6.

den vorgeschriebenen Platingehalt gebunden und entsteht nur bei der oben beschriebenen Zusammensetzung der Schmelze. Das Platin sitzt immer im mittleren Sauerstoffoktaeder, welches mit je zwei TiO_6 -Oktaedern als Nachbarn Flächenberührung hat⁶⁾.

c) Herstellung von tetragonalen BaTiO_3 -Kristallen.

Apparatur.

Die Durchführung der Reaktion erfolgte in einem Ofen von 9,1 cm innerem Durchmesser und 21 cm Höhe. Als Heizelemente dienten Spiralen von Kanthal-A-Draht (1,7 mm Durchmesser). Die Anordnung der Heizspiralen gestattete eine direkte Wärmeabstrahlung auf das Schmelzgut. Der Ofenboden trug ebenfalls eine Heizwicklung und war von einer 0,5 cm grossen Öffnung durchsetzt, durch die ein Schutzgas eingeleitet werden konnte. Der Gesamtwiderstand

der Heizwicklung betrug 21,4 Ohm; bei einer Belastung von 0,7 kW wurde eine Endtemperatur von 1220° C erreicht. Die Temperaturmessung erfolgte mit einem Platin-Platin-Rhodium-Thermoelement.

Um noch höhere Temperaturen zu erreichen (bis 1300° C) stand ein Silitstabofen von 4 kW Anschlusswert zur Verfügung.

Verfahren.

Entwässertes Bariumchlorid, Bariumcarbonat und Titandioxyd wurden im Molverhältnis 3,3:1,4:1 in einem aus reinstem Sinterkorund bestehenden Tiegel auf zirka 1250° C erhitzt und langsam abgekühlt. Steigert man die Temperatur auf 1300° C und kühlt während kürzerer Zeit (12 Stunden) ab, so werden die Kristalle grösser aber stark verwachsen. Die schönsten Kristallformen ent-

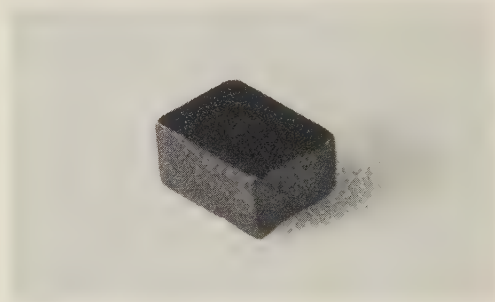


Fig. 7.

stehen bei langsamer Abkühlung. Aus der erstarrten Schmelze können nach der in einem früheren Abschnitt beschriebenen Methode (Seite 38 und 40) gut ausgebildete, durchscheinende Platten, Würfel und Kubooktaeder von mehreren Millimetern Kantenlänge isoliert werden. Sie besitzen ein ausserordentlich hohes Lichtbrechungsvermögen (n zirka 2,4) und sind von schwach gelber Färbung, die wahrscheinlich von Spuren von Eisen herrührt, wie Funkenspektren zeigen. Bei längerem Aufbewahren oberhalb 150° C hellt die Farbe deutlich auf. In reinstem Zustand sind die Kristalle farblos. Die chemische Analyse ergibt die folgende Zusammensetzung dieser Kristalle:

$$\begin{aligned} 58,9 \pm 0,2\% \text{ Ba} \\ 20,6 \pm 0,2\% \text{ Ti} \end{aligned}$$

Das entspricht genau der Formel BaTiO_3 (theoretisch 59,0% Ba und 20,6% Ti). Die Struktur ist bei Zimmertemperatur tetragonal, oberhalb 120° C wird sie kubisch.

Führt man die Reaktion in einem Platintiegel durch, so wird die Färbung der Kristalle dunkler (dunkelrot bis schwarz, je nach Reaktionsdauer, Figur 7 zeigt einen solchen Bariumtitanatkristall). Da Bariumcarbonat bei so hohen Temperaturen und bei Anwesenheit von Sauerstoff Plattingefäße stark angreift, wird Platin an die Stelle von Titan in das Gitter eingebaut. Der Prozentgehalt des eingelagerten Platin ist jedoch zufolge des geringen Bariumcarbonatüberschusses so klein, dass die im vorigen Abschnitt beschriebenen orthorhombischen Kristalle nicht entstehen können; die Kristalle bleiben tetragonal und zeigen das dem BaTiO_3 charakteristische dielek-

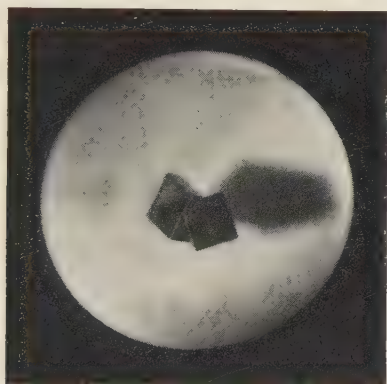


Fig. 8.

trische Verhalten, wobei einzig der Curiepunkt und damit auch das Maximum der DK bei einer tieferen Temperatur als 120°C auftritt⁵⁾.

Bei Verwendung eines Graphittiegels in Stickstoffatmosphäre als Reaktionsgefäß werden farblose, hier und da schwach blaue, dünne Plättchen von BaTiO_3 erhalten, die sich sehr gut zur Untersuchung mit dem Polarisationsmikroskop eignen.

Wachstumsformen.

Am häufigsten sind die Kristalle als quadratische oder langgestreckte Plättchen ausgebildet, oft sind sie aber auch von würfelförmiger Form, währenddem die tetragonale Pyramidenfläche seltener entwickelt ist. Da bei jeder Schmelze immer sehr viele Kristallkeime entstehen, ist es nicht verwunderlich, dass häufig Parallelverwachsung und Zwillingsbildung eintritt. Fig. 8 zeigt eine oft auftretende Art der Zwillingsbildung von zwei Bariumtitanatkristallen.

d) *Quantitative Analyse.*

Die pulverisierten Kristalle (100 mg) wurden durch Behandeln mit 50 ccm heisser konzentrierter Salzsäure vollständig gelöst und mit 400 ccm kaltem Wasser verdünnt, wobei das ausgefallene Bariumchlorid wiederum in Lösung ging.

Platinbestimmung.

Bei 70° C wurde Schwefelwasserstoff bis zur Sättigung eingeleitet und das ausgefällte Platinsulfid durch ein Papierfilter filtriert. Nach dem Waschen des Niederschlages wurde derselbe bei 600° C zum Metall verglüht und als solches gewogen⁸⁾.

Titanbestimmung.

Die Bestimmung des Titan erfolgte titrimetrisch⁹⁾. Um zu prüfen, ob diese Methode für den vorliegenden Fall geeignet sei, wurde die Titanbestimmung mit einer bekannten Menge Titan vorgenommen.

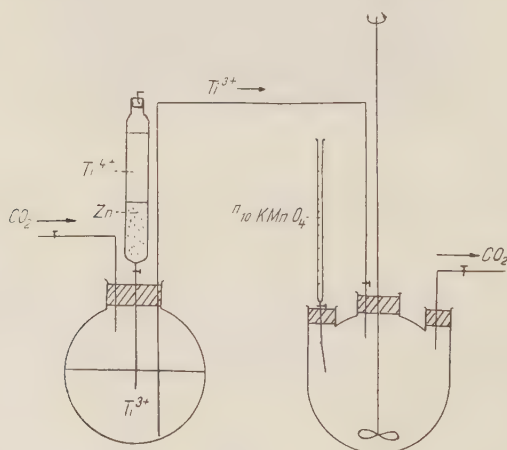


Fig. 9.

Dazu brauchte man eine genau eingestellte Titanlösung, die folgendermassen hergestellt wurde¹⁰⁾: 0.6003 g mehrmals umkristallisiertes und schwach geglühtes K_2TiF_6 wurde in einem Platintiegel wiederholt mit konzentrierter Schwefelsäure nach Zusatz von wenig Wasser abgeraucht, der Trockenrückstand in wenig konzentrierter Schwefelsäure gelöst und mit 5%iger kalter Schwefelsäure auf 100 ccm verdünnt. 1 ccm dieser Lösung enthielt 2 mg TiO_2 .

Durchführung:

Die Ti^{4+} -Lösung wurde durch einen mit Zink gefüllten Reduktor tropfen gelassen, so dass quantitative Reduktion von Ti^{4+} zu Ti^{3+} eintrat. Die violette Ti^{3+} -Lösung wurde mit Kohlendruck in das Titrationsgefäß gepresst, und nachdem der Reduktor mit ausgekochtem Wasser gut nachgewaschen und die Waschflüssigkeit mit der Ti^{3+} -Lösung vereinigt war, mit 0.1 normaler Kaliumpermanganatlösung titriert. Zur Vermeidung der Oxydation der dreiwertigen Titanionen durch Luftsauerstoff, wurde die Reduktion und anschließende Titration in Kohlendioxidatmosphäre durchgeführt. (Die Versuchsanordnung ist in Fig. 9 schematisch dargestellt.)

Bariumbestimmung.

Das Barium wurde aus der siedenden salzsauren Lösung tropfenweise mit 0.2 normaler Schwefelsäure gefällt. Nach dem Erkalten wurde das ausgefallene Bariumsulfat durch einen Goochtiegel filtriert, getrocknet und gewogen.

III. Messergebnisse an BaTiO_3 -Einkristallen.*a) Dielektrizitätskonstante.*

Die für die Kapazitätsmessungen verwendete elektrische Anordnung, sowie der Aufbau und die Temperaturstabilisation des Thermostates sind bereits früher ausführlich beschrieben worden¹¹⁾. Die Frequenz der zur Messung notwendigen Wechselspannung betrug 2000 Hertz, die Feldstärke am Kristall wurde sehr klein gewählt, um von der im Curiegebiet herrschenden dielektrischen Hysterese weitgehend unabhängig zu sein. Durchführung der Messung:

Auf zwei gegenüberliegende Flächen eines Bariumtitanatkristalles wurden im Vakuum Silberelektroden aufgedampft und die Kapazität des Kristalls in einem Messtopf, der für die gleichzeitige Messung mehrerer Kristalle eingerichtet war¹²⁾, in Funktion der Temperatur bestimmt. Aus der Kapazität C wurde die DK nach der Beziehung $\epsilon = C \cdot 4 \pi \cdot d \cdot F$ berechnet, wobei d die Dicke des Kristalls und F die Grösse seiner versilberten Oberfläche bedeuten. Man findet immer ausser der markanten Spitze bei 120°C ein kleineres Maximum bei 8°C und einen Abfall der DK bei -70°C (Fig. 10). Die Messungen wurden an vielen BaTiO_3 -Kristallen durchgeführt und speziell die Richtungsabhängigkeit der DK studiert. Es zeigte sich dabei folgendes:

1. Eine typische Richtungsabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten kann nicht beobachtet werden, und zwar deshalb nicht, weil.

wie später genauer beschrieben wird, bei tieferen Temperaturen als 120°C , das heisst im Curiegebiet, der Kristall aus vielen kleinen Bereichen besteht (sog. Domänen), in denen die c -Achsen alle drei senkrecht aufeinander stehenden Richtungen der kristallographischen Hauptachsen einnehmen können, wodurch ein makroskopischer Kristall entsteht, in dem keine Richtung sich deutlich von der dazu senkrechten unterscheidet. Man misst deshalb immer einen Mittelwert von ϵ_a und ϵ_c , womit auch die Schwankungen der Absolutwerte von ϵ , die bei DK-Messungen an verschiedenen Kristallindividuen mit Domänenstruktur auftreten, erklärt werden können. Ebenso wird dadurch die relativ gute Übereinstimmung dieser

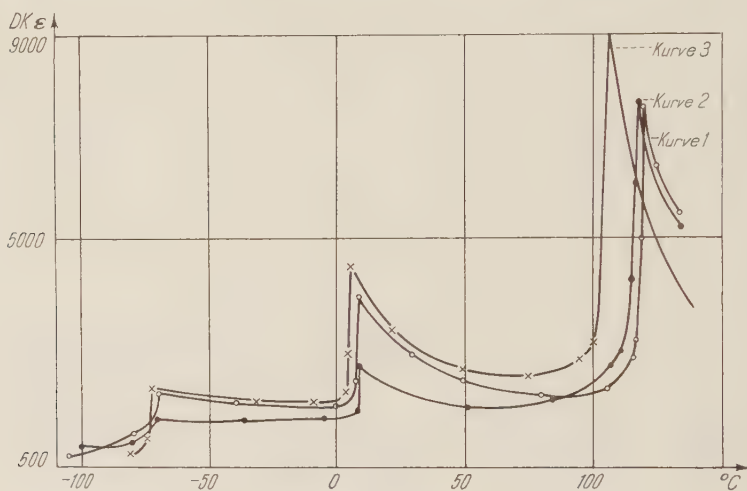


Fig. 10.

Kurven mit den an gesintertem Material gemessenen verständlich. (Vergleiche Fig. 10 mit Fig. 2. In Fig. 10 sind drei Messungen, die an drei verschiedenen BaTiO_3 -Kristallen durchgeführt wurden, aufgezeichnet; und zwar gelten die Kurven 1 und 2 für reine Kristalle, während Kurve 3 die Temperaturabhängigkeit der DK für einen Bariumtitanatkristall, der 0,8% Platin eingelagert enthält, darstellt.)

Messungen an Eindomänen Kristallen hingegen zeigen, dass die DK in der c -Richtung sehr viel kleiner ist ($\epsilon_c \sim 300$) als in der a -Richtung.

2. Je reiner die Kristalle, desto höher die Temperatur, bei der die DK-Spitzen auftreten. Es fällt dabei auf, dass die Temperatur bei der das Hauptmaximum der DK auftritt, durch Verunreinigungen

im Kristall viel stärker beeinflusst wird, als diejenige der zwei kleineren DK-Spitzen. Für Kristalle, die 0,8% Platin enthalten, liegen sie bei 107° C. bzw. 7° C. für die reinsten Kristalle, die in einem Aluminiumoxydtiegel hergestellt wurden, bei 120° C. bzw. 9° C.

b) Resonanzfrequenz.

Bariumtitanatkristalle lassen sich, wie wir früher schon bemerkt haben⁵⁾ piezoelektrisch zu Eigenschwingungen anregen. Infolge dieser Tatsache fällt die von MEGAW angegebene Möglichkeit weg, dass BaTiO₃ in der Raumgruppe D_{4h} , die ja keine polare Achse aufweist, kristallisiert. Berücksichtigt man ferner, dass gemäss Beobachtungen, die an polykristallinem Bariumtitanat gemacht wurden¹³⁾ der Piezomodul d_{33} von Null verschieden ist, so kann BaTiO₃ eindeutig der Raumgruppe C_{4v} zugeordnet werden, da in der Raumgruppe S_4 d_{33} Null werden müsste¹⁴⁾.

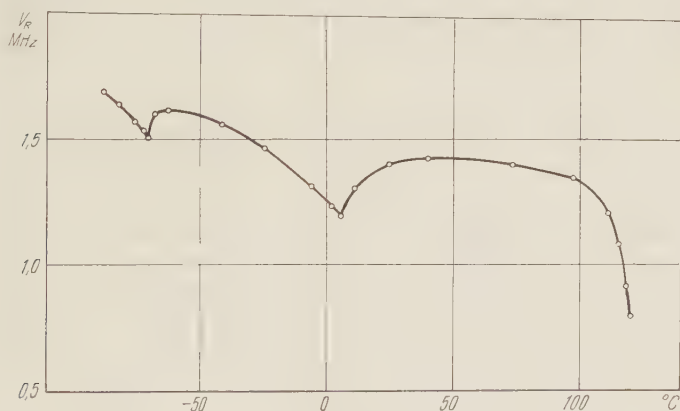


Fig. 11.

Der Verlauf der Resonanzfrequenz in Funktion der Temperatur ist in Fig. 11 dargestellt. Die Messapparatur war die übliche, bestehend aus IIF.-Generator, Breitbandverstärker und Kathodenstrahloszillograph. Die verwendeten Kristallplättchen hatten eine Grösse von zwei bis drei mm², ihre Resonanzfrequenz zeigte ein ähnliches Verhalten wie die andern Ferroelektrika (prim. Kaliumphosphat, Seignettesalz): Bei den Temperaturen der DK-Maxima durchläuft die Resonanzfrequenz scharfe Minima; beim Curiepunkt (120° C) ist ein starker Abfall der Frequenz messbar, dann aber hört der Kristall, infolge der Umwandlung in die kubische, nicht piezoelektrische Modifikation (Kristallklasse O_h) zu schwingen auf.

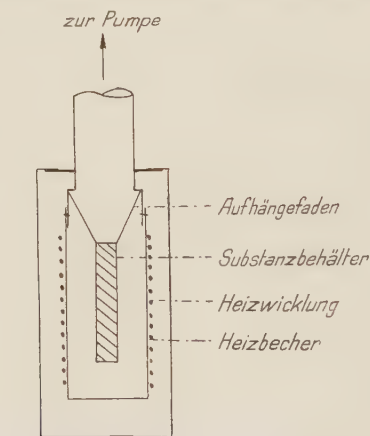
Bei der Messung der Resonanzfrequenz kann folgende interessante Feststellung gemacht werden: Ändert man die Temperatur des

Kristalls und misst dauernd die Frequenz, bei der die stärkste Resonanz eintritt, so kann oft eine Abnahme, hier und da ein völliges Verschwinden dieser Resonanz beobachtet werden; dafür tritt bei einer andern Frequenz eine neue Schwingung, welche vorher nur schwach sichtbar war, stark hervor. Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, dass der Kristall meistens aus vielen, senkrecht zueinander polarisierten Bezirken besteht (Domänenstruktur). Durch plötzliches Umklappen ganzer Bereiche verändern sich die Eigenfrequenzen des Kristallplättchens. Das bewirkt, dass die Resonanz plötzlich bei einer ganz andern Frequenz auf dem Kathodenstrahloszillographen sichtbar wird.

c) Spezifische Wärme.

1. Prinzip.

In einem Vakuumkalorimeter, wie es von BANTLE¹⁵⁾ und BAERTSCH¹⁶⁾ verwendet wurde (siehe Fig. 12), wird durch Wärmestrahlung der Substanz so viel Wärme zugeführt, dass die *Temperaturdifferenz*



Vakuumkalorimeter

Fig. 12.

zwischen dem kupfernen Heizbecher und dem zu messenden Kristallpulver immer konstant bleibt. Es fließt deshalb, bei gleichbleibenden äussern Bedingungen (gleiche Geometrie der Anordnung, gleichbleibender Druck) dauernd die gleiche Wärmemenge pro Zeiteinheit auf die Substanz über. Man misst die zeitliche Erwärmung des Kristallpulvers, und in einer weiteren Messung diejenige einer Eichsubstanz, in unserem Falle Elektrolytkupfer. Aus diesen beiden Messungen lässt sich die spezifische Wärme des Kristallpulvers berechnen.

2. Durchführung.

Der mit 45 Gramm pulverisierten Bariumtitanatkristallen gefüllte Substanzbehälter wurde im Messingtopf isoliert aufgehängt; das Kalorimeter wurde mit einer Quecksilberdiffusionspumpe evakuiert und in ein elektrisch heizbares Ölbad, dessen Temperatur mit einem Kontaktthermometer auf 1.5° genau eingestellt werden konnte, gebracht. Zwischen Substanzbehälter und Heizbecher befand sich ein doppeltes Kupfer-Konstantan-Thermoelement (0,1 mm Drahtdurchmesser), dessen Thermospannung mit einem Kompensationsapparat auf 0,6 mV, entsprechend 7.5°C , eingestellt und mit Hilfe einer Toulonschaltung¹⁵⁾, die den Heizstrom steuerte, auf 0,1% konstant gehalten wurde. Nun erwärmte sich das Kristallpulver dauernd. Seine Temperatur wurde mit einem weiteren Kupfer-Konstantan-Thermoelement, dessen eine Lötstelle sich am Substanzbehälter, die andere in Eis befand, durch Kompensation mit einer zweiten Kompensationsanordnung festgestellt. Als Nullinstrument diente ein Galvanometer (Stromempfindlichkeit $5 \cdot 10^{-9} \text{ A mm}$) mit vier Meter langem Lichtzeiger. Die Messung ging so vor sich, dass mit einer Stoppuhr die Zeit Δt , die nötig war, um eine Thermospannungsänderung von 0,02 mV zu durchlaufen, fortwährend gemessen wurde. Man erhielt dabei $\Delta t_{\text{BaTiO}_3}$ in Funktion der Temperatur. Ersetzt man das Kristallpulver durch Elektrolytkupfer und bestimmt unter genau gleichen Bedingungen die zum Durchlaufen von 0,02 mV Thermospannung benötigte Zeit Δt_{Cu} in Funktion der Temperatur, so kann aus den beiden Funktionen $\Delta t_{\text{BaTiO}_3} = f(T)$ und $\Delta t_{\text{Cu}} = g(T)$, die Schwankungen innerhalb von 2 Prozent zeigten, für eine bestimmte Temperatur T die spezifische Wärme c der Substanz folgendermassen berechnet werden:

$$c_{\text{BaTiO}_3} = c_{\text{Cu}} \left(a \cdot \frac{\Delta t_{\text{BaTiO}_3}}{\Delta t_{\text{Cu}}} - b \right) \quad (1)$$

wobei $a = (m_{\text{Cu}} + m_{\text{B}})/m_{\text{BaTiO}_3} = 2,0045$

und $b = m_{\text{B}}/m_{\text{BaTiO}_3} = 0,4849$

c_{BaTiO_3} = spez. Wärme des Kristallpulvers

c_{Cu} = spez. Wärme von Kupfer

m_{BaTiO_3} = Masse des Kristallpulvers

m_{Cu} = Masse des Kupfers

m_{B} = Masse des kupfernen Substanzbehälters.

Die Temperaturabhängigkeit von c_{Cu} wurde den Landolt-Börnstein-Tabellen entnommen.

3. Messresultate.

Die nach Gleichung (1) berechneten c_p -Werte für (mindestens 99% reine) BaTiO_3 -Kristalle sind in den Figuren 13 und 14 als Funktion der Temperatur dargestellt¹⁷⁾. Man sieht daraus deutlich, dass zwei Anomalien der spezifischen Wärme auftreten, die offensichtlich mit den beiden DK-Maxima zusammenfallen. Bildet man



Fig. 13.

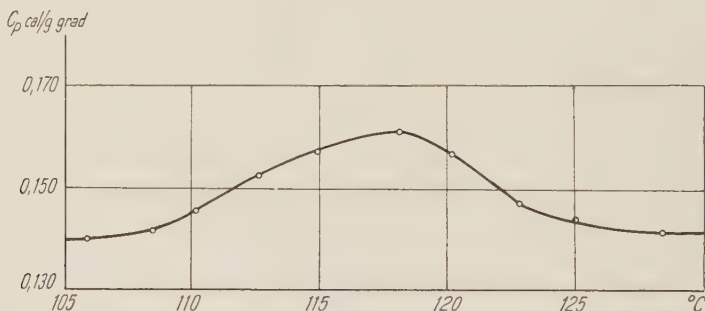


Fig. 14.

das Integral für die beiden Fälle (das zwar für die bei 5° C auftretende Wärmeanomalie nicht sehr genau bestimmt werden kann), so erhält man für die Wärmemengen Q_1 und Q_2 folgende Werte:

$$Q_1 = \int_{-1^\circ}^{9^\circ} c_p dT \sim 0,07 \text{ cal/g} \sim 16 \text{ cal/Mol}$$

und

$$Q_2 = \int_{107,5^\circ}^{128^\circ} c_p dT \sim 0,2 \text{ cal/g} \sim 47 \text{ cal/Mol}.$$

Der Wert von Q_2 , sowie der Absolutwert der spezifischen Wärme ist grösser als der von HARWOOD¹⁸⁾ an gesintertem Bariumtitanat gefundene.

4. Diskussion.

a) Der Wärmeverbrauch bei 120° C.

Die Anomalie der spezifischen Wärme bei 120° C ist bedingt durch das Verschwinden der spontanen Polarisation des Kristalls beim Curiepunkt (120° C).

Wir haben uns im Ferroelektrikum die Existenz eines inneren Feldes vorzustellen, das heisst an der Stelle eines Dipols herrscht die elektrische Feldstärke

$$F = E + f \cdot P \quad (2)$$

(F = innere Feldstärke; E = Feldstärke im Dielektrikum; f = Lorentzfaktor; P = Polarisation.) Der Lorentzfaktor f hängt von der Kristallstruktur und von der gegenseitigen Lage der Dipole im Gitter ab.

Mit Hilfe der gemessenen Anomalie der spezifischen Wärme lässt sich nun unter Hinzunahme des gemessenen Sättigungswertes der spontanen Polarisation der Lorentzfaktor f aus dem folgenden thermodynamischen Zusammenhang zwischen Q und P bestimmen¹⁹⁾:

$$Q = \frac{1}{2} f \cdot P^2. \quad *) \quad (3)$$

Der Lorentzfaktor f des inneren Feldes lässt sich andererseits auch aus dem Curie-Weiss'schen Gesetz der Dielektrizitätskonstanten bestimmen gemäss¹⁹⁾:

$$\frac{\epsilon - 1}{4\pi} = \frac{C}{T - \Theta} \quad (4)$$

und

$$f = \frac{\Theta}{C} \quad (5)$$

wobei C die Curiekonstante und Θ die Curietemperatur bedeutet.

Berechnung des Lorentzfaktors.

Nach Gleichung (3) findet man für den Lorentzfaktor f , bei Verwendung der von uns gemessenen Wärmeanomalie $Q_2 = 47$ cal/Mol und dem von HULM²⁰⁾ gefundenen Wert der Sättigungspolarisation von $16 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm²

$$f = 0,045$$

*) Die Wechselwirkung zwischen Untergrund und den Dipolen, die sehr wesentlich werden kann, ist in dieser einfachen Formel vernachlässigt.

Gleichung (5) ergibt, bei Verwendung der von SANTEN und JONKER²⁾ gefundenen Curiekonstanten $C = 8000^\circ$ und $\Theta = 393^\circ$ für f

$$f = 0,05$$

Die Übereinstimmung der beiden Werte ist gut.

Wenn wir alle Werte, die zur Berechnung von f nach den Gleichungen (3), (4) und (5) benötigt werden aus unseren Messungen nehmen, und zwar $P = 12 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm², $C = 4000 - 6000^\circ$, $Q = 47$ cal/Mol und $\Theta = 393^\circ$, so erhalten wir für f :

$$\begin{array}{ll} f = 0,08 & \text{aus (3) berechnet} \\ \text{und } f = 0,06 - 0,09 & \text{aus (4) und (5) berechnet.} \end{array}$$

Führt man zum Vergleich dieselben Berechnungen des Lorentzfaktors nach den Gleichungen (3), bzw. (4) und (5) für die andern Ferroelektrika durch, so erhält man die in folgender Tabelle zusammengestellten Resultate:

Substanz	f nach (3)	f nach (4) und (5)	Literatur
BaTiO ₃	0,045	0,05	2) 20)
	0,08	0,06-0,09	
Seignettesalz	2,1	2,3	21) 22) 23)
KH ₂ PO ₄	0,37	0,48	11) 15)
KD ₂ PO ₄	0,68	0,80	15)

Es ist bemerkenswert, dass die Übereinstimmung der Lorentzfaktoren berechnet aus den Gleichungen (3), bzw. (4) und (5) bei allen bis jetzt bekannten Ferroelektrika gut ist, obwohl die Absolutwerte von f stark verschieden sind.

b) Der Wärmeverbrauch bei 5° C.

Das Temperaturgebiet von 2° bis 10° C ist für Bariumtitanatkristalle dadurch ausgezeichnet, dass die DK ein scharf ausgeprägtes Maximum durchläuft und dass an dieser Stelle das kristallographische Achsenverhältnis c/a maximal wird³⁾. Zudem tritt hier ein anomaler Wärmeverbrauch Q_1 von 16 cal/Mol auf, der weder durch die DK-Spitze, noch durch die grösste Ausdehnung der tetragonalen Elementarzelle in der c -Richtung ($c/a = 1,010$) erklärt wird. Analog wie das Verschwinden der Polarisation am Curiepunkt den Wärmebetrag Q_2 verbraucht, ist auch Q_1 mit einer Änderung der Sättigungspolarisation im Temperaturgebiet von 5 bis 10° C verknüpft.

Die prozentuale Polarisationsänderung, welche der Wärmeanomalie Q_1 entspricht, lässt sich unter der Annahme des gleichen Lorentz-faktors f folgendermassen berechnen:

$$Q_1 = \frac{1}{2} f (P_{s1}^2 - P_{s2}^2)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} f (P_{s2}^2 - P_{s3}^2)$$

P_{s1} = Spontane Polarisation vor der Umwandlung (ca. 0° C)

P_{s2} = Spontane Polarisation nach der Umwandlung (ca. 10° C)

P_{s3} = Spontane Polarisation oberhalb 120° C = Null.

$$Q_2/Q_1 = P_{s2}^2 / (P_{s1}^2 - P_{s2}^2) = 2,94$$

$$\underline{P_{s1} = 1,16 \cdot P_{s2} .}$$

Nach diesen Überlegungen sollte die Sättigungspolarisation an der Stelle, wo die Wärmeanomalie Q_1 auftritt, eine Änderung von zirka 16 Prozent erfahren. Diese Änderung konnte tatsächlich mit Hilfe von Hysteresisaufnahmen bestätigt werden.

d) Dielektrische Hysteresese.

Für die ferroelektrischen Substanzen ist charakteristisch, dass der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Polarisation nur für kleine Feldstärken linear ist. (Deshalb wurde bei der DK-Messung nur mit

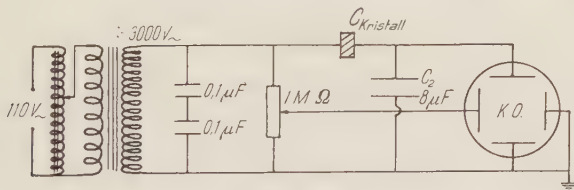


Fig. 15

sehr kleinen Spannungen gearbeitet.) Bei grossen elektrischen Feldern treten Hysteresiserscheinungen auf, die in der Anordnung von SAWYER und TOWER²⁴⁾, welche in Fig. 15 schematisch dargestellt ist, mit dem Kathodenstrahloszillographen sichtbar gemacht werden können.

Ausführung.

Auf zwei gegenüberliegenden Flächen eines BaTiO₃-Kristallplättchens werden Silberelektroden aufgedampft und der Kristall in einem Messtopf, wie er im Prinzip zur Messung der DK und Reso-

nanzfrequenz verwendet wurde, gehalten. Ein angelegtes Wechselfeld von 50 Hertz und zirka 10000 Volt/cm ergibt schöne Hysteresiskurven. Sie bleiben auch bei tiefen Temperaturen (es wurde bis -180°C gemessen) bestehen. Am obern Curiepunkt, bei 120°C verschwinden sie, analog wie das bei den übrigen Ferroelektrika der Fall ist. Ausserdem tritt aber bei zirka 5°C , wo die spezifische Wärme ein Maximum besitzt, eine deutliche Polarisationsänderung auf. In Fig. 16 sind zwei Aufnahmen der Hysteresiskurven vom gleichen Kristall, bei gleicher Feldstärke aber bei zwei verschiedenen Temperaturen (bei ca. 2°C und 8°C) gemacht worden. Deutlich sieht man die Abnahme der Polarisation, die beim Erwärmen des Kristalls



Fig. 16

über den Umwandlungspunkt entsteht. Misst man diese Polarisationsänderung aus, so findet man, dass sie zirka 15 Prozent der Gesamtpolarisation beträgt, was von dem anomalen Wärmeverbrauch von 16 cal/Mol auch gefordert wird, wie im vorhergehenden Abschnitt ausgeführt wurde.

Bei der Messung der dielektrischen Hysterese konnte folgende interessante Beobachtung gemacht werden: Direkt nach Einschalten des Wechselfeldes entstanden oft ganz unsymmetrische Bilder auf dem Kathodenstrahloszillographen, und erst nach einigen Sekunden bildete sich eine schöne Hysteresisschleife aus. Diese Erscheinung, sowie auch die Feststellungen, die bei der Messung der DK und Resonanzfrequenz und durch Röntgenuntersuchungen gemacht wurden, lässt sich durch das Auftreten einer Domänenstruktur im Kristall erklären, was im folgenden Abschnitt eingehender behandelt wird.

IV. Domänenstruktur.

Die Kristallklasse von Bariumtitanat ist unterhalb 120°C C_{4v} , die c -Achse ist die optische Achse. Untersucht man einen Kristallwürfel in allen drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen der Flächennormalen zwischen gekreuzten Nicols, so findet man aber immer gerade Auslöschung, keine Achse verhält sich optisch isotrop, wie dies für die c -Achse der Fall sein müsste. Die Verhältnisse liegen offenbar so, dass der Kristall aus vielen Bereichen besteht, in denen die optischen Achsen senkrecht zueinander orientiert sind. Schickt man nun polarisiertes Licht auf einen solchen Kristall, so trifft es immer wieder auf eine Kristallschicht, in der die optische Achse senkrecht zum einfallenden Strahl steht, das heisst, die einfallende Lichtwelle fällt senkrecht auf einen Hauptschnitt der Indikatrix. Im allgemeinen Fall tritt also Doppelbrechung und damit Aufhellung des Bildes zwischen gekreuzten Nicols auf. Verläuft die Schwingungsrichtung der Lichtwelle speziell senkrecht oder parallel zur c -Achse und damit auch zur äussern Begrenzung der Kristallfläche, so erscheint das Bild dunkel, die Auslöschung ist gerade.

Diese Inhomogenität von Bariumtitanatkristallen wird nicht durch Wachstumsstörungen beim Aufbau des Kristallgitters hervorgerufen, denn oberhalb 120°C verschwindet sie, sondern man hat sich vorzustellen, dass ein Bariumtitanatkristall unterhalb des Curiepunktes aus vielen, senkrecht zueinander elektrisch polarisierten Bezirken besteht, wobei die elektrische Polarisation die Richtung der c -Achse einnimmt. Der Kristall besitzt eine Domänenstruktur (siehe Fig. 18), analog wie das für einen Eisen-Einkristall gilt, der sich aus vielen senkrecht zueinander magnetisierten Bezirken zusammensetzt, in denen die Richtung der magnetischen Polarisation mit denen der kristallographischen Achsen übereinstimmt. Diese Domänenstruktur ist unter dem Polarisationsmikroskop sehr deutlich sichtbar. Man erkennt sie daran, dass der Kristall von einer parallelen Streifung, die entweder kantenparallel oder unter 45° zu den Kristallkanten verläuft, durchsetzt ist. (Siehe Figuren 18 bis 21). Die folgende Zeichnung soll zeigen, was diese Streifen, wir wollen sie in Zukunft auch Domänen nennen, bedeuten, wie sie entstehen und sichtbar werden (Fig. 17).

In Fig. 17 ist ein BaTiO_3 -Kristallplättchen gezeichnet, das aus drei Domänen besteht. In jeder Domäne steht die c -Achsenrichtung und damit auch die Richtung der elektrischen Polarisation P fast senkrecht zu derjenigen der Nachbardomäne. (Der genaue Winkel ist bei Zimmertemperatur $90^\circ 35'$, dem Achsenverhältnis $c/a = 1,010$ entsprechend.) Dort wo die Domänen aneinandergrenzen, werden

die Elementarzellen deformiert. Es soll aber betont werden, dass die Domänen (Streifen) aus einem einheitlich polarisierten Kristallgebiet bestehen und nicht mit den Trennlinien (in Fig. 17 schraffiert gezeichnet) von zwei aneinandergrenzenden Bereichen identisch sind.

Die Domänen stehen entweder unter 45° (wie in Fig. 17 gezeichnet), oder aber parallel zu den Kanten des Kristallplättchens. Das Auftreten der kantenparallelen Streifen ergibt sich durch das Vorhandensein von Domänen, die unter 45° zu den Kristallkanten verlaufen; denn betrachtet man Fig. 17 aus den mit den Pfeilen F

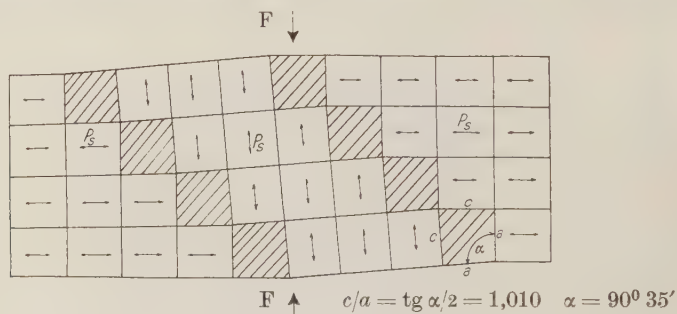


Fig. 17.

bezeichneten Richtungen, so geht die unter 45° zu den Kristallkanten verlaufende Domäne in eine kantenparallele über.

Die ausserordentliche Mannigfaltigkeit der Domänenstruktur bei verschiedenen Kristallindividuen macht es notwendig, folgende Einzelfälle, die jedoch nur Spezialfälle von dem in Fig. 17 gezeichneten BaTiO_3 -Kristall sind, zu unterscheiden.

Fall 1.

Zwei Polarisationsrichtungen sind ungefähr gleich häufig vertreten: Diese Erscheinung kann an sehr dünnen, länglichen Kristallplättchen beobachtet werden. Man hat dann folgendes Bild: Unter einem Winkel von 45° zu den Kristallkanten erstrecken sich ungefähr gleich grosse Domänen über die Kristallfläche. Betrachtet man einen solchen Kristall zwischen gekreuzten Nicols, so wird der Unterschied der Polarisationsrichtungen in aufeinanderfolgenden Domänen durch das Auftreten von zueinander komplementären Interferenzfarben in den einzelnen Bereichen sehr gut sichtbar. In 45° -Stellung sieht man zum Beispiel rote und grüne Bezirke in abwechselnder Reihenfolge. Stellt man nun den Analysator parallel zum Polarisator, so vertauschen sich die Farben. Jede Domäne besitzt

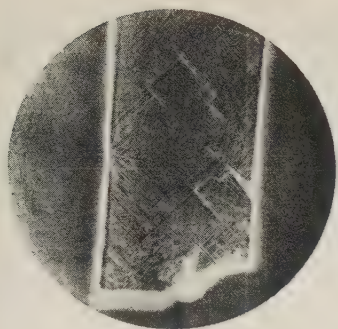


Fig. 18.

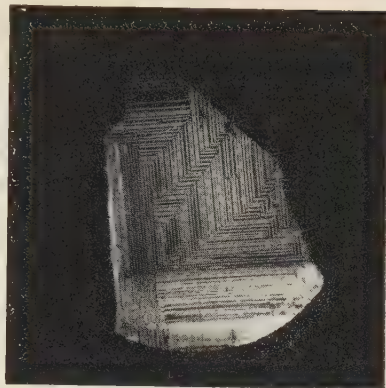


Fig. 19.

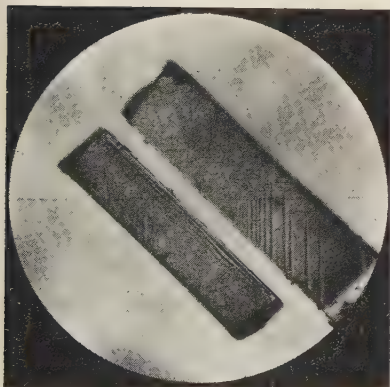


Fig. 20.

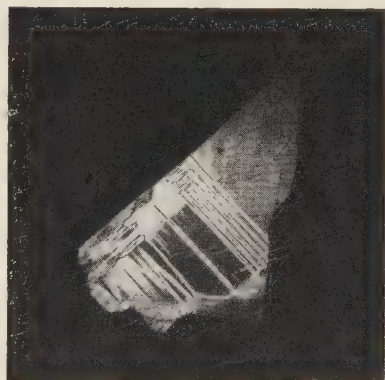


Fig. 21.

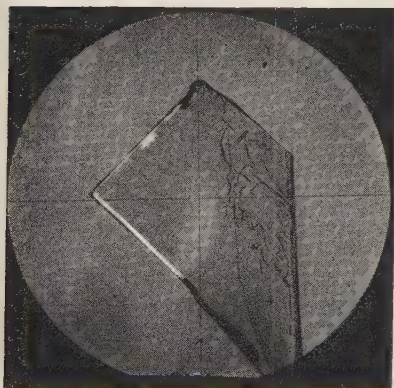


Fig. 22.

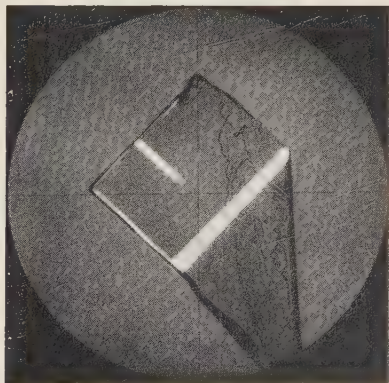


Fig. 23.

die Farbe, die die Nachbardomäne bei der früheren Stellung des Analysators hatte, was die senkrechte Orientierung der Polarisationsrichtungen in zwei angrenzenden Bezirken beweist. Da zudem die Auslöschung gerade ist, so muss die Richtung der elektrischen Polarisierung mit den Kantenrichtungen des Kristallplättchens übereinstimmen, man hat also den in Fig. 17 gezeichneten Fall vor sich.

Fall 2.

Eine Polarisationsrichtung herrscht deutlich vor: Der Kristall besteht dann aus abwechselnd schmalen und breiten Domänen. In Fig. 19 zum Beispiel sind die schmalen hellen Streifen eine Domänenart mit gleicher Polarisationsrichtung, währenddem die dunkeln Bezirke unter sich einheitlich, jedoch senkrecht zu den hellen Domänen polarisiert sind.

Fig. 20 zeigt einen BaTiO_3 -Kristall, in dem eine Polarisationsrichtung so stark vorherrscht, dass die Domänen nur noch als schmale Spitzen in das senkrecht zu ihrer Polarisationsrichtung polarisierte Gebiet hineinragen.

Fall 3.

Der ganze Kristall ist einheitlich polarisiert: Bei dünnen farblosen BaTiO_3 -Kristallplättchen kann dieser Fall eintreten, wobei die c -Achse meistens senkrecht zur Plättchenebene steht (Fig. 22). Man sieht dann bei konoskopischer Betrachtungsweise das für optisch einachsige Kristalle charakteristische Interferenzbild: die Haptisogyren bilden ein dunkles Kreuz, die Kurven gleichen Gangunterschiedes sind konzentrische Kreise. Manchmal entstehen Eindomänenkristalle, deren a -Achse senkrecht zur Plättchenebene orientiert ist.

Zwischen diesen drei Fällen sind zahlreiche Übergänge möglich. Man kann oft Kristalle mit einer solchen Fülle von verschiedenen gearteten Domänen beobachten, dass sie sich keinem der drei Fälle zuordnen lassen. Fig. 21 zum Beispiel zeigt einen Kristall, der sowohl aus Domänen, die unter 45° zu den Kristallkanten herlaufen (die feinen hellen und dunkeln Linien), als auch aus kantenparallelen Domänen besteht.

Ausserdem ist die Domänenstruktur sehr stark von den äusseren Bedingungen abhängig. Ihre Veränderung zufolge mechanischem Druck, Temperaturänderung und elektrischen Feldern ist in einer früheren Mitteilung kurz beschrieben worden²⁵⁾. Es wird im folgenden jedoch genauer darauf eingegangen.

Beeinflussung der Domänenstruktur.

a) Durch Druck und Temperatur.

Die Domänenstruktur kann durch Ausübung eines Druckes auf den Kristall oder durch Temperaturänderung weitgehend verändert werden. Drückt man auf einen Bariumtitanatkristall, so wird die Verschiebung des Streifensystems deutlich sichtbar. Der gleiche Effekt kann auch durch Erwärmen und Abkühlen des Kristalls erreicht werden. Überschreitet man aber den Curiepunkt (120° C), so verschwindet die Domänenstruktur vollkommen, der Kristall wird optisch isotrop.

Fig. 22 zeigt einen Bariumtitanatkristall in 45°-Stellung zwischen gekreuzten Nicols. (Um besser photographieren zu können wurde der Winkel zwischen Polarisator und Analysator zu zirka 88° gewählt.)

Das ganze Kristallplättchen besteht aus einer einzigen Domäne, das heisst, es ist einheitlich polarisiert, und zwar steht in diesem Falle die Polarisationsrichtung und damit auch die *c*-Achse senkrecht zur Bildebene; das Bild bleibt beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols immer dunkel (Eindomänenkristall). Berührt man die Kristalloberfläche mit einer spitzen Nadel, so klappen plötzlich einzelne Bereiche um, die Richtung der elektrischen Polarisation kommt in die Bildebene zu liegen, was durch die Doppelbrechung der neugebildeten Domäne, die gerade Auslöschung zeigt, direkt sichtbar wird. Fig. 23 zeigt denselben Kristall nach Ausübung des Druckes wiederum in 45°-Stellung.

Durch Erhitzen des Kristalls über 120° C kann der Vorgang wieder rückgängig gemacht werden. Die durch Druck entstandenen Domänen verschwinden wieder und kommen, nachdem der Kristall erneut Raumtemperatur besitzt, nicht mehr zum Vorschein. Die Richtung der elektrischen Polarisation steht wiederum einheitlich senkrecht zur Bildebene, der Kristall bleibt deshalb beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols dunkel.

Diese durch optische Untersuchungen gewonnenen Resultate wurden durch die Röntgenanalyse bestätigt und verfeinert. Durch Laue-Aufnahmen konnten die verschiedenen Richtungen der kristallographischen *c*-Achse in den einzelnen Domänen festgelegt werden, ebenso konnte der früher geforderte Winkel von 90° 35' zwischen diesen Richtungen (siehe Fig. 17) festgestellt werden.

In der folgenden Zeichnung ist der Kristall von Fig. 22 und 23 nochmals gezeichnet, um den durch Ausübung des Druckes auf den Kristall entstandenen Vorgang noch besser zu übersehen:

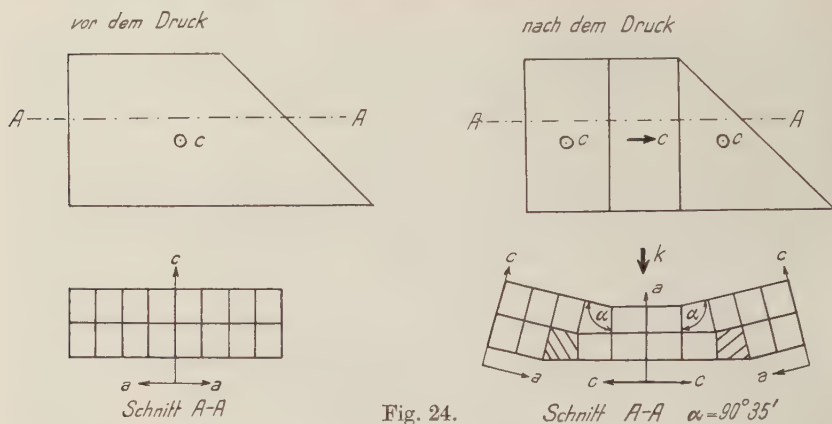


Fig. 24.

Man erkennt, dass durch den Druck K der Kristall sich gleichsam durchbiegt und in Domänen aufspaltet.

b) Durch elektrische Felder.*)

In der Bilderreihe 25 bis 31 ist das Verhalten eines Bariumtitanatkristalls in einem Gleichfeld dargestellt. Fig. 25 zeigt den Kristall vor der Einwirkung des elektrischen Feldes. Dann wurde senkrecht zu den langen Kanten ein Gleichfeld von zirka 15000 Volt/cm (Fig. 26) angelegt und auf 30000 Volt/cm gesteigert (Fig. 27). (Der Durchschlag durch den Kristall erfolgte meist bei ca. 35000 Volt/cm.) Nach dem Abschalten der Spannung zeigte sich das in Fig. 28 festgehaltene Bild. Die Figuren 29 und 30 geben das Verhalten des Kristalls bei umgekehrter Feldrichtung und einer Feldstärke von -15000 Volt/cm, bzw. -30000 Volt/cm und in Fig. 31 dasjenige bei der Feldstärke 0 Volt/cm wieder.

Auf diesen Bildern ist die Orientierung von senkrecht zur Feldstärke polarisierten Bereichen in die Feldrichtung zu sehen. Das Einstellen der Bezirke bei Anlegung eines Gleichfeldes kann auf folgende Arten vor sich gehen:

1. Betrachtet man Fig. 26, so sieht man, dass ein vorher einheitlich polarisiert scheinendes Gebiet auf der Kristallfläche plötzlich von Streifen durchsetzt wird. Diese Streifen haben die Form von schmalen Spitzen, die sich rasch in Richtung der Längsachse ausdehnen, um nachher in die Breite zu wachsen und schliesslich bei

*) H. SUTTER, Diplom-Arbeit ETH., unveröffentlicht.

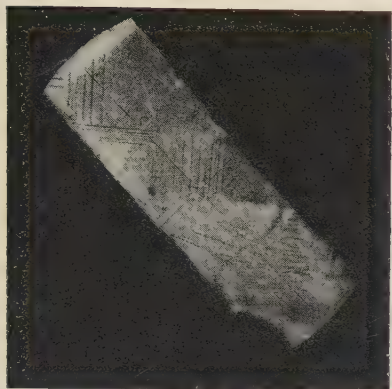


Fig. 25 0 Volt/cm.

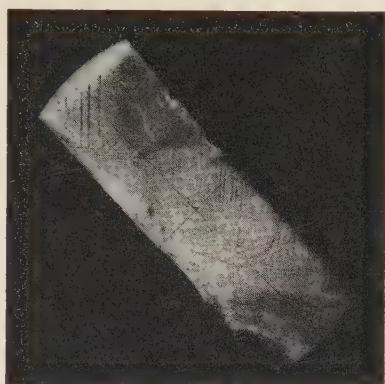


Fig. 26 15 000 Volt/cm.

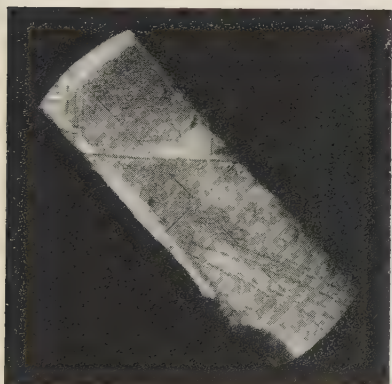


Fig. 27 30 000 Volt/cm.

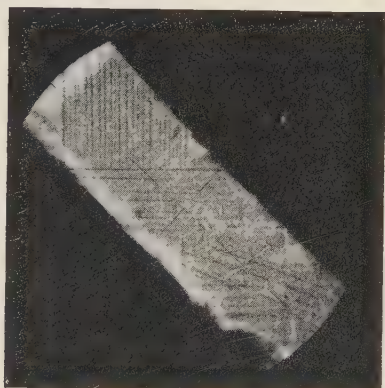


Fig. 28 0 Volt/cm.

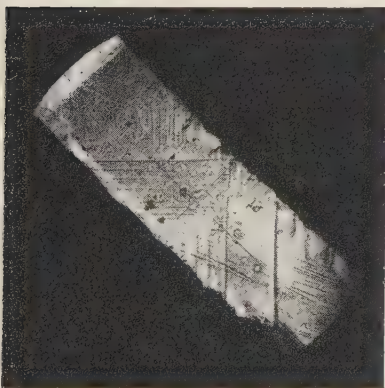


Fig. 29 -15 000 Volt/cm.

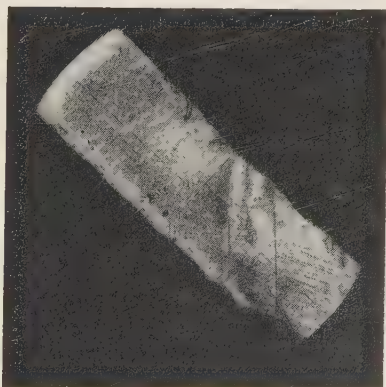


Fig. 30 30 000 Volt/cm.

sehr starken Feldern vollkommen und ohne Trennlinien ineinander überzugehen (Fig. 27). Das bedeutet, dass das ursprünglich homogene Gebiet senkrecht zur Feldrichtung polarisiert war und sich nun (unter Domänenbildung als Zwischenstadium), kontinuierlich in die Richtung der elektrischen Feldstärke einstellt.

2. Schon vorhandene Domänen verschwinden allmählich; das heisst, dass das senkrecht zur Feldrichtung polarisierte Gebiet in der Domäne umklappt, wobei die Konturen verschwinden, da die Polarisationsrichtung nun die gleiche wie die der Umgebung wird.

3. Schon vorhandene Streifen dehnen sich weiter aus; offenbar stimmt die Polarisationsrichtung im Streifen mit der Richtung der elektrischen Feldstärke überein, die Domäne wächst auf Kosten der

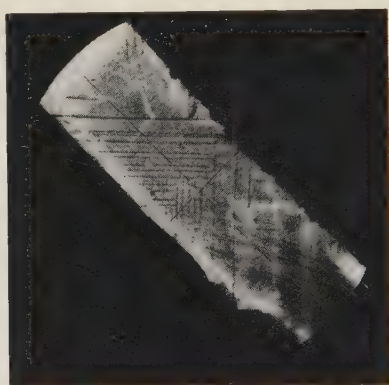


Fig. 31. 0 Volt/cm.

nun senkrecht zum Feld polarisierten Umgebung, was durch Vergrösserung der Feldstärke bis zu 30 000 Volt/cm zu einem einheitlich in der Feldrichtung polarisierten Kristall führen kann (Fig. 27 und 30). Schaltet man nun die Spannungsquelle ab, so bleibt die durch das Feld erreichte Gleichrichtung der Polarisation nicht bestehen, sondern es entstehen sofort schmale Domänen, in denen die Polarisationsrichtung senkrecht zur ursprünglich angelegten Feldrichtung steht; denn legt man 90° zum ursprünglichen Feld erneut ein Gleichfeld an, so dehnen sich die Domänen weiter aus.

Allgemein sei noch bemerkt, dass die Domänenbildung bei grossen BaTiO_3 -Kristallen viel ausgeprägter auftritt und durch Fehlordnung und Verunreinigungen im Kristallgitter stark begünstigt wird. Dass in farblosen, dünnen Kristallplättchen (siehe Fig. 22) die Richtung der elektrischen Polarisation einheitlich ist, das heisst, dass keine Domänenstruktur vorhanden ist, spricht für die vorhergehende

Behauptung, denn diesen Kristallen ist ein hoher Reinheitsgrad zuzuschreiben.

MATTHIAS²⁶⁾ und KAY²⁹⁾ haben die Domänenstruktur von Bariumtitanatkristallen in einer gleichzeitig mit unseren Versuchen durchgeführten Arbeit ebenfalls festgestellt und sind zu prinzipiell gleichen Resultaten gelangt.

V. Diskussion.

Fasst man die vorliegenden Ergebnisse zusammen, so sieht man, dass Bariumtitanat Einkristalle ferroelektrische Eigenschaften besitzen, was durch das Bestehen einer Hysterese zwischen Polarisation und angelegter Feldstärke und durch die Aufspaltung des Kristalls in spontan polarisierte Domänen gekennzeichnet ist. Der Curiepunkt (120°) ist durch das Verschwinden der spontanen Polarisation, das Auftreten einer Wärmeanomalie und das Maximum der DK, sowie durch die polymorphe Umwandlung von der tetragonalen in die kubische Struktur ausgezeichnet. Zudem zeigen BaTiO_3 -Kristalle bei den folgenden Temperaturen weitere interessante Eigenschaften:

1. Im Temperaturgebiet von 5 bis 10°C , wo sowohl eine Änderung der Polarisation und eine Wärmeanomalie, als auch ein zweites Maximum der DK und ein Minimum der Resonanzfrequenz auftreten.

2. Im Temperaturgebiet von -70°C , wo die DK steil abfällt und die Resonanzfrequenz ein weiteres Minimum durchläuft.

MEGAW³⁾ hat anhand von Pulverdiagrammen an gesintertem Bariumtitanat die Abstände vom Titan zum Sauerstoff im TiO_6 Oktaeder gemessen und in der a - und c -Richtung 1,99 bzw. 2,01 Å gefunden. Bildet man die Summe der Goldschmidtschen Ionenradien von Titan und Sauerstoff, so erhält man 1,96 Å. Berechnet man die Ti-O-Abstände nach ZACHARIASEN²⁷⁾, so erhält man in guter Übereinstimmung mit GOLDSCHMIDT 1,965 Å. Das bedeutet, dass das Titanion die Sauerstoffionen, die in den Ecken eines Oktaeders angeordnet sind, nicht berührt, sondern dass es im Zentrum dieses Oktaeders freien Raum zur Verfügung hat.

Um diese anomal grossen experimentell ermittelten Titan-Sauerstoff-Abstände zu erklären, nimmt MEGAW an, dass das vierwertige Titan teilweise in reduzierter Form als dreiwertiges Titan vorliegt, da Ti^{3+} einen um 0,05 Å grösseren Ionenradius als Ti^{4+} besitzt. Von dieser Hypothese ist jedoch abzusehen, da, wie unsere Messungen zeigten, Bariumtitanatkristalle sowohl oberhalb als auch unterhalb des Curiepunktes diamagnetisch sind.

Als weitere Möglichkeit, die grossen Abstände vom Titan zum Sauerstoff verständlich zu machen hat MEGAW eine Theorie entwickelt, die zugleich noch die Tatsache, dass BaTiO_3 im Curiegebiet tetragonale Struktur besitzt, erklären soll. Es wird angenommen, dass unterhalb dem (experimentell nicht festgestellten) unteren Curiepunkt, der bei sehr tiefen Temperaturen ($T \ll -180^\circ \text{C}$) sein soll, BaTiO_3 kubische Struktur besitzt. Das Titanion soll unterhalb diesem unteren Curiepunkt mit den sechs Sauerstoffionen durch hauptsächlich ionische Kräfte, denen aber oktaedrische kovalente Bindungen überlagert sind, zusammengehalten werden, da die kovalente Bindungsart grössere Titan-Sauerstoff-Abstände verlangt, als dies bei reiner Ionenbindung der Fall ist. Diese oktaedrischen kovalenten Bindungen sollen sich, wenn man den Kristall erwärmt, in zwei Schritten öffnen können:

1. Am unteren Curiepunkt spalten sie nur in einer Richtung (c -Richtung) auf, bleiben aber in der (001)-Ebene, in der dadurch stärkere Bindungskräfte als senkrecht dazu vorliegen, bestehen. Deshalb wird der Titan-Sauerstoff-Abstand in der a -Richtung kleiner als in der c -Richtung; der Kristall wird tetragonal.

2. Am oberen Curiepunkt (120°C) verschwindet die kovalente Bindungsart vollkommen, es resultiert ein reiner Ionenkristall, in welchem die Bindungskräfte symmetrisch verteilt sind, so dass die Struktur wieder kubisch werden kann.

Die vorliegenden Überlegungen von MEGAW beschränken sich auf die Erklärung der strukturellen Eigenarten von Bariumtitanat.

Die ferroelektrische Umwandlung kann man sich folgendermassen vorstellen: Oberhalb des Curiepunktes ($T > 120^\circ \text{C}$) schwingen die Titanionen infolge der thermischen Energie und weil sie genügend Platz haben, um die Mittelpunktslage im Sauerstoffoktaeder, wodurch induzierte Dipole entstehen. Die Wechselwirkung zwischen diesen Dipolen überwiegt beim Curiepunkt den störenden Einfluss der Temperaturbewegung, die Titanionen werden in einer exzentrischen Lage festgehalten, wie schon von RUSHMANN²⁸⁾ und MATTHIAS²⁶⁾ angenommen wurde; das heisst, der Kristall polarisiert sich spontan. Durch die Verschiebung des Titanions aus der Mittelpunktslage des Sauerstoffoktaeders, deformiert sich das Oktaeder in eine tetragonale Bipyramide, ausserdem verliert der Kristall sein Symmetriezentrum. Infolge der dadurch auftretenden Piezoelektrizität wird die Deformation des Gitters verstärkt. Wir vermuten nun, dass diese Strukturänderung in enger Beziehung mit der Polarisation steht; denn einerseits ist die Richtung der Polarisation identisch mit der c -Richtung und andererseits ist der Temperaturverlauf der

Polarisation ein ähnlicher wie derjenige des *c*-Achsenabschnittes. Kühlt man den Kristall vom Curiepunkt an ab, so nimmt die Polarisation zu, und bei zirka 5° C steigt sie rasch auf einen maximalen Wert. Als Folge dieser Polarisationsänderung bei 5° C tritt die zweite Wärmeanomalie und das zweite DK-Maximum auf.

Inwiefern diese Überlegungen zutreffen, lässt sich erst sagen, wenn es gelingt, die Verschiebung des Titanions innerhalb des Sauerstoffoktaeders im Curiegebiet experimentell zu messen und die Polarisation daraus zu berechnen.

Wir danken Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für die vielen wertvollen Ratschläge und für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte.

Physikal. Institut der ETH. Zürich.

Literaturverzeichnis.

- 1) W. JACKSON, W. REDDISH, *Nature* **156**, 717 (1945).
- 2) J. H. VAN SANTEN, G. H. JONKER, *Nature* **159**, 333 (1947).
- 3) HELEN D. MEGAW, *Proc. Roy. Soc.* **189**, 261 (1947).
- 4) B. WUL, *Nature* **157**, 808 (1946).
- 5) H. BLATTNER, B. MATTHIAS, W. MERZ, P. SCHERRER, *Experientia* **3**, 148 (1947).
- 6) H. BLATTNER, H. GRÄNICH, W. KÄNZIG, W. MERZ, *H. P. A.* **21**, 341 (1948).
- 7) BOURGEOIS, *Z. Krist.* **14**, 280 (1888).
- 8) W. D. TREADWELL, *Tab. zur quant. Analyse*, S. 94 (1938).
- 9) J. M. KOLTHOFF, *Massanalyse* 2. Teil, S. 342 (1931).
- 10) W. D. TREADWELL, *Analytische Chemie* **2**, 86 (1939).
- 11) G. BUSCH, *H. P. A.* **11**, 276 (1938).
- 12) W. MERZ, *H. P. A.* **20**, 281 (1947).
- 13) W. L. CHERRY, R. ADLER, *Phys. Rev.* **72**, 981 (1947).
- 14) W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik* (1928).
- 15) W. BANTLE, *H. P. A.* **15**, 382 (1942).
- 16) P. BAERTSCHI, *H. P. A.* **18**, 287 (1945).
- 17) H. BLATTNER, W. MERZ, *H. P. A.* **21**, 210 (1948).
- 18) M. G. HARWOOD, P. POPPER, D. F. RUSHMAN, *Nature* **160**, 58 (1947).
- 19) R. BECKER, W. DÖRING, *Ferromagnetismus* S. 33 (1939).
- 20) J. K. HULM, *Nature* **160**, 127 (1947).
- 21) A. A. RUSTERHOLZ, *H. P. A.* **8**, 39 (1934).
- 22) J. HABLÜTZEL, *H. P. A.* **12**, 489 (1939).
- 23) H. MÜLLER, *Phys. Rev.* **43**, 500 (1933).
- 24) C. B. SAWYER, C. H. TOWER, *Phys. Rev.* **35**, 269 (1930).
- 25) H. BLATTNER, W. KÄNZIG, W. MERZ, H. SUTTER, *H. P. A.* **21**, 207 (1948).
- 26) B. MATTHIAS, A. VON HIPPEL, *Phys. Rev.* **73**, 1378 (1948).
- 27) ZACHARIASEN, *Z. Krist.* **80**, 137 (1931).
- 28) D. F. RUSHMAN, M. A. STRIVENS, *Faraday Trans.* **42 A**, 236 (1946).
- 29) H. F. KAY, *Acta Cryst.* **1**, 229, (1948).

Eine trägerlose Trennung des radioaktiven Indiums von Cadmium

von E. Jacobi.

(15. XII. 1948.)

Zusammenfassung: Es wird eine Arbeitsvorschrift angegeben, um 0,2 mg Indium von grösseren Mengen Cadmium in 10 Minuten abzutrennen.

Um eine masselose Anreicherung des In und zugleich Abtrennung vom Cd zu erreichen, wird Mg als Träger für das In zugesetzt und dieses mit überschüssigem Ammoniak gefällt. Die In-Aktivität wird mit dem $\text{Mg}(\text{OH})_2$ Niederschlag mitgerissen, während das Cd als Amminkomplex in Lösung bleibt. Anschliessend wird das In aus schwach schwefelsaurer Lösung elektrolytisch abgeschieden und auf eine kleine, sehr dünne Glimmerfolie gebracht.

Wird Cadmium im Cyclotron mit Protonen (einer Energie von 6,5 MeV) bestrahlt, so erhält man daraus durch einen p, n-Prozess in unwägbarer Menge das Element Indium. Für Absorptions- und Koinzidenzmessungen in der nachfolgenden Arbeit¹⁾ war es nun erforderlich, das entstandene Indium an nur wenig Materie gebunden zu isolieren.

Es handelt sich also erstens um eine möglichst quantitative Trennung des In vom Cd. Während diese für sogenannte «analytische Mengen» leicht auszuführen ist, indem man Cd in 0,6 n HCl-Lösung als Sulfid fällt und das In aus dem Filtrat abscheidet, werden bei gleichen Bedingungen Mengen von weniger als 0,5 mg In weitgehend am CdS-Niederschlag adsorbiert und mitgefällt.

Hingegen lässt sich das In mit nur 0,2 mg Träger nach bekannter Methode folgendermassen abtrennen: Das auf eine Kupfertarget aufgelötete Cadmium wird nach der Bestrahlung oberflächlich abgeschabt. Die aktiven Cd-Späne werden in möglichst wenig HNO_3 1:1 gelöst, Indiumnitrat, entsprechend 0,2 mg Indium, als Trägersubstanz zugegeben und von Verunreinigungen abfiltriert. Zum Filtrat wird Ammoniak im Überschuss zugesetzt, bis sich das Cd und eventuell vorhandenes Cu als Amminkomplexe lösen. (Man darf nicht einen zu grossen Überschuss zugeben, denn oberhalb einer Konzentration von 20% Ammoniak ist auch das Indiumhydroxyd löslich!)

¹⁾ F. BOEHM, O. HUBER, P. MARMIER, P. PREISWERK und R. STEFFEN, H. P. A. 22, 69 (1949).

Nun wird 5 Minuten gekocht und sofort abgesaugt. Das Indiumhydroxyd lässt sich gut filtrieren, so dass die Trennung nicht länger als 10 Minuten dauert. Die Ausbeute beträgt zirka 70%. Die restlichen 30% sind an den Glasgefäßen adsorbiert und gehen verloren, was sich leider nicht vermeiden lässt.

Für Messungen mit dem β -Spektrographen war es nun zweitens nötig, das In trägerlos auf einer kleinen Fläche anzureichern. Die Erwartung, das aktive In könne bei gleichem Verfahren wie oben, nur ohne Trägersubstanz als Radiokolloid am Filter abgefangen werden, erwies sich als falsch. Ebenso scheiterte eine direkte elektrolytische Trennung Cd-In, denn das In scheidet sich erst dann auf der Elektrode ab, wenn diese bereits mit wägbaren Mengen Cd überzogen ist.

Um nun das In doch elektrolytisch abscheiden zu können, wird der Kunstgriff angewandt, das radioaktive In mit Magnesium als Träger als Hydroxyd zu fällen. Dadurch wird eine fast völlige Trennung vom Cd erreicht, da der $\text{Mg}(\text{OH})_2$ -Niederschlag weit über 90% der In-Aktivität und nur Spuren Cd adsorbiert¹⁾. Mg und In haben, im Gegensatz zu Cd-In, weit auseinanderliegende Abscheidungs-potentiale, so dass eine elektrolytische Trennung dieser beiden Elemente nicht mehr schwierig ist. Bei der Trennung verfährt man am besten folgendermassen:

Die bestrahlten Cd-Späne werden in wenig Salpetersäure 1:1 gelöst, 100 mg Magnesiumnitrat in wenig Wasser zugesetzt und filtriert. Diese Lösung wird mit einem Überschuss von Ammoniak bei Siedehitze gefällt und der $\text{Mg}(\text{OH})_2$ -Niederschlag, an dem die Aktivität adsorbiert ist, mehrmals mit ammoniumsulfathaltiger wässriger Ammoniaklösung gewaschen, um das mitgerissene Cd zu entfernen. Der Niederschlag wird in wenigen Tropfen verdünnter Schwefelsäure aufgelöst und die Fällung mit Ammoniak wiederholt. Nach wiederholtem gründlichem Waschen wird der $\text{Mg}(\text{OH})_2$ -Niederschlag in heisser verdünnter Schwefelsäure gelöst, mit Wasser auf 4 ccm verdünnt und 0,05 g Ammoniumformiat zugesetzt. Der PH-Wert der Lösung beträgt zirka 2. Die Lösung enthält nun praktisch keine Cd-Ionen mehr, die Platinelektrode bleibt bei der nun folgenden Elektrolyse blank.

Es wird mit rotierenden Pt-Elektroden, die vorher künstlich aufgeraut wurden, bei 18 Grad elektrolysiert. Bei einer Spannung von 2,5 V und einem durchschnittlichen Strom von 6 mA ist das Indium binnen 8 Stunden vollständig an der Kathode abgeschieden.

¹⁾ E. JACOBI, *Helv. Chim. Acta* **31**, 2124 (1948).

Nun werden 2 Tropfen heisse konz. Salpetersäure auf die Kathode gebracht, die so gelöste In-Aktivität mit Hilfe einer Mikropipette in kleinen Portionen auf eine 0,8 mg/ccm dünne Glimmerfolie von 2×2 mm Grösse ausgebreitet und die Salpetersäure sukzessive durch einen warmen Luftstrom verdampft. Auf der Glimmerfolie befindet sich schliesslich in unsichtbarer Menge das aktive Indium.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. P. SCHERRER für sein Interesse an dieser Arbeit meinen Dank aussprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der ETH.

Die Konversion der Gammastrahlen des In¹¹¹

von F. Boehm, O. Huber, P. Marmier, P. Preiswerk und R. Steffen.

(15. XII. 1948.)

Summary: The coefficients of *K*- and *L*- internal conversion of In¹¹¹ γ -rays are investigated by means of coincidence measurements. The following results have been obtained:

$$E_{\gamma} = 173 \text{ keV: } (N_e/N_{\gamma})_K = (8,1 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}; \quad (N_e/N_{\gamma})_L = (0,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$$

$$E_{\gamma} = 247 \text{ keV: } (N_e/N_{\gamma})_K = (3,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-2}; \quad (N_e/N_{\gamma})_L = (0,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$$

From comparison with the theories of internal conversion the multipole orders of these γ -rays are determined. Electric quadrupole and magnetic dipole radiations are found to occur in the 173 keV transition while electric quadrupole radiation is present in the 247 keV γ -ray. Both transitions are not accompanied by parity changes.

Einleitung.

1. Das Isotop In¹¹¹ zerfällt mit einer Halbwertszeit von 2,7 Tagen durch *K*-Einfang in Cd¹¹¹ unter sukzessiver Emission zweier γ -Quanten nach dem in Fig. 1 skizzierten Zerfallschema¹⁾²⁾³⁾. Die Energien der beiden γ -Strahlen, deren Reihenfolge unbekannt ist, betragen 173 und 274 keV. LAWSON und CORK¹⁾ haben das Spektrum der Konversionselektronen dieser γ -Strahlen im magnetischen Halbkreispektrographen gemessen und das Konversionsverhältnis zwischen *K*- und *L*-Schale, N_{eK}/N_{eL} angegeben, wobei N_e die Zahl der emittierten Konversionselektronen pro Zeiteinheit bezeichnet. Ihre Messung gibt aber keine Auskunft über die *absolute Grösse* der Konversion.

Zur Charakterisierung der γ -Übergänge und der damit verknüpften Spinänderungen des Kerns haben wir die Konversion näher untersucht. Nach den theoretischen Arbeiten von DANCOFF und MORRISON⁴⁾, HEBB und NELSON⁵⁾ und von SCHAFROTH⁶⁾ gestattet die Kenntnis des Konversionskoeffizienten α eine Aussage über den Multipolcharakter der γ -Strahlung. Ebenso wie die Grössen α_K und α_L selbst, ist (wenn auch in geringerem Masse) auch ihr Verhältnis α_K/α_L auf die Multipolordnung empfindlich. Im allgemeinen erlaubt jedoch die Kenntnis der *K*- oder *L*-Konversion allein noch keinen

eindeutigen Schluss auf die Multipolordnung, da man a priori nicht entscheiden kann, ob eine elektrische oder eine magnetische Strahlung bestimmter Ordnung vorliegt.

2. Der in experimentellen Arbeiten verwendete Konversionskoeffizient $N_e/(N_e + N_\gamma)$ wird im folgenden mit κ bezeichnet. (Wir haben die Bezeichnung κ gewählt, um Verwechslungen mit dem in theoretischen Arbeiten verwendeten Verhältnis $N_e/N_\gamma = \alpha$ zu vermeiden. Es gilt $\kappa = \alpha/(1 + \alpha)$.) Bedeutet N die Totalzahl der pro

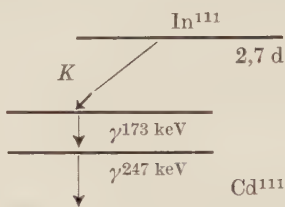


Fig. 1.

Zerfallschema von In^{111} (2,7 d)

Zeiteinheit zerfallenden Atome, dann ist die Zahl der Konversionselektronen $N_e = N (\kappa_K + \kappa_L + \dots) = N \kappa$, und die Zahl der nichtkonvertierten γ -Quanten je Zeiteinheit $N_\gamma = N(1 - \kappa)$. Das Verhältnis der Konversionselektronen der beiden γ -Linien, N_e^{173}/N_e^{247} , bezeichnen wir mit ρ .

3. Beim Zerfall von In^{111} werden Röntgenquanten des K -Einfangs, γ -Quanten oder Konversionselektronen und Konversionsröntgenquanten der 173 und 247 keV-Übergänge auftreten und in geeigneten Zählrohren registriert werden. Für jedes einzelne dieser Ereignisse, z. B. für das mit a bezeichnete, gilt in einer allgemeinen Schreibweise für die im Zählrohr gemessene Stosszahl pro Zeiteinheit

$$Z_a = N f_a \varepsilon_a \omega_a \delta_1(\kappa).$$

f_a berücksichtigt die Schwächung der Strahlung infolge Absorption in der Zählrohrwand, ε_a bedeutet die Zählrohrsensibilität, ω_a den Raumwinkel und $\delta_1(\kappa)$ eine lineare Funktion des Konversionskoeffizienten κ , für welche je nach Bedeutung von a die Möglichkeit gilt

$$\delta_1(\kappa) = \begin{cases} 1 \\ 1 - \kappa^i \\ \kappa^i \end{cases}.$$

Der Index i bezieht sich auf die beiden γ -Übergänge von 173 und 247 keV.

Die erwähnten Einzelprozesse können auf 17 verschiedene Arten zu Koinzidenzen Anlass geben. Für jede dieser Möglichkeiten ergibt sich für die Zahl der registrierten Koinzidenzen pro Zeiteinheit bei gleichen Zählrohren

$$K_{a,b} = 2 N f_a \varepsilon_a \omega_a f_b \varepsilon_b \omega_b \delta_2(\kappa)$$

mit

$$\delta_2(\kappa) = \begin{cases} 1 \\ \kappa^i \\ 1 - \kappa^i \\ \kappa^i \kappa^k \\ \kappa^i (1 - \kappa^k) \\ (1 - \kappa^i) (1 - \kappa^k) \end{cases}$$

i und k ($i \neq k$) beziehen sich auf die beiden γ -Linien von 173 und 247 keV.

Das Verhältnis

$$\frac{K_{a,b}}{Z_a} = 2 f_b \varepsilon_b \omega_b \frac{\delta_2(\kappa)}{\delta_1(\kappa)} \quad (1)$$

liefert unter Zuhilfenahme von g die absoluten Konversionskoeffizienten κ^{173} und κ^{247} .

Messmethodik.

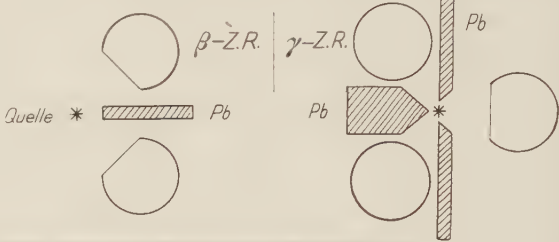
1. In^{111} wurde im Cyclotron durch Bestrahlen von Cadmiummetall mit 6.5 MeV Protonen nach der Reaktion $\text{Cd}(p, n)\text{In}$ erzeugt und nach chemischer Abtrennung als Hydroxyd gefällt. Trägerlose Präparate für die β -Spektrographmessung wurden durch Elektrolyse gewonnen. Über die von Dr. E. JACOBİ ausgearbeitete chemische Abtrennung wird in der vorangehenden Arbeit berichtet⁷⁾.

Verschiedene bei der Cadmiumbestrahlung angeregte kurzlebige Indiumisotope sind nach einem Tag praktisch abgeklungen; ausser dem 2,7tägigen In^{111} ist nur noch das 48tägige Isotop In^{114} anwesend.

2. Die verwendeten γ -Zählrohre besitzen eine 40μ dicke Goldkathode, wodurch eine gute Sensibilität für die zu messenden Energien erzielt wird. Die Konversionselektronen sind mit Fensterzählrohren (Folie 2 mg/cm^2) registriert worden.

Für die Koinzidenzmessungen haben wir drei Standardanordnungen mit festen, reproduzierbaren Raumwinkeln benützt. Über

Grundriss und Raumwinkel dieser Messanordnung, sowie über die berechneten Grössen f_a gibt folgende Tabelle Auskunft (als (2) zitiert).

a	f_a	ε_a	$\omega_a = \Omega_a/4\pi$		
			(β, β)-Koinzidenzen	(β, γ)-Koinz.	(γ, γ)-Koinz.
					
e^{173}	0,75	1	0,031	0,049	
e^{247}	0,89	1	0,031	0,049	
γ^{173}	0,85				0,074
γ^{247}	0,94				0,074

Der verwendete Koinzidenzverstärker hatte ein Auflösungsvermögen von $\tau = 2,4 \cdot 10^{-7}$ Sek.

Messergebnisse.

1. *Konversionsverhältnis* $\kappa^{173}/\kappa^{247}$. Die Konversionslinien sind im magnetischen Linsen-Spektrographen⁸⁾ gemessen worden (Fig. 2). Für das Verhältnis der Elektronen der beiden γ -Linien (Summe der K - und L -Konversion) haben wir durch Ausplanimetrieren der durch H_Q dividierten Kurven gefunden:

$$\frac{N_K^{173} + N_L^{173}}{N_K^{247} + N_L^{247}} = \frac{\kappa^{173}}{\kappa^{247}} = \underline{2,1 \pm 0,1}. \quad (3)$$

Das der Arbeit von LAWSON und CORK entnommene Verhältnis $\kappa^{173}/\kappa^{247}$ ist um zirka 40% kleiner als der hier angegebene Wert.

2. *Koinzidenzen zwischen Konversionselektronen*. Absorptionskurven der Einzelstösse und Koinzidenzen in Aluminium wurden in der (β, β)-Anordnung an 4 Präparaten gemessen. Fig. 3 veranschaulicht eine dieser Messungen. Nach Abzug des einen Monat später kontrollierten Anteils von In^{114} gewinnt man die Absorptionskurve von

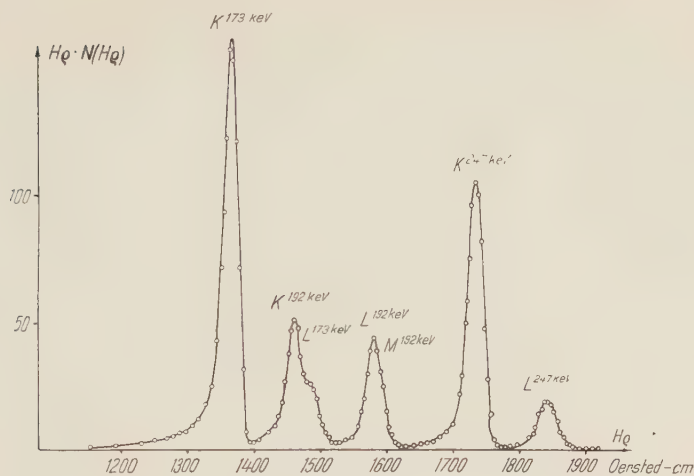


Fig. 2.

Konversionselektronen von In^{111} und In^{114} im magnetischen Linsenspektrographen.

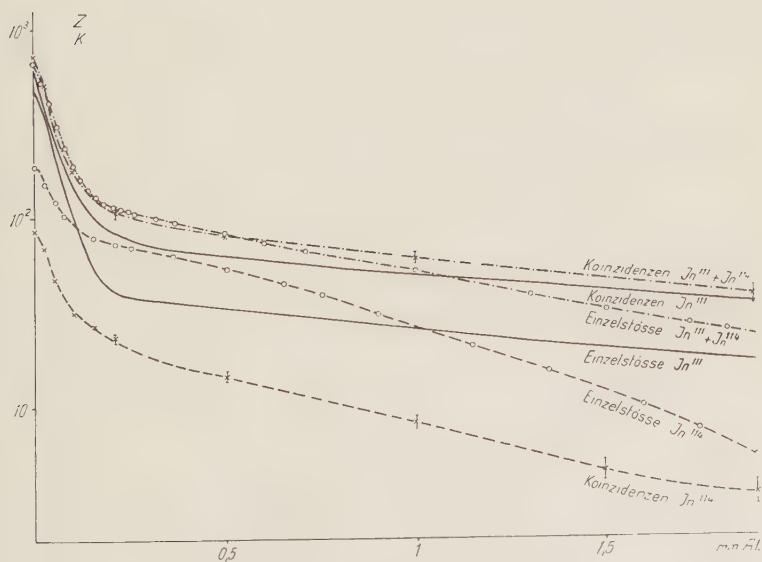


Fig. 3.

Absorptionskurven von In^{111} (2,7 d) und In^{114} (48 d) in Aluminium.
(Ordinate: Z und K in willkürlichen Einheiten.)

In¹¹¹. Durch Zerlegen auf graphischem Wege kann hieraus der Anteil der (e, e) -Koinzidenzen gefunden werden. (Dabei ist bei der Subtraktion der (e, γ) - und der (e, K) -Koinzidenzen der Permutationsfaktor 2 in Rechnung zu setzen.) Man findet so für das Verhältnis von Koinzidenzen zu Einzelstößen der Konversionselektronen

$$K_{e^{173}, e^{247}} / (Z_{e^{173}} + Z_{e^{247}}) = (1,25 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}.$$

Die Beziehung (1) lautet für dieses Verhältnis:

$$\frac{K_{e^{173}, e^{247}}}{Z_{e^{173}} + Z_{e^{247}}} = \frac{2 f_{e^{173}} f_{e^{247}} \omega_e \kappa^{173} \kappa^{247}}{f_{e^{173}} \kappa^{173} + f_{e^{247}} \kappa^{247}}.$$

Mit (2) und (3) errechnen sich daraus die Konversionskoeffizienten zu:

$$\kappa^{173} = (7,4 \pm 1) \cdot 10^{-2}$$

$$\kappa^{247} = (3,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-2}.$$

3. *Koinzidenzen zwischen Konversionselektronen und γ -Strahlen.* Die Konversionskoeffizienten lassen sich auch durch (e, γ) -Koinzidenzen bestimmen. Koinzidenzmessungen mit einem Fenster- und einem Goldzählrohr liefern nach Abzug des 48tägigen Anteils von In¹¹⁴ und nach Subtraktion der (γ, γ) - und (γ, K) -Koinzidenzen (Kohleabsorber vor β -Zählrohr) die Zahlenwerte

$$\frac{K_{e^{173}, \gamma^{247}} + K_{e^{247}, \gamma^{173}}}{Z_{\gamma^{173}} + Z_{\gamma^{247}}} = (0,22 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{K_{e^{173}, \gamma^{247}} + K_{e^{247}, \gamma^{173}}}{Z_{e^{173}} + Z_{e^{247}}} = (0,46 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}.$$

Für den ersten Fall lautet die Beziehung (1)

$$\frac{K_{e^{173}, \gamma^{247}} + K_{e^{247}, \gamma^{173}}}{Z_{\gamma^{173}} + Z_{\gamma^{247}}} = \frac{\omega_e [f_{e^{173}} f_{\gamma^{247}} \kappa^{173} (1 - \kappa^{247}) + f_{e^{247}} f_{\gamma^{173}} \kappa^{247} (1 - \kappa^{173})]}{f_{\gamma^{173}} \varepsilon^{173} (1 - \kappa^{173}) + f_{\gamma^{247}} \varepsilon^{247} (1 - \kappa^{247})}.$$

Zusammen mit (2) und (3) und mit $\varepsilon^{173}/\varepsilon^{247} = 1,2^2$ erhalten wir für die Konversionskoeffizienten

$$\kappa^{173} = (7,6 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$$

$$\kappa^{247} = (3,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-2}.$$

Entsprechend liefert das Verhältnis

$$(K_{e^{173}, \gamma^{247}} + K_{e^{247}, \gamma^{173}}) / (Z_{e^{173}} + Z_{e^{247}})$$

unter Benützung der gefundenen Konversionskoeffizienten die Ansprechwahrscheinlichkeiten für die Goldzählrohre

$$\varepsilon^{173} = (7,7 \pm 0,8) \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon^{247} = (6,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-3}.$$

Die beiden Messungen liefern also für die Konversionskoeffizienten innerhalb der Fehlergrenze übereinstimmende Resultate.

4. *Koinzidenzen zwischen Gammastrahlen.* Die (γ, γ) -Koinzidenzmessungen liefern unabhängig vom obigen Resultat nochmals die Zählrohrsensibilität. Aus dem gemessenen Verhältnis

$$\frac{K_{\gamma^{173}, \gamma^{247}}}{Z_{\gamma^{173}} + Z_{\gamma^{247}}} = (0,47 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$$

und der Relation

$$\frac{K_{\gamma^{173}, \gamma^{247}}}{Z_{\gamma^{173}} + Z_{\gamma^{247}}} = \frac{2 f_{\gamma^{173}} f_{\gamma^{247}} \omega_{\gamma} \varepsilon^{173} \varepsilon^{247} (1 - \kappa^{173}) (1 - \kappa^{247})}{f_{\gamma^{173}} \varepsilon^{173} (1 - \kappa^{173}) + f_{\gamma^{247}} \varepsilon^{247} (1 - \kappa^{247})}$$

finden wir zusammen mit (2), (3) und $\varepsilon^{173}/\varepsilon^{247} = 1,2$ unter Verwendung der oben bestimmten Koeffizienten κ die Ansprechwahrscheinlichkeiten der Goldzählrohre

$$\varepsilon^{173} = (8,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon^{247} = (6,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$$

in befriedigender Übereinstimmung mit dem im vorhergehenden Abschnitt gefundenen Wert.

Die Mittelwerte der gefundenen Konversionskoeffizienten unter Berücksichtigung des dem Spektrogramm entnommenen prozentualen Anteils der einzelnen Schalen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	κ	α	α_K	α_L	α_K/α_L
173 keV	$7,5 \pm 0,8\%$	$8,1 \pm 0,8\%$	$7,1 \pm 0,8\%$	$0,9 \pm 0,1\%$	8 ± 2
247 keV	$3,5 \pm 0,5\%$	$3,6 \pm 0,5\%$	$3,0 \pm 0,5\%$	$0,6 \pm 0,1\%$	5 ± 1

Diskussion.

Die Konversion einer elektrischen 2^1 -Pol-Strahlung in Anwesenheit von 2 K -Elektronen ist von DANCOFF und MORRISON⁴⁾ berechnet worden. Die Formeln dieser Autoren unterliegen der Einschränkung $h\nu \ll mc^2$ und $Ze^2/hc \ll 1$ und dürfen für einen Cadmiumkern ($h\nu/mc^2 = 0,34$ bzw. $0,49$; $Ze^2/hc = 0,35$) im Sinne eines Grenzfalles noch als geltend angesehen werden.

Mit mehr Vorbehalt ist die relativistische Formel für magnetische Multipolstrahlung wegen der Zusatzbedingung $Ze^2/hv \ll 1$ anzuwenden. Wir haben uns daher einer von SCHAFROTH⁵⁾ errechneten Formel bedient, für welche die Bedingung über die Kernladung zu $(Ze^2/hc)^2 \ll 1$ gelockert ist. Durch Mitberücksichtigung der L -Konversion gemäss den Rechnungen von HEBB und NELSON⁵⁾ erhalten wir eine Kontrolle über die Zuordnung von Konversionskoeffizient und Multipolordnung.

In der folgenden Tabelle sind die für kleine l errechneten Konversionskoeffizienten zusammengestellt.

		berechnet					
		gemessen	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$		
173 keV	K-Konversion	$(7,1 \pm 0,8)^{\circ}\%$	DANCOFF-MORRISON elektrischer 2^l -Pol	2,7%	14,3%	62%	
	α_K		SCHAFROTH magnetischer 2^l -Pol	0,5%	2,3%	13,2%	
	L-Konversion	$8,0 \pm 2$	HEBB-NELSON elektrischer 2^l -Pol	7,9	5,7	2,7	
			α_K				
			α_L				
			HEBB-NELSON magnetischer 2^l -Pol	7	6,5	5,4	
247 keV	K-Konversion	$(3,0 \pm 0,5)^{\circ}\%$	DANCOFF-MORRISON elektrischer 2^l -Pol	0,9%	3,6%	11,9%	
	α_K		SCHAFROTH magnetischer 2^l -Pol		1%	3%	
	L-Konversion	$5,5 \pm 1$	HEBB-NELSON elektrischer 2^l -Pol	7,9	6,4	3,9	
			α_K				
			α_L				
			HEBB-NELSON magnetischer 2^l -Pol	7,3	6,9	6,1	

Für einen Oktupolübergang berechnet sich die Lebensdauer für die in Frage stehenden Energien zu 10^{-1} bis 10^{-2} Sekunden⁹⁾. Da aber solche Niveaux nicht mehr zu Koinzidenzen Anlass geben können, müssen wir beim Vergleich der experimentellen Befunde mit den berechneten Konversionskoeffizienten Oktupolstrahlung zum vornherein ausschliessen.

In bezug auf die totale Spinänderung des Kernes gelten für einen elektrischen Quadrupolübergang die Auswahlregeln $\Delta J = \pm 2, \pm 1, 0$ und die Erhaltung der Parität. Dasselbe Paritätsverhalten zeigt ein magnetischer Dipolübergang mit $\Delta J = \pm 1, 0$. Im Falle eines elektrischen Dipol- und eines magnetischen Quadrupolüberganges besteht hingegen die Forderung der Paritätsänderung.

Die experimentellen Ergebnisse zusammen mit diesen Auswahlregeln sprechen für folgende Charakterisierung der beiden γ -Strahlungen: Beim 173 keV-Übergang handelt es sich offenbar um eine Mischung von elektrischer Quadrupol und magnetischer Dipolstrahlung zu etwa gleichen Anteilen. Die damit verknüpfte Spinänderung beträgt ± 1 oder 0. Dagegen scheint beim 247 keV-Übergang ein beinahe reiner elektrischer Quadrupolstrahler mit einer Spinänderung von ± 2 oder ± 1 oder 0 vorzuliegen. Die Parität bleibt bei beiden Übergängen erhalten.

Herrn Prof. Dr. SCHERRER sind wir für das Interesse an dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Literatur.

- 1) LAWSON und CORK, Phys. Rev. **57**, 982 (1940).
- 2) BRADT, GUGELOT, HUBER, MEDICUS, PREISWERK und SCHERRER, H. P. A. **19**, 77 (1946).
- 3) TENDAM und BRADT, Phys. Rev. **72**, 1118 (1947).
- 4) DANCOFF und MORRISON, Phys. Rev. **55**, 122 (1939).
- 5) HEBB und NELSON, Phys. Rev. **58**, 486 (1940).
- 6) SCHAFROTH, H. P. A. **21**, 499 (1948).
- 7) JACOBI, H. P. A. **22**, 66 (1949).
- 8) ZÜNTLI, H. P. A. **21**, 179 (1948).
- 9) HELMHOLZ, Phys. Rev. **60**, 415 (1941).

Etude d'une source d'ions du type Penning

par R. Keller.

(10. XII. 1948.)

Résumé. En faisant varier la forme des électrodes d'une source d'ions du type Penning nous avons influencé d'une façon très favorable le rendement ionique. Alimentée avec un générateur d'impulsions, cette source d'ions produit un courant ionique de 1 mA en moyenne, resp. de 22 mA en pointe, le courant de décharge étant de 16,5 mA en moyenne, resp. de 360 mA en pointe. La tension de fonctionnement est de 400 V environ. Avec l'hydrogène lourd la part d'ions atomiques est de 14%. En ajoutant 6% d'oxygène au deutérium le pourcentage des deutérons est encore de 11% tandis que la consommation de deutérium se trouve diminuée d'un facteur 3, soit env. 35 cm³ par heure.

Description de la source d'ions.

La source d'ions élaborée par F. M. PENNING et J. H. A. MOUBIS¹⁾ et améliorée par P. LORRAIN²⁾ a été exécutée sous une forme facilement démontable, de façon à pouvoir faire varier sans peine la géométrie des électrodes. L'appareil consiste en une chambre d'ioni-

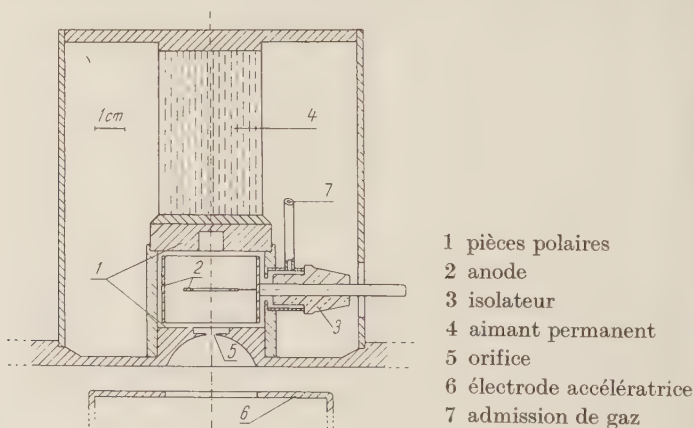


Fig. 1

Source d'ions complète.

sation de forme cylindrique (voir fig. 1). Le manteau du cylindre est en laiton et les deux bases qui sont en fer doux constituent les deux pièces polaires d'un aimant permanent et forment en même temps la cathode. Un anneau cylindrique concentrique se trouvant à

l'intérieur de la chambre d'ionisation sert d'anode. Celle-ci est tenue au moyen d'une tige soudée à un isolateur de traversée métallisé. L'une des pièces polaires, de forme dégagée, est percée axialement. Les ions issus de cet orifice sont accélérés par une électrode se trouvant en face de l'orifice.

La décharge se déroule comme suit: Les électrons libérés ont comme origine principale l'émission secondaire à l'endroit de la cathode. Le champ magnétique de l'ordre de 800 gauss provoque une rotation des électrons dans le plan perpendiculaire aux lignes de force. Le rayon de cette rotation est très petit par rapport aux dimensions de la chambre d'ionisation. L'électron suit en quelque sorte une ligne de force magnétique en oscillant d'une pièce polaire à l'autre. Le pouvoir ionisant des électrons est maximum vers 70 V pour l'hydrogène³). Comme la tension appliquée à l'anode est de l'ordre de 500 V, la surface équipotentielle de 70 V passe très près de la cathode. Les ions sont donc produits en majeure partie à proximité de la cathode. Ils sont guidés par le champ électrique, une faible partie se dirigeant vers l'orifice. La déviation due au champ magnétique est faible.

Mesure du courant ionique.

Immédiatement en face de l'orifice de la source d'ions nous avons placé une cage de Faraday à grande ouverture. Celle-ci est munie d'un anneau de garde polarisé négativement avec une tension de

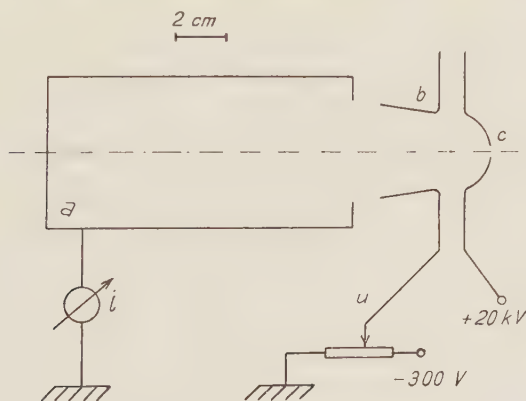


Fig. 2.

a) cage de Faraday; b) anneau de garde; c) source.

2000 V afin d'arrêter les électrons secondaires libérés par les chocs d'ions aux parois de la cage de FARADAY (fig. 2). Chaque proton libère environ 4 électrons pour des énergies de l'ordre de 20 kV⁴).

Dans la fig. 3 est reporté le courant ionique apparent en fonction de la tension inverse de l'anneau de garde. La courbe devient horizontale vers 300 V. On peut donc affirmer qu'avec 2000 V le courant mesuré est égal au courant ionique.

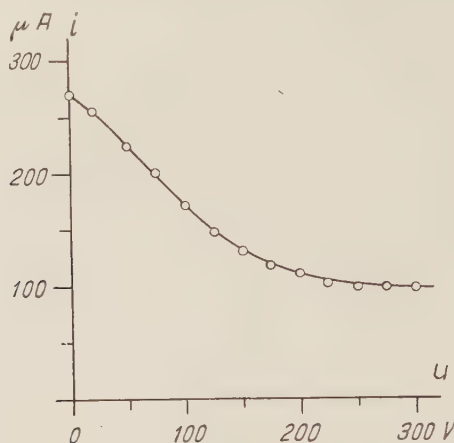


Fig. 3.

Courant i en fonction de la tension de l'anneau de garde.

Recherche du meilleur rendement ionique.

Nous alimentons la source d'ions au moyen d'un générateur de puls avec une fréquence de pulsation de 200 par sec et une durée d'impulsion de $1/14$ de la période de pulsation. L'hydrogène a été préparé à partir de l'eau par réduction sur du fer en poudre incandescent et séché avec de la neige carbonique. Le réglage d'admission de gaz se fait au moyen d'une soupape de Fowler⁵). La caractéristique de la décharge se présente comme suit: en augmentant progressivement l'admission de gaz, c'est-à-dire la pression dans la source d'ions, le courant qui est d'abord nul augmente brusquement et demeure instable; l'amorçage n'a pas lieu à chaque période. Après une augmentation de pression de quelques pour-cents le courant moyen de décharge devient subitement très stable. Un accroissement ultérieur de la pression ne fait qu'augmenter insensiblement le courant. Pour avoir des résultats univoques le courant moyen a été fixé à 16,5 mA en réglant la pression au minimum sans que toutefois les amorçages soient irréguliers. La tension d'accélération est de 22 kV. Nous avons amélioré le rendement en ions de plusieurs façons:

Le courant ionique est proportionnel à la superficie de l'orifice. Le débit de pompage détermine l'admission de gaz. Avec un débit de pompage donné et un orifice plus grand, la pression dans la source diminue et la décharge se désamorce. Or il existe un rapport optimum entre le diamètre et la hauteur de la chambre d'ionisation pour lequel l'amorçage se fait à la pression la plus basse. Ce rapport est de 6:5. Par diamètre est entendu le diamètre intérieur de l'anode. Celle-ci doit en outre former un cylindre dont la hauteur est aussi grande que possible.

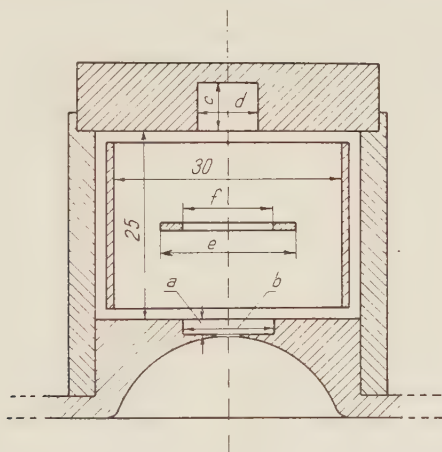


Fig. 4.

Dimensions de l'espace de décharge de la source d'ions.

Sans changer la forme générale de la chambre d'ionisation qui est cylindrique, nous avons creusé des cavités dans les pièces polaires et ajouté une bague à l'anode. Les dimensions sont indiquées dans la fig. 4. La cavité cylindrique ab a comme effet d'espacer les surfaces équipotentiellles au voisinage de l'orifice. Ainsi les électrons venant du fond de la cavité gardent une basse énergie sur un parcours agrandi ce qui augmente la région où la probabilité d'ioniser est grande. Comme cette région se trouve près de l'orifice, d'une part le nombre d'ions dirigés vers celle-ci est augmenté, et d'autre part la formation d'électrons par émission secondaire est accentuée au voisinage de l'axe. La fig. 5 illustre la variation du courant ionique en fonction de a ($b = 10$ mm) resp. de b ($a = 2.5$ mm).

La cavité cd a le même effet que la précédente. Comme les électrons oscillent d'une cavité à l'autre grâce au champ magnétique, la concentration d'électrons le long de l'axe se trouve accrue une fois de

plus et par conséquent aussi la formation d'ions au voisinage de l'orifice. La fig. 6 illustre la variation du courant ionique en fonction de c ($d = 11$ mm) resp. de d ($c = 5$ mm).

On obtient une amélioration de 30% en aménageant une bague de laiton reliée à l'anode et placée au centre de celle-ci. Le meilleur choix des dimensions est celui-ci: $e = 18$ mm, $f = 12$ mm. Un déplacement suivant l'axe dans la direction cd donnerait un léger accroissement du courant ionique mais en même temps la pression minimum de fonctionnement augmente.

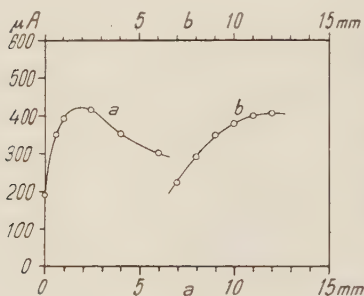


Fig. 5.

Influence des dimensions a , b , de la source sur son rendement.

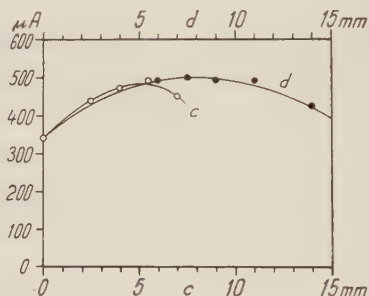


Fig. 6.

Influence des dimensions c , d de la source sur son rendement.

Un essai que nous n'avons pas poursuivi par manque de temps laisse prévoir une augmentation sensible du rendement. Nous avons isolé les parois de la cavité cd ce qui permet de la polariser et de mesurer le courant partiel de décharge arrivant sur ses parois. Une tension continue négative de 300 V augmente le courant partiel d'un facteur 1,4 sans changer le courant total de la décharge. Cela signifie que le nombre d'ions arrivant sur cd est accru. Rien n'empêche de présumer qu'en polarisant également la cavité ab le nombre d'ions dirigés vers l'orifice sera aussi augmenté d'un facteur 1,4. Comme les électrons sont produits par émission secondaire, la concentration de ceux-ci au voisinage de l'axe sera augmentée, d'où nouvel accroissement de l'ionisation près de l'orifice. Il semble qu'on pourrait gagner un facteur $1,4^2$.

Il faut encore mentionner que tous les paramètres a , b ,... f que nous avons fait varier ne sont pas indépendants. L'influence de ceux-ci sur la valeur optimum de l'un d'entre eux est assez faible. Par exemple: l'introduction de la bague centrale déplace la valeur optimum de c de 5 à 6,5 mm. C'est le seul contrôle que nous

avons fait. Pour la construction définitive nous nous sommes arrêtés aux valeurs suivantes :

$$a = 2 \quad b = 12 \quad c = 6,5 \quad d = 8 \quad e = 18 \quad f = 12 \text{ mm}$$

L'épaisseur de la bague est sans importance tant qu'elle reste petite (1 mm). La bague est fixée à l'anode par une tige de laiton soudée à l'argent.

Le courant ionique i en fonction du courant de décharge J est indiqué dans la fig. 7. L'orifice est de 2,9 mm \varnothing . Avec un orifice de 4,2 mm \varnothing nous avons atteint 1 mA. Comme l'impulsion dure 1/14 de période le courant ionique instantané est de 14 mA en admettant une impulsion de forme carrée, ou de 22 mA pour une impulsion sinusoïdale. Un contrôle par l'oscillographe nous montre

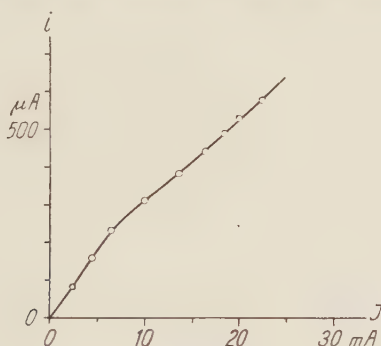


Fig. 7.

Courant ionique en fonction du courant de décharge.

que l'impulsion du courant de décharge est de forme quasi sinusoïdale tandis que la tension est constante durant la décharge. Une fois que les décharges s'amorcent régulièrement cette tension de régime est presque indépendante de la pression mais dépend fortement de la pureté de l'hydrogène. Elle varie entre 400 V et 650 V. Les impuretés font diminuer la tension. Pour trouver la puissance il suffit de multiplier le courant moyen de décharge (moyenne arithmétique) par la tension de régime, ce qui fait environ 1 W pour 50 μ A d'ions avec l'orifice de 2,9 mm.

Le spectre de masse.

Nous avons fait fonctionner la source d'ions avec de l'hydrogène, du deutérium, puis nous avons additionné différents pourcentages d'oxygène à ces deux gaz, et finalement nous l'avons fait travailler avec de la vapeur d'eau, resp. d'eau lourde seule. La pression a été

réglée au minimum de telle sorte que la décharge ait encore lieu sans désamorçage. L'esquisse du spectrographe de masse est donnée dans la fig. 8. Les ions sont accélérés en deux étapes, soit à 14 kV puis à 55 kV au moyen d'une lentille électrostatique diaphragmée focalisant le faisceau ionique sur la fente d'une cage de FARADAY. Avant d'arriver sur la fente le faisceau se trouve dévié de 15° par un champ magnétique. Une déviation plus grande aurait été avantageuse mais l'électro-aimant ne le permet pas. La cage de FARADAY est polarisée avec une tension positive de 140 V par rapport à la fente, ce qui arrête les électrons secondaires. D'autre part la fente est à -280 V par rapport à la terre de sorte que les électrons secondaires libérés sur elle se dirigent vers l'électrode précédente qui est à la terre et non pas vers la cage de FARADAY. Le spectre de masse, c'est-à-dire le graphique où le courant

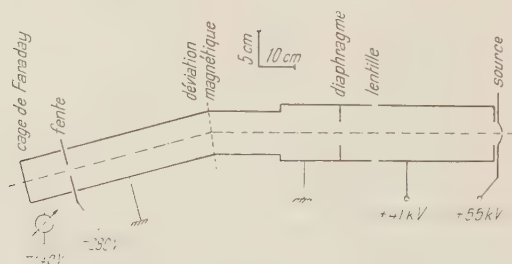


Fig. 8.

Spectrographe de masse.

ionique i reçu par la cage de FARADAY est reporté en ordonnée et le courant de magnétisation J en abscisse, présente des maxima distincts mais vu le faible pouvoir de résolution, les différentes sortes d'ions se recouvrent un peu. Pour estimer la part qu'il faut soustraire à chaque maximum nous avons procédé de la façon suivante: En représentant le spectre de masse sur papier logarithmique dans les deux coordonnées, toutes les sortes d'ions, si elles étaient seules, donneraient des courbes de forme géométrique identique tant que le champ magnétique reste proportionnel au courant d'aimentation. (C'est bien le cas puisque nous n'avons jamais atteint la saturation de fer.) Dans la fig. 9 est représenté le spectre présentant le maximum le plus distinct, celui de l'hydrogène pur. Sur ce graphique les ions H_3^+ donnent une courbe avec une branche asymptotique rectiligne. L'asymptote dessinée en pointillé passe par le sommet de la courbe. L'asymptote que donnerait une autre sorte d'ions, si elle était seule, se construit par simple déplacement

parallèle. Le résidu que donne par exemple les ions H_2^+ à l'endroit du maximum de H_3^+ se lit directement sur le graphique, soit $0,7 \mu\text{A}$. Cette valeur est à soustraire du maximum de H_3^+ . De cette façon-là nous avons corrigé tous les courants ioniques.

La mesure de la pression minimum de fonctionnement se fait comme suit: Nous intercalons dans l'arrivée de gaz un tube capillaire de 1,8 mm \varnothing dans lequel nous faisons couler une goutte d'huile. L'avancement de la goutte d'huile détermine le volume déplacé. Il faut décompter environ 10% du volume à cause de l'adhé-

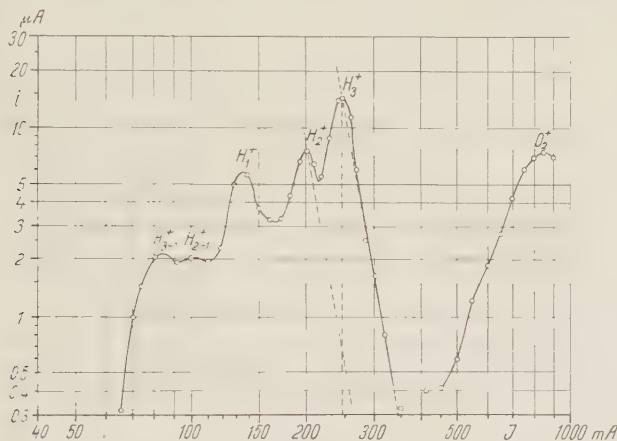


Fig. 9.
Spectre de masse de l'hydrogène.

rence de l'huile. La vitesse de déplacement nous donne le débit D . Connaissant le débit d de l'écoulement du gaz à travers l'orifice de la source d'ions nous aurons la pression dans celle-ci :

$$p = P \frac{D}{d}$$

où P est la pression dans le tube capillaire. Le débit d est donné par la formule de Knudsen^{6) 7)}

$$d = 0,37 \cdot r^2 \sqrt{\frac{29}{M}}$$

où r est le rayon de l'orifice, 29 la masse moléculaire moyenne de l'air et M celle du gaz. Cette formule est valable tant que la pression dans le tube accélérateur d'ions est négligeable par rapport à la pression dans la source. Nous la négligerons puisqu'elle est au moins 30 fois plus petite (10^{-4} mm Hg mesuré avec un manomètre Philips).

et que la façon de mesurer le débit dans le tube capillaire n'est pas très précise.

Dans le tableau I figurent les pressions minima de fonctionnement en microns, le pourcentage des différents ions et le courant ionique total pour les différentes compositions du gaz.

Tableau I.

gaz	P_{\min}	H_1^+ resp. D_1^+	H_2^+ resp. D_2^+	H_3^+ resp. D_3^+	O_2^+ et autre	i_{tot}
H_2	8,2 μ	16,5%	18,5%	42,7%	22,3%	32 μA
D_2	10,6	14	24	49	13	39
94% H_2 + 6% O_2	2,9	15	23,7	9,3	52	36
94% D_2 + 6% O_2	4,1	11	27	13,5	49	35
85% H_2 + 15% O_2	3,7	11	22	3,5	63,5	29,5
H_2O	2,7	9,2	0,6	—	90	41
D_2O	>2,7	11	1,5	—	87,5	28

Le courant ionique total reste à peu près le même pour tous les gaz. Le courant moyen de décharge est de 6 mA.

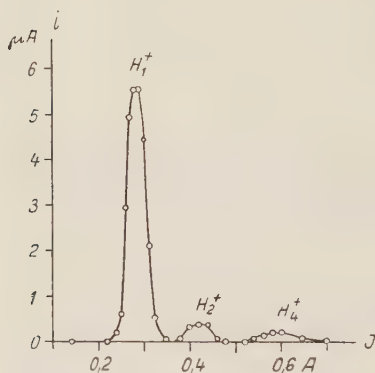


Fig. 10.

Spectre de masse de l'eau.

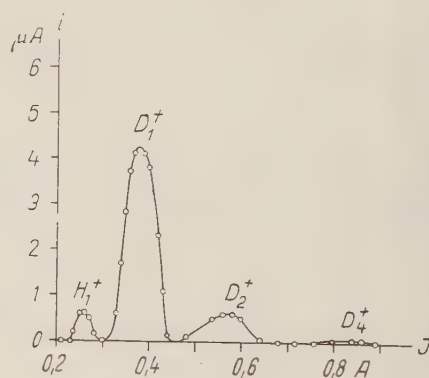


Fig. 11.

Spectre de masse de l'eau lourde.

Les spectres de la vapeur d'eau et d'eau lourde sont particulièrement intéressants parce que les ions légers sont représentés presque exclusivement par les protons resp. les deutérons. Nous donnons dans les fig. 10 et 11 les spectres obtenus avec une déviation magnétique de 25° .

Discussion.

Il est étonnant de constater que la présence d'impuretés dans l'hydrogène influence fortement la composition du spectre de masse. L'hydrogène resp. le deutérium est préparé par réduction de la vapeur d'eau sur du fer incandescent, comme nous l'avons dit plus haut, et conservé dans un ballon contenant un peu de P_2O_5 pour éliminer l'humidité. Le ballon est relié à la soupape de FOWLER par un tuyau de caoutchouc très court, de 2 mm de diamètre. Même en prenant la précaution de sécher le tuyau en le chauffant longuement sous vide, le spectre contient encore 12% d'ions lourds tels que O_2^+ . L'addition d'oxygène entraîne un accroissement rapide du pourcentage d'ions lourds, contrairement à ce que P. LORRAIN²⁾ a mesuré (1% avec 10% d'oxygène)*). Il est peu probable que les ions d'oxygène soient engendrés par les ions H^+ , H_2^+ et H_3^+ entrant en collision avec les molécules d'oxygène existant dans le tube accélérateur. En voici les raisons: On constate aisément la formation d'ions ayant une masse apparente de $\frac{1}{2} H$ et $\frac{1}{3} H$ (voir fig. 9) dénommés par les symboles H_{2-1}^+ et H_{3-1}^+ ⁸⁾. Ce sont des protons provenant de H_2^+ et H_3^+ par choc avec les molécules du gaz ambiant. Ces protons continuent leur course avec la même vitesse que les H_2^+ et H_3^+ , sans déviation appréciable lors du choc. Ils restent ainsi dans les conditions de focalisation tandis que les ions d'oxygène produits par ionisation dans le tube accélérateur possèdent à leur origine une énergie et une direction quelconques. Ils ne seront pas focalisés sur la fente de la cage de FARADAY, donc pas mesurés. Une exception pour ceux qui sont engendrés à proximité de l'orifice de la source, là où le potentiel est encore faible par rapport à 22 kV. Ce domaine est petit mais à cet endroit la pression est relativement élevée d'où une probabilité d'ionisation plus grande que dans le reste du tube. Nous avons éliminé cette hypothèse comme suit: En faisant varier la pression dans le tube ionique soit en augmentant l'admission de gaz, soit en changeant le diamètre de l'orifice, le pourcentage en ions O_2^+ et autres ions lourds reste le même, abstraction faite des erreurs de mesures. (Le changement du diamètre de l'orifice entraîne un changement semblable de l'admission de gaz si la pression dans la source d'ions est maintenue constante). Nous relatons encore ici que l'augmentation de la pression dans la source entraîne un accroissement des ions H^+ et H_3^+ au détriment de H_2^+ . Monsieur P. LORRAIN²⁾ qui a approfondi les mesures dans ce sens trouve le même effet.

*) Dans une lettre du 22 novembre 1948 Monsieur P. LORRAIN a l'obligeance de me faire la remarque suivante: Le faisceau d'électrons en sens inverse qui accompagne toujours un faisceau ionique peut vaporiser la cathode, ce qui donnerait comme ions lourds des ions de fer. par ex. Fe^{++} de masse spécifique 28.

Conclusion.

Malgré la grande part d'ions d'oxygène et d'autres ions étrangers il est avantageux d'ajouter environ 6% d'oxygène au deutérium parce que la pression minimum de fonctionnement se trouve fortement abaissée, d'où une consommation de deutérium beaucoup plus faible, soit 36 cm³ au lieu de 110 cm³ par heure. Le tube ionique est vidé au moyen d'une pompe à diffusion de vapeur d'huile de 200 l/sec. La présence de vapeur d'huile dans la source d'ions a certainement une importance dans la formation d'ions étrangers.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à Monsieur le professeur WEIGLE pour l'intérêt et les encouragements qu'il nous a accordés.

Institut de Physique de l'Université, Genève.

Bibliographie.

- ¹⁾ F. M. PENNING et J. H. A. MOUBIS, *Physica* **4**, 1190 (1937).
- ²⁾ PAUL LORRAIN, *Canadian J. of Res.* **25**, A, 338 (1947).
- ³⁾ *Handb. d. Physik* **23**/1, 118 (1933).
- ⁴⁾ G. SCHNEIDER, *Ann. d. Physik* **11**, 357 (1931).
- ⁵⁾ FOWLER, *Rev. Scient. Instr.* **6**, 26 (1935).
- ⁶⁾ KNUDSEN, *Ann. d. Physik* **28**, 75 (1909).
- ⁷⁾ H. M. SULLIVAN, *Rev. Scient. Instr.* **19**, 1 (1948).
- ⁸⁾ E. FRIEDLÄNDER, H. KALLMANN, W. LASAREFF, B. ROSEN, *Z. Physik* **76**, 60 (1932).

Gravitationstheorie und Elektrodynamik¹⁾

von W. Scherrer.

(21. XII. 1948.)

Einleitung.

Bei der Anwendung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} R = -\kappa T_{\varrho\sigma} \quad (1)$$

ist man immer noch auf den phänomenologischen Energietensor

$$\left. \begin{aligned} T_{\varrho\sigma} &= \frac{p_{\varrho} p_{\sigma}}{\mu} \\ \mu &= \sqrt{p_{\varrho} p^{\varrho}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

angewiesen, da es bis heute nicht gelungen ist, den Tensor $T_{\varrho\sigma}$ so zu gestalten, dass er auch die Materiekräfte in befriedigender Weise zum Ausdruck bringt. Nachdem es in den Jahren 1915–16 HILBERT gelungen war, die Miesche Theorie der Materie auf die Einsteinsche Gravitationstheorie zu übertragen, hoffte man auf eine günstige Entwicklung. Inzwischen hat aber die Skepsis wieder überhand genommen.

Bei einer neuerlichen Beschäftigung mit diesen Dingen habe ich die unvermutete Feststellung gemacht, dass in den Grundlagen der Mieschen Theorie ein Fehler steckt. Die Diskussion über die Miesche Theorie ist also noch nicht abgeschlossen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun ein doppelter: Einmal soll der erwähnte Fehler aufgedeckt werden. Weiter aber werde ich eine neue Variante der Mieschen Theorie angeben. In derselben lässt sich das zentralsymmetrische und statische Feld exakt bestimmen und liefert eine endliche Selbstenergie.

¹⁾ Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit wurde am 21. Mai 1948 der Mathematischen Vereinigung in Bern vorgetragen.

§ 1. Zur Mieschen Theorie.

In der Hilbertschen Fassung kann sie charakterisiert werden durch das Wirkungsprinzip

$$\delta \int (R + \kappa M) \sqrt{-G} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (3)$$

wobei die materielle Wirkungsfunktion M abhängt von den elektromagnetischen Potentialen Φ_σ , den zugehörigen Feldstärken

$$F_{\sigma\tau} = \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\tau}$$

und den Komponenten $G_{\sigma\tau}$ des Masstensors, *nicht* aber von den Ableitungen der $G_{\sigma\tau}$. Um einen Überblick über die in Betracht kommenden Wirkungsfunktionen zu erhalten, muss man eine Basis für das durch die Grössen Φ_σ , $F_{\sigma\tau}$, $G_{\sigma\tau}$ bestimmte Invariantensystem ermitteln. Da die Ableitungen der $G_{\sigma\tau}$ nicht vorkommen, darf man diese Grössen in orthogonaler Gestalt $G_{\sigma\tau} = \delta_{\sigma\tau}$ annehmen.

Jetzt handelt es sich nur noch darum, eine Invariantenbasis für einen Vektor Φ_σ und einen alternierenden Tensor $F_{\sigma\tau}$ in einem Euklidischen Raum gerader Dimensionszahl zu finden. Zu dem Zweck interpretieren wir $F_{\sigma\tau}$ geometrisch als Matrix einer infinitesimalen orthogonalen Transformation.

$$\dot{x}_\sigma = F_{\sigma\tau} x_\tau \quad (4)$$

Diese Interpretation ist orthogonalinvariant. Nun kann man mit den Methoden der linearen Algebra zeigen, dass ein orthogonales Koordinatensystem existiert, in welchem nur die Komponenten

$$F_{01} = -F_{10}, F_{23} = -F_{32}, F_{45} = -F_{54}, \dots$$

von Null verschieden sein können. $F_{\sigma\tau}$ erhält damit als Matrix die Gestalt

$$|F_{\sigma\tau}| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & & & \\ -b_1 & 0 & & & \\ & & 0 & b_2 & \\ & & -b_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 & b_n \\ & & & & & -b_n & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

wobei in allen Leerstellen Nullen einzutragen sind. Die neuen Komponenten b_i resp. 0 sind einzeln invariant gegenüber Drehungen

in den Ebenen $(0, 1), (2, 3), \dots (2n-2, 2n-1)$. Also darf man durch derartige Drehungen dem neuen Vektor Φ_q noch die Gestalt

$$(\Phi_q) = (a_1, 0; a_2, 0; \dots a_n, 0) \quad (6)$$

geben. Nun betrachten wir eine Serie von Vektoren

$$\Psi_{1\lambda}, \Psi_{2\lambda}, \Psi_{3\lambda}, \dots$$

und Tensoren

$$F_{1\lambda\mu}, F_{2\lambda\mu}, F_{3\lambda\mu}, \dots$$

die folgendermassen definiert sind:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1\lambda} &= \Phi_\lambda \\ \Psi_{2\lambda} &= F_{\lambda\alpha} \Phi_\alpha \\ \Psi_{3\lambda} &= F_{\lambda\alpha} F_{\alpha\beta} \Phi_\beta \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und

$$\left. \begin{aligned} F_{1\lambda\mu} &= F_{\lambda\mu} \\ F_{2\lambda\mu} &= F_{\lambda\alpha} F_{\alpha\mu} \\ F_{3\lambda\mu} &= F_{\lambda\alpha} F_{\alpha\beta} F_{\beta\mu} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ihre Betragsquadrate sind

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \Psi_{1\lambda} \Psi_{1\lambda}; & F_1 &= \frac{1}{2} F_{1\lambda\mu} F_{1\lambda\mu} \\ J_2 &= \Psi_{2\lambda} \Psi_{2\lambda}; & F_2 &= \frac{1}{2} F_{2\lambda\mu} F_{2\lambda\mu} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Führt man hier nun die spezialisierten Tensoren (5) und (6) ein unter Verwendung der Abkürzungen

$$A_i = a_i^2, \quad B_i = b_i^2, \quad (10)$$

so findet man

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \Sigma A_i \\ J_2 &= \Sigma A_i B_i \\ J_3 &= \Sigma A_i B_i^2 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \Sigma B_i \\ F_2 &= \Sigma B_i^2 \\ F_3 &= \Sigma B_i^3 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) ist ersichtlich, dass die bis zum Index n geführten Serien (9) eine unabhängige Basis von $2n$ Invarianten bilden.

In der Literatur wird als Basis meist das nur für $2n = 4$ definierte System

$$(J_1, F_1, J_2, J_2^*) \quad (13)$$

angegeben. Dabei ist J_2^* definiert durch

$$\Psi_{2\lambda}^* = F_{*\lambda\alpha} \Phi_\alpha; \quad J_2^* = \Psi_{2\lambda}^* \Psi_{2\lambda}^* \quad (14)$$

wo $F_{*\lambda\mu}$ den zu $F_{\lambda\mu}$ dualen Tensor bedeutet.

Bei der obigen Spezialisierung erhält man dann die Tafel

$$\begin{aligned} J_1 &= A_1 + A_2; & J_2 &= A_1 B_1 + A_2 B_2 \\ F_1 &= B_1 + B_2; & J_2^* &= A_1 B_2 + A_2 B_1, \end{aligned} \quad (15)$$

der man ohne weiteres die Identität

$$J_2 + J_2^* \equiv J_1 F_1 \quad (16)$$

entnimmt. Das System (13) ist also keine Basis.

Richtige Basen findet man bei WEYL¹⁾ und BORN²⁾. Doch bin ich nirgends auf einen Hinweis gestossen, dass die meist zitierte Miesche Basis fehlerhaft sei. Da infolge dieses Fehlers die Miesche Theorie nicht richtig beurteilt wird, habe ich die Sache zur Sprache gebracht.

Aus (7), (8) und (9) erhalten wir also für $2n = 4$ die für die Anwendung in der Physik in Betracht kommende Basis

$$\begin{aligned} J_1 &= \Phi_\lambda \Phi_\lambda \\ J_2 &= F_{\lambda\alpha} \Phi_\alpha F_{\lambda\beta} \Phi_\beta \\ F_1 &= \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \\ F_2 &= \frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} F_{\alpha\mu} F_{\lambda\beta} F_{\beta\mu} \end{aligned} \quad (17)$$

Schon MIE erkannte, dass nach den Erfahrungen an elektrischen Feldern diejenigen Wirkungsfunktionen den Vorrang verdienen, die nicht explizite von den Potentialen abhängen. MIE stand also nur die eine Funktion F_1 zur Verfügung, während die richtige Basis dazu noch F_2 liefert. Hieraus ersieht man den hemmenden Einfluss der falschen Basis (13).

¹⁾ Raum, Zeit und Materie; 4. Aufl., Berlin 1921, S. 190.

²⁾ Annales de l'Institut Henri Poincaré; Vol. VII, 1937, S. 180.

§ 2. Eine spezielle Wirkungskfunktion.

Entsprechend der Schlussbemerkung von § 1, beschränken wir uns auf Wirkungskfunktionen, die aus F_1 und F_2 allein aufgebaut sind. Wir verlassen jetzt die orthogonale Schreibweise und kehren wieder zum allgemeinen Linienelement

$$ds^2 = G_{\sigma\sigma} dx_\sigma dx_\sigma \quad (18)$$

vom Trägheitsindex 3 zurück.

F_1 und F_2 sind dann zu schreiben als

$$F_1 = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^{\mu\lambda} \quad (19)$$

und

$$F_2 = \frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} F^{\alpha\mu} F_{\mu\beta} F^{\beta\lambda} \quad (20)$$

Nebenbei bemerkt wird die Übersicht etwas erleichtert, wenn man noch die Invariante

$$F^* = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^{*\mu\lambda} \quad (21)$$

heranzieht. Auf Grund der Definition des dualen Tensors $F^{*\mu\lambda}$ ergibt sich¹⁾ ihr expliziter Ausdruck zu

$$F^* = - \frac{F_{01} F_{23} + F_{02} F_{31} + F_{03} F_{12}}{\sqrt{-G}} \quad (22)$$

Mit Hilfe der Spezialisierungen (5) und (6) des vorigen Paragraphen kann man feststellen, dass die Identität

$$F_2 \equiv F_1^2 + 2 F^{*2} \quad (23)$$

besteht.

Bekanntlich liefert das Wirkungsprinzip (3) die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum, wenn man für M die Funktion F_1 wählt. Als naheliegende Verallgemeinerung ergibt sich daher der Ansatz

$$M \equiv F_1 + \varepsilon F_2 \quad (24)$$

wo ε eine kleine Konstante ist, der zufolge der Einfluss von F_2 nur in der Nähe des Feldzentrums merklich wird.

Durch (3) und (24) ist die zu lösende Aufgabe vollkommen bestimmt. Der erste in allen Fällen zu empfehlende Schritt zu ihrer

¹⁾ PAULI, Relativitätstheorie, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, V, 19; 1920, S. 581.

Lösung besteht darin, dass man die in $R \sqrt{-G}$ steckende Divergenz durch partielle Integration wegschafft und damit (3) auf die Variationsaufgabe

$$\delta \int (Q + \kappa M) \sqrt{-G} dx = 0 \quad (25)$$

reduziert, wobei abkürzend

$$dx = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (26)$$

gesetzt wurde und Q gegeben ist durch

$$Q \equiv G^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}). \quad (27)$$

Nun spezialisieren wir die Aufgabe auf den statischen zentral-symmetrischen Fall. Wir wählen zu dem Zweck das Schwarzschildsche Linienelement

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - g^2 dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (28)$$

wobei f und g Funktionen des Radius r sind. Für die Potentiale haben wir zu setzen

$$\Phi_0 = \Phi(r), \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0. \quad (29)$$

Die Berechnung liefert

$$F_1 = \left(\frac{\Phi'}{fg} \right)^2; \quad F^* = 0, \quad (30)$$

und es folgt aus (23) und (24)

$$\mu = \frac{\Phi'^2}{f^2 g^2} + \varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^4 g^4}, \quad (31)$$

wobei der Strich die Ableitung nach r anzeigt. Für Q ergibt sich der schon für die klassische Lösung benötigte Wert

$$Q = \frac{2}{r^2} \left(1 + \frac{2rf' + f}{fg^2} \right)^1. \quad (32)$$

Mit

$$\sqrt{-G} = fgr^2 \sin \vartheta \quad (33)$$

geht also (25) nach Weglassung der Winkelvariablen und der Zeit über in

$$\delta \int \left\{ 2 \left(fg + \frac{2rf' + f}{g} \right) + \kappa r^2 \left(\frac{\Phi'^2}{fg^2} + \varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^3 g^3} \right) \right\} dr = 0. \quad (34)$$

1) Dabei ist eine für Polarkoordinaten notwendige Ergänzung um $2/r^2$ schon beigelegt.

Die sukzessive Variation der Funktionen f , g , Φ liefert nun die Differentialgleichungen

$$4 \left(\frac{r}{g} \right)' - 2 \left(g + \frac{1}{g} \right) + \kappa r^2 \left(\frac{\Phi'^2}{f^2 g} + 3 \varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^4 g^3} \right) = 0, \quad (35)$$

$$4 \frac{r f'}{g^2} - 2 f \left(1 - \frac{1}{g^2} \right) + \kappa r^2 \left(\frac{\Phi'^2}{f g^2} + 3 \varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^3 g^4} \right) = 0, \quad (36)$$

$$2 \kappa \left[r^2 \left(\frac{\Phi'}{f g} + 2 \varepsilon \frac{\Phi'^3}{f^3 g^3} \right) \right]' = 0. \quad (37)$$

Die Kombination

$$f(35) - g \cdot (36) \equiv -4 r \cdot \frac{(fg)'}{g^2} = 0$$

stimmt mit der klassischen Lösung überein und liefert

$$f g = 1, \quad (38)$$

wo rechts schon die Konstante zu 1 angenommen ist, damit im Unendlichen das Euklidische Linienelement herauskommt. Die Gleichung (37) liefert hierauf

$$\Phi' + 2 \varepsilon \Phi'^3 = \frac{A}{r^2}, \quad (39)$$

wo ein positives A einer negativen Ladung vom Betrage A entspricht. Wählen wir

$$\varepsilon > 0 \quad (40)$$

so wird Φ' eine monoton fallende Funktion der positiven Distanz r .

Aus (39) ist schon ersichtlich, weshalb eine endliche Totalenergie resultieren wird. Die Feldstärke Φ' wird für grosse r klein von der Ordnung r^{-2} , wie es der klassischen Lösung entspricht, für kleine r aber gross von der Ordnung $r^{-2/3}$, was der Konvergenz des Energieintegrals keinen Eintrag tun wird.

Vermittels der Kombination $f \cdot (35) + g \cdot (36)$ erhält man schliesslich wegen (38)

$$[r(1 - f^2)]' = \frac{\kappa}{2} (\Phi'^2 + 3 \varepsilon \Phi'^4) r^2,$$

und durch Integration folgt

$$r(1 - f^2) = C + \frac{\kappa}{2} \int_0^r (\Phi'^2 + 3 \varepsilon \Phi'^4) \varrho^2 d\varrho. \quad (41)$$

Stellt man sich nun auf den Standpunkt, dass die Energie rein elektrischer Natur sei, so darf für verschwindende Feldstärken keine Gravitationswirkung erfolgen. Nach der Form, welche Einstein der

Gravitationstheorie gegeben hat, folgt daraus weiter, dass dann das Linienelement Euklidische Gestalt annehmen muss. Auf obige Gleichung angewendet heisst dies, dass aus $\Phi' = 0$ muss folgen $f^2 = 1$. Somit ergibt sich

$$C = 0. \quad (42)$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$\Psi \equiv \Phi'^2 + 3\varepsilon \Phi'^4, \quad (42)$$

sowie die Konstante

$$4m = \kappa \int_0^\infty \Psi r^2 dr \quad (44)$$

ein, so erhalten wir schliesslich

$$f^2 = 1 - \frac{2m - \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \psi \varrho^2 d\varrho}{r}. \quad (45)$$

§ 3. Masse und Energie.

Unter der Annahme, dass die Gravitationstheorie auch für die kleinen Energieknoten des elektromagnetischen Feldes zuständig sei, muss die Konstante m als Gravitationsradius interpretiert werden. Die Formel (45) zeigt, dass in grossen Entfernungen vom Zentrum m allein massgebend ist für die Gestalt des Linienelements, da dann das Integral beliebig klein wird.

Wir wollen nun direkt berechnen, wie m mit der Totalenergie

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty T_0^0 \sqrt{-G} dr d\vartheta d\varphi \quad (46)$$

des elektromagnetischen Feldes zusammenhängt.

Der Energietensor $T_{\varrho\sigma}$ kann berechnet werden aus der Relation

$$\delta(M\sqrt{-G}) = \sqrt{-G} T_{\varrho\sigma} \delta G^{\varrho\sigma} \quad (47)$$

Setzen wir

$$\delta(F_1\sqrt{-G}) = \sqrt{-G} A_{\varrho\sigma} \delta G^{\varrho\sigma} \quad (48)$$

so folgt mit Hilfe der Formel

$$\delta\sqrt{-G} = -\frac{1}{2}\sqrt{-G} G_{\varrho\sigma} \delta G^{\varrho\sigma}$$

auf Grund von (24), (23) und (22)

$$T_{\varrho\sigma} = (1 + 2\varepsilon F_1) A_{\varrho\sigma} + \frac{1}{2}\varepsilon F_2 G_{\varrho\sigma}. \quad (49)$$

Hier ist $A_{\varrho\sigma}$ offenbar der dem klassischen Falle $\varepsilon = 0$ entsprechende Energietensor

$$A_{\varrho\sigma} = F_{\varrho\lambda} G^{\lambda\mu} F_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} F_1 G_{\varrho\sigma}. \quad (50)$$

In (49) eingesetzt ergibt dies

$$T_{\varrho\sigma} = (1 + 2 \varepsilon F_1) F_{\varrho\lambda} G^{\lambda\mu} F_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} (M - 4 \varepsilon F^{*2}). \quad (51)$$

In dem von uns betrachteten Falle ist nach (29) nur eine Feldstärke nicht Null, nämlich

$$F_{01} = -\Phi' \quad (52)$$

Mit Rücksicht auf (28), (30) und (38) findet man aus (50) vorerst

$$A_{00} = \frac{1}{2} \Phi'^2 f^2.$$

Weiter folgt dann aus (49) unter Beachtung von (23)

$$T_{00} = \frac{1}{2} (\Phi'^2 + 3 \varepsilon \Phi'^4) f^2,$$

und somit ist

$$T_0^0 = \frac{1}{2} (\Phi'^2 + 3 \varepsilon \Phi'^4). \quad (53)$$

Mit Rücksicht auf (33) und (38) folgt also schliesslich aus (46)

$$E = 2 \pi \int_0^\infty (\Phi'^2 + 3 \varepsilon \Phi'^4) r^2 dr. \quad (54)$$

Führen wir dieses Integral in (44) ein, so erhalten wir für den Gravitationsradius m die Formel

$$m = \frac{\varkappa}{8 \pi} E. \quad (55)$$

Um von hier zu der dem m entsprechenden Masse μ zu gelangen, muss man annehmen, dass es ungeladene Teilchen gibt, auf welche unser Feld nur gravitierend wirkt. Dann treten die Einsteinschen Beziehungen zwischen \varkappa und der Newtonschen Gravitationskonstanten k , resp. zwischen m und μ in Kraft:

$$\varkappa = \frac{8 \pi}{c^4} k \quad (56)$$

und

$$m = \frac{\mu}{c^2} k. \quad (57)$$

Aus (55) folgt hierauf die Einsteinsche Äquivalenz zwischen Masse und Energie:

$$\mu = \frac{E}{c^2}. \quad (58)$$

Um nun Auskunft über die Energieverteilung zu erhalten, berechnen wir diejenige Energie E_r , welche in einer Kugel vom Radius r um das Zentrum enthalten ist:

$$E_r = 2\pi \int_0^r (\Phi'^2 + 3\varepsilon \Phi'^4) \varrho^2 d\varrho. \quad (59)$$

Zu dem Zwecke haben wir die Gleichung (39) heranzuziehen:

$$\Phi' + 2\varepsilon \Phi'^3 = \frac{A}{r^2}. \quad (39)$$

Machen wir hier die Substitution

$$\Phi'(r) = \frac{z}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad (60)$$

so folgt

$$r = \sqrt[4]{2\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{A}{z - z^3}}, \quad (61)$$

und die Berechnung liefert

$$E_r = \frac{\pi A^{3/2}}{2\sqrt[4]{2\varepsilon}} \int_z^\infty \frac{(2 + 3\xi^2)(1 + 3\xi^2) d\xi}{(1 + \xi^2)^2 \sqrt{\xi(1 + \xi^2)}}. \quad (62)$$

Für die weitere Berechnung braucht man die elliptischen Integrale 1. Gattung

$$J_p(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^p \sqrt{\xi(1 + \xi^2)}}, \quad (63)$$

($p = 0, 1, 2$),

zwischen denen die Rekursion

$$J_p = \frac{4p-3}{4p-2} J_{p-1} + \frac{1}{(2p-1)(1+z^2)^{p-1}} \sqrt{\frac{z}{1+z^2}}. \quad (64)$$

besteht. Führt man noch die Konstante

$$K = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(1+z^2)}} = 2 \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = 2 \cdot 1,8541 \quad (65)$$

ein, so findet man

$$E_r = \frac{\pi A^{3/2}}{\sqrt[4]{2\varepsilon}} \left\{ \frac{8}{3} (K - J_0) + \frac{10 + 11 z^2}{3(1 + z^2)} \sqrt{\frac{z}{1 + z^2}} \right\}. \quad (66)$$

Für $r = \infty$ d. h. $z = 0$ folgt speziell

$$E = \frac{8\pi K}{3} \cdot \frac{A^{3/2}}{\sqrt[4]{2\varepsilon}}. \quad (67)$$

Der Vergleich mit (58) liefert

$$\mu c^2 = \frac{8\pi K}{3} \cdot \frac{A^{3/2}}{\sqrt[4]{2\varepsilon}}. \quad (68)$$

In der Theorie erscheinen alle Ladungswerte als gleichberechtigt, wie es ja auf klassischer Grundlage kaum anders zu erwarten ist. Gemäss der Erfahrung setzen wir nun für A die Elementarladung ein:

$$A = e. \quad (69)$$

Da nach dem Sinne unseres Ansatzes ε als universelle Konstante aufgefasst werden muss, ist nun durch (68) die Masse μ bestimmt. Es folgt also, dass im Rahmen des vorliegenden Ansatzes nur zwei zentralsymmetrische Teilchen zugelassen werden können. Dieselben haben entgegengesetzte Ladung und gleiche Masse. Alle übrigen Teilchen müssten also andere Struktur haben oder zusammengesetzt sein. Identifizieren wir das berechnete Feld mit einem Elektron, so ergibt sich aus (68) und (69) der Wert von ε :

$$2\varepsilon = \left(\frac{8\pi K e \sqrt{e}}{3\mu c^2} \right)^4 = 2,539 \cdot 10^{-23} \text{ gr}^{-1} \text{ cm sec}^{-2}. \quad (70)$$

Führt man diesen Wert in (66) ein, so folgt

$$E_r = \mu c^2 \frac{\mu c^2}{K} \left\{ J_0(z) - \frac{10 + 11 z^2}{8(1 + z^2)} \sqrt{\frac{z}{1 + z^2}} \right\}. \quad (71)$$

Zum Zwecke der Abschätzung beachte man die leicht zu beweisende Relation

$$J_0(1) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1+\zeta^2)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1+\zeta^2)}} = \frac{1}{2} K. \quad (72)$$

Zieht man jetzt (61) in der Gestalt

$$r = \frac{\sqrt{e} \sqrt[4]{2\varepsilon}}{\sqrt{z + z^3}} = \frac{8\pi K}{3\sqrt{z + z^3}} \cdot \frac{e^2}{\mu c^2} \quad (73)$$

heran und setzt $z = 1$, so folgt: 75% der Energie liegen in einer Kugel vom Radius $r_1 = 6 \cdot 10^{-12}$ cm. Setzt man aber $z = 10^{-2}$, so folgt: 98% der Energie liegen in einer Kugel von $8 \cdot 10^{-11}$ cm Radius.

Hätten wir das Feld mit einem Proton identifiziert, so ergäben sich für die entsprechenden Radien die Werte $3 \cdot 10^{-15}$ cm und $4 \cdot 10^{-14}$ cm, die aus empirischen Gründen wohl zu klein sind.

Schlussbemerkung.

In der vorliegenden Variante der Mieschen Theorie ist der Zusammenhang zwischen Gravitation und Elektrizität ganz einseitig. Legt man nämlich ein Euklidisches Linienelement $f = g = 1$ zugrunde, so ergibt sich nach (39) genau das gleiche elektrostatische Potential und nach (59) die gleiche Energieverteilung. Die Struktur des Teilchens erscheint also im Wesentlichen als eine rein elektrische Angelegenheit. Die Gravitation dagegen erscheint als passive Reaktion des metrischen Feldes, die lokal nach (45) wohl bis zur Entartung des Linienelements $f = 0, g = \infty$ führt, in grösseren Abständen aber fast unmerklich ist. Es liegt also ein exaktes Modell für die klassischen Einsteinschen Gravitationsgleichungen (1) vor.



W. J. Meyer

Edgar Meyer, der Vorstand des Physikalischen Instituts der Universität Zürich, beging am 5. März 1949 seinen siebzigsten Geburtstag. Geboren in Bonn a. Rhein studierte er in München und Berlin, wo er bei Emil Warburg mit einer Abhandlung „Über die Absorption der ultravioletten Strahlen in Ozon“ promovierte. 1907 ging er als Assistent zu Kleiner nach Zürich, habilitierte sich dort 1908, ging 1909 als Assistent zu Stark nach Aachen und wurde 1911 Extraordinarius (nach Ablehnung des Rufes nach La Plata) in Tübingen. 1916 erhielt er gleichzeitig die Rufe nach Goettingen (Rieckes Lehrstuhl) und nach Zürich – er wählte letzteren als Nachfolger seines früheren Chefs Kleiner.

In Berlin – bei Warburg und Drude – wandten sich seine Interessen bald radioaktiven Problemen zu. Vor allem begann er – zunächst mit E. Regener – seine für die damalige Entwicklung fundamentalen Arbeiten über die radioaktiven Schwankungen, die in den beiden grossen Arbeiten über die Struktur der γ -Strahlen (1910, 1912) ihren Abschluss fanden. Das nächste Problem war die Frage nach der Existenz des elektrischen Elementarquantums. Ausgehend von der Untersuchung des lichtelektrischen Effekts an ultramikroskopischen Metallteilchen wurde eine Methode zur Prüfung des Stokes'schen Fallgesetzes entwickelt durch Untersuchung ein und desselben Teilchens unter verschiedenen Drucken, deren Ergebnisse für die Beurteilung aller ε -Bestimmungen ausschlaggebend wurden. Sodann wandte er sich Problemen der Gasentladung zu. Nach einer experimentell besonders schönen, kleinen Arbeit über die Entstehung der Kathodenstrahlen wurden Messungen über die magnetische Beeinflussung des Funkenpotentials und seine Abhängigkeit von Elektrodenmaterial und geringsten Gasverunreinigungen gemacht. Aus den späteren Züricher Jahren sind die Arbeiten seiner Schüler, insbesondere von Marcel Schein, über Resonanzstrahlung und Absorption (Hg 2537) von Atomstrahlen, sowie die Arbeiten über Ultraschall, z. Teil gemeinsam mit seinem Freunde Richard Bär, besonders hervorzuheben. Zahlreiche andere Untersuchungen sind in Doktorarbeiten seiner Schüler aus der

Tübinger und Züricher Zeit enthalten. Schliesslich kehrte er zu seiner ersten Liebe, der Ozonabsorption zurück, fand ein Loch in der Atmosphäre für $\lambda \approx 2144 \text{ \AA}$ und diskutierte die theoretisch zu erwartende Strahlungsintensität dieser Wellenlänge im Zusammenhang mit dem Problem der Gültigkeit des Beer'schen Gesetzes bei den atmosphärischen Gasen.

Diesem sachlichen Bericht seien einige persönliche, auf experimentellen Erfahrungen beruhende Worte angefügt.

Edgar Meyers Arbeiten und seine wissenschaftlichen Arbeiten zeichnen sich durch eines besonders aus: die absolute Sauberkeit. Ehe ein Versuch, eine Messung begann, wurde alles was von Siegellackklexen und Lötzinnpätzen, Drahtresten oder Werkzeug noch auf dem Tisch lag, entfernt. Die Versuchsanordnungen wurden mit peinlicher Ordnung aufgebaut und nach Benutzung mit Tüchern gegen Staub zugedeckt. Verblasstellen und Kittungen wurden auf das sauberste hergestellt, die Versuchsprotokolle bis ins kleinste vollständig geführt. Meyers grosse Arbeiten über die radioaktiven Schwankungen verlangten solche Vorsichtsmassregeln aber auch ganz besonders. Die heutige Physikergeneration weiss nichts mehr von den Tücken, gegen welche man beim Arbeiten mit den empfindlichsten Spiegelelektrometern kämpfen musste. Und wenn man sonst das Kriterium konstanter Instrumentausschläge für einen fehlerfreien Aufbau hat, so fehlt dieses bei der Messung von Schwankungen. Als Edgar Meyer nach seiner Berufung nach Tübingen seine Schwankungsmessungen wieder in Gang gebracht und mit gewissem Stolz Paschen gezeigt hatte, kam dieser zu mir ins Zimmer mit den Worten: „Ein sonderbarer Herr, dieser neue Professor! Er freut sich, wenn sein Elektrometer schwankt – ich bin glücklich, wenn mein Galvanometer still steht!“ Später aber wurde er doch überzeugt, dass diese Schwankungen etwas Reelles sind, eben weil er die unvergleichliche Sorgfalt und die Experimentierkunst Meyers schätzen gelernt hatte.

In lebhaftester Erinnerung ist mir Meyers Vorlesungstätigkeit. Wie so viele der jungen Experimentalphysiker dieser Zeit hatte er das Extraordinariat für theoretische Physik inne. Dies bedeutete: Ausarbeitung einer mehrsemestrigen vierstündigen Vorlesung. Er arbeitete dieselbe neben unermüdlichem Experimentieren mit grösster Sorgfalt aus und die Studenten lernten die klassische Theorie in wirklich brauchbarer Form. Er pflegte sämtliche Lehrbücher aller Sprachen über die einzelnen Gebiete kritisch durchzustudieren und kam glück-

strahlend morgens ins Institut, wenn er wieder einmal einen Autor erwischte hatte, der bei Maxwell oder Helmholtz abgeschrieben und gar etwas falsch verstanden hatte. Zu den schönsten Experimentalvorlesungen, die ich je hörte, gehörte seine Vorlesung über Elektronik, in der aber auch sämtliche Versuche mit Ionen, Elektronen und radioaktiven Strahlungen vorgeführt wurden; ich bin ewig dankbar, dass ich bei der Ausarbeitung helfen durfte – weil es schwer war, ihm alles recht zu machen!

Mit der ao. Professur für theoretische Physik war der Lehrauftrag für theoretische Meteorologie verbunden (so wie der Ordinarius Paschen die praktische Meteorologie durch regelmässiges Ablesen von Thermometern, Barometern und Hygrometern wahrnehmen musste!) – eine der wenigen bitteren Pillen, die Meyer in seiner akademischen Laufbahn schlucken musste. Meist waren 3 Hörer da; einmal wollte er spazieren gehen und gab mir 2 Mark, ich sollte diese zwei Hörern geben, damit sie mittags nicht kämen. Ich gab sie aber zwei anderen, damit sie kämen – noch sehe ich ihn mit Strohhut, Spazierstock und Zigarette siegesgewiss den Hörsaal betreten: Da sassen fünf Hörer, dazu die Institutshündin. Ein wütender Blick – und dann: „Meine Dame, meine Herren“, und er las.

Solche Erinnerungen zeigen seine Art – er war ein wunderbarer Kamerad, ernst und streng in der Arbeit, froh und lebenslustig auf der Kegelbahn, auf Spaziergängen und besonders an schönen Abenden, umsorgt von seiner lieben Frau in dem Häuschen auf dem Oesterberg. Wenn sich Tübinger Freunde dieser Jahre treffen, so werden stets „nicht für die Öffentlichkeit“ geeignete Erinnerungen lebendig. Heute vereinigen sie sich mit den Kollegen in dem Wunsch: *ad multos annos!*

WALTHER GERLACH

Zur Frage des Spins der π -Mesonen

von **Gregor Wentzel**

Institute for Nuclear Studies, University of Chicago

(19. I. 1949.)

Herrn Edgar Meyer zum 70. Geburtstag.

Es werden Effekte diskutiert, die zum Nachweis eines eventuellen Spins des π -Mesons dienen könnten.

Seit die Existenz mehrerer Mesonen-Arten experimentell sichergestellt ist¹⁾, hat die Frage, ob eine Identifizierung der beobachteten Teilchen mit den «Mesonen» der Yukawaschen Theorie der Kernkräfte möglich ist, einen neuen Sinn bekommen. Die schon länger bekannten μ -Mesonen, deren Masse rund 200 Elektronenmassen beträgt, kommen als Yukawa-Partikel nicht mehr in Betracht, nachdem durch die Versuche von CONVERSI, PANCINI und PICCIONI²⁾ festgestellt ist, dass ihre Wechselwirkung mit Atomkernen viel schwächer ist, als für die Träger der Kernkräfte angenommen werden muss. Dagegen besteht durchaus die Möglichkeit, dass die σ - und π -Mesonen als Yukawa-Teilchen anzusprechen sind; denn sie zeigen nicht nur, durch die häufige «Stern»-Erzeugung, eine starke Wechselwirkung mit der Kernmaterie, sondern auch ihre Masse von rund 300 Elektronenmassen passt sehr gut zur Reichweite der Kernkräfte, wie sie aus der Proton-Proton-Streuung bestimmt worden ist³⁾. Wir wollen daher versuchsweise den σ - und π -Mesonen die Eigenschaften von Yukawa-Mesonen zuschreiben, was insbesondere die Annahme ganzzahligen Spins einschliesst. Nach der Skalar- oder Pseudoskalartheorie wäre der Mesonspin 0, nach der Vektorthorie 1. Wenn der Spin nicht null ist, sind Polarisierungseffekte zu erwarten, die vielleicht einer Beobachtung zugänglich sind. Da jede Auskunft über den Mesonspin erwünscht ist, soll hier auf solche Möglichkeiten hingewiesen werden.

¹⁾ Vgl. C. M. G. LATTES, G. P. S. OCCHIALINI, C. F. POWELL, *Nature* **160**, 453 u. 486 (1947).

²⁾ M. CONVERSI, E. PANCINI, P. PICCIONI, *Phys. Rev.* **71**, 209 (1947); vgl. auch die theoretische Diskussion von E. FERMI, E. TELLER, V. WEISSKOPF, *Phys. Rev.* **71**, 314 (1947), E. FERMI, E. TELLER, *Phys. Rev.* **72**, 399 (1947).

³⁾ L. E. HOISINGTON, S. S. SHARE, G. BREIT, *Phys. Rev.* **56**, 884 (1939).

Nach der Vektormesonentheorie, die wir als Diskussionsgrundlage benutzen, gibt es zwei verschiedene Kopplungsansätze, nach denen – bei unrelativistischen Nukleongeschwindigkeiten – entweder nur die longitudinal – oder nur die transversal-polarisierten Mesonen mit den Nukleonen in Wechselwirkung stehen⁴⁾. Nach beiden Ansätzen besteht also eine ausgesprochene Spin-Bahn-Kopplung, die zu beobachtbaren Effekten Anlass geben könnte. Freilich ist auch eine Mischung der beiden Kopplungen (lineare Superposition mit beliebigen Koeffizienten) möglich, was zu einer Verringerung der Polarisierungseffekte führen würde.

Die Erzeugung der σ - und π -Mesonen erfolgt im Berkeley-Cyclotron durch Nukleon-Nukleon-Zusammenstösse, und dies dürfte auch in der Höhenstrahlung ein häufiger Prozess sein. Nach den genannten Theorien ist anzunehmen, dass die entstehenden Mesonen polarisiert sind, longitudinal oder transversal zu ihrer Bewegungsrichtung; der Polarisationsgrad wird in erster Linie von der Art der Meson-Nukleon-Kopplung abhängen und ausserdem eine Funktion der Stossenergien sein. Wenn die Mesonen, wie in der Berkeley-Anordnung, ein Magnetfeld H durchlaufen, so präzediert der Polarisationsvektor um die Feldachse mit der Winkelgeschwindigkeit $geH/2mc$ (e, m = Ladung und Masse des Mesons); g ist der theoretisch nicht bestimmte Landé-Faktor, der vermutlich die Grössenordnung 1 hat. Wenn es also gelingt, längs der Bahn des Mesons einen Effekt zu beobachten, der genügend stark polarisationsabhängig ist, so muss sich die Präzessionsbewegung in beobachtbarer Weise äussern, und der g -Faktor muss bestimmbar sein.

In den photographischen Emulsionen, die zum Nachweis der Mesonen verwendet werden, werden die Teilchen zunächst durch die elektrische Wechselwirkung mit der Materie verlangsamt; dieser Prozess, ebenso wie die gleichzeitige Vielfachstreuung, kann nicht in nennenswerter Weise polarisationsempfindlich sein. (Eine Ausnahme macht vielleicht die Coulombstreuung in schweren Atomen bei höheren Energien.) Am Ende der Reichweite sieht man die σ - oder π -Mesonen in «Sternen» enden, während die π^+ -Mesonen, welche die Gamow-Barriere nicht durchdringen können, in μ -Mesonen und neutrale Teilchen zerfallen. Die Depolarisation, die die Mesonen während ihrer Abbremsung erleiden, kann durch Vergleich mit dem gleichzeitigen Energieverlust abgeschätzt werden und ergibt sich als überraschend gering und belanglos⁵⁾. Im Falle der negativen Teilchen findet die letzte Einfangung im Coulombfeld

4) Vgl. z. B. G. WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943, § 14.

5) Diese Überlegung verdanke ich Herrn EDWARD TELLER.

eines Kernes und die Absorption im Kern selbst (nach FERMI und TELLER, l. c.) so schnell statt, dass für eine merkliche Depolarisation oder Präzession keine Zeit bleibt. Bei den positiven Mesonen dagegen ist zu bedenken, dass sie vor dem μ -Zerfall noch eine mittlere Lebensdauer von etwa 10^{-8} sec. haben⁶⁾.

Theoretisch ist es, sowohl bei der Sternerzeugung wie beim μ -Zerfall sehr wohl denkbar, dass eine starke Spin-Bahn-Kopplung zu einer Anisotropie in der Richtungsverteilung der entstehenden Teilchen – Sternpartikeln bzw. μ -Mesonen – Anlass gibt, so dass eine Bestimmung der Polarisationsrichtung und ihrer Änderung längs der π -Mesonbahn möglich erscheint. Im Falle der Sterne wird man eine solche Anisotropie am ehesten bei den längsten Protonspuren erwarten, aus der Erwägung heraus, dass deren Richtungen am wenigsten durch sekundäre Vorgänge im Kerninnern beeinflusst sein werden.

Andererseits ist an die Möglichkeit zu denken, dass ein π -Meson während der Dauer der Abbremsung, d. h. vor dem Ende der Reichweite, einen Stern erzeugt oder eine andere Kernwechselwirkung, wie eine nukleare Streuung (Weitwinkelstreuung), erleidet. Solche Prozesse müssen zwar ziemlich selten sein, selbst wenn die Wirkungsquerschnitte nicht viel kleiner als die geometrischen Kernquerschnitte sind; doch könnte hier schon eine grobe Statistik wichtige Aufschlüsse geben. Als Beispiel sei der folgende einfache Stern-erzeugungsprozess erwähnt:

positives Meson + Deuteron \rightarrow 2 Protonen;

die beiden in entgegengesetzten Richtungen auslaufenden Protonspuren sollten verhältnismässig leicht erkennbar sein, und schon wenige Aufnahmen könnten etwa zeigen, ob eine Anisotropie der Richtungsverteilung besteht. Allerdings kommen hierfür nur positive Mesonen in Betracht, die noch genug Energie besitzen, um die Gamow-Barriere des Deuterons zu überwinden. Ähnlich einfache Prozesse sind denkbar, je nachdem welche leichten Atome in photographisch empfindliche Schichten eingebaut werden können.

Der Wirkungsquerschnitt solcher nuklearer Prozesse, sofern sie genügend weit vor dem Ende der Reichweite des Mesons eintreten, ist nach den beiden eingangs erwähnten Vektormesonentheorien stark abhängig von dem Winkel, den die Spinrichtung mit der Bewegungsrichtung des Mesons bildet. Im Magnetfeld H dreht sich der Spinvektor, wie schon bemerkt, mit der Winkelgeschwindigkeit $geH/2mc$,

⁶⁾ Wenigstens ist dies die Lebensdauer der sternerzeugenden π -Mesonen gegenüber dem μ -Zerfall; vgl. J. R. RICHARDSON, Phys. Rev. **74**, 1720 (1948).

die Bewegungsrichtung dagegen mit der Winkelgeschwindigkeit eH/mc ; d. h. der Winkel zwischen beiden Richtungen ändert sich längs der Bahn des Mesons, ausser wenn $g = 2$ ist. Daher ist mit der Möglichkeit zu rechnen, dass der Wirkungsquerschnitt der nuklearen Prozesse merklich variiert, wenn man die photographische Registrierung an verschiedenen Punkten der Bahn vornimmt. Würde ein solcher Effekt beobachtet werden, so wäre dies ein Beweis für die Existenz eines Mesonspins, und aus quantitativen Daten wären Rückschlüsse zu ziehen auf die Art der Polarisation (longitudinal oder transversal), die Art der nuklearen Kopplung, und den Wert des g -Faktors.

Es ist klar, dass die vorstehenden Betrachtungen sehr spekulativ sind wegen der Unsicherheit der theoretischen Diskussionsgrundlage sowie auch der Einschätzung der experimentellen Möglichkeiten; sie mögen trotzdem nicht überflüssig sein in Anbetracht der Wichtigkeit der Frage nach dem Spin der neuen Teilchen.

**Die Absorption des Lichtes durch Sauerstoff
bei der Wellenlänge $\lambda = 2144$ ÅE. als Funktion des Druckes
im Intervall von 0,2 bis 130 kg/cm²**

von **Walter Heilpern.**

(28. I. 1949.)

A. Zusammenfassung.

Bei der in einem Absorptionskontinuum des Sauerstoffs liegenden Wellenlänge $\lambda = 2144$ ÅE wird versucht, die Absorption, die aus früheren Messungen bekannt ist, als Funktion des Druckes über ein grosses Intervall (von 0,2 bis 130 kg/cm²) einheitlich darzustellen.

Es wurde gefunden, dass die Formel:

$$E_p = (6,586 \pm 0,414) 10^{-5} p + (8,755 \pm 0,495) 10^{-5} p^2 \\ \pm (4,955 \pm 4,334) 10^{-8} p^3$$

(wobei E_p der Extinktionskoeffizienten für den Druck p in kg/cm² und die Schichtdicke $d = 1$ cm ist) die Experimente mit befriedigender Genauigkeit wiedergibt.

Der obigen Formel, die drei Konstanten enthält, wurde eine solche, mit nur zwei Konstanten, die also kein kubisches Glied in p aufweist, gegenübergestellt. Es ergab sich, dass die Messungen mit der letzteren Formel nur unwesentlich ungenauer als mit der ersteren dargestellt werden.

B. Einleitung.

In zwei früheren Arbeiten des Verfassers¹⁾²⁾ wurde die Absorption des Lichtes durch Sauerstoff in Abhängigkeit vom Druck gemessen; in der Arbeit I bei der Wellenlänge 2144 ÅE, in der Arbeit II im Bereich zwischen 2100 und 2400 ÅE. In der Arbeit I wurde das Druckgebiet zwischen 0,2012 und 0,8998 kg/cm² (148 bis 662 mm Hg), in der Arbeit II das Intervall zwischen 50 und 130 kg/cm² untersucht. Beide Male wurden Interpolationsformeln von der Form $E = E_0 p^*$ aufgestellt (E ist die Extinktion beim Druck p , E_0 die Extinktion beim Druck 1), wobei sich für die Wellenlänge

¹⁾ W. HEILPERN, H. P. A., **14**, 329, 1941; im Folgenden mit I bezeichnet.

²⁾ W. HEILPERN, H. P. A., **19**, 245, 1946; im Folgenden mit II bezeichnet.

2144 ÅE bei den niedrigen Drucken (Arbeit I) für κ der Wert 1,55, bei den hohen Drucken (Arbeit II) der Wert 2,11 ergab. Der grosse Unterschied zwischen den beiden Werten wurde damit erklärt (siehe II), dass der Absorption bei grossen und bei kleinen Drucken verschiedene Übergänge zu Grunde liegen. Diese Annahme erhielt ihre Begründung dadurch, dass in dem Bandensystem zwischen 2400 und 2800 ÅE, zu dem das Kontinuum in der Umgebung der Wellenlänge 2144 ÅE gehört, weitgehende Unterschiede gefunden wurden, je nach den zur Anwendung kommenden Drucken.

FINKELNBURG und STEINER¹⁾ fanden für Drucke zwischen 60 und 600 Atm. ein System von Tripletbanden, deren Intensität ungefähr quadratisch mit dem Druck zunimmt. Sie ordneten es dem Übergang $^3\Sigma_g^- \rightarrow ^3\Delta_u$ zu, der wegen Verletzung der Auswahlregel $\Delta A = 0, \pm 1$ für das ungestörte Einzelmolekül streng verboten ist. Mit der Annahme, dass durch die Stösse zwischen den Molekülen das Übergangsverbot aufgehoben wird, erklären die Autoren die quadratische Druckabhängigkeit der Absorption.

HERZBERG²⁾ fand dagegen bei Atmosphärendruck ein Bandensystem, dessen Maxima einfach sind und in ihrer Lage nicht exakt mit denen der Finkelnburg-Steiner-Banden übereinstimmen. Er ordnete daher diesen Banden einen anderen Übergang $^3\Sigma_g^- \rightarrow ^3\Sigma_u^+$ zu, der auch verboten ist, aber nicht exakt, so dass auch dem einzelnen Molekül eine schwache Absorption zukommt. Es ist daher anzunehmen, dass die Intensität dieser Banden linear mit dem Druck zunimmt. Dies wird besonders durch die Untersuchungen von SALOW³⁾ bestätigt, der im gleichen Wellenlängenbereich zeigen konnte, dass bei kontinuierlicher Variation des Druckes die Tripletbanden nicht kontinuierlich in die einfachen Banden übergehen, sondern dass bei 14 Atm. nur die ersteren, bei 12 Atm. beide Bandensysteme gleichzeitig, und bei 5 Atm. nur die letzteren nachweisbar sind.

Es ist daher anzunehmen, dass auch das Absorptionskontinuum, welches sich an diese Banden bei deren gemeinsamer Konvergenzstelle (2410 ÅE) nach kürzeren Wellen hin anschliesst, aus zwei Teilen zusammengesetzt ist. Ob dies wirklich der Fall ist, kann nur dadurch nachgewiesen werden, dass die Absorption, je nach dem angewendeten Druckbereich, als Funktion des Druckes verschieden rasch ansteigt. Das ist aber gerade das, was bei der Wellenlänge 2144 ÅE experimentell nachgewiesen wurde, wie aus den oben auf-

¹⁾ W. FINKELNBURG und W. STEINER, ZS. f. Phys. **79**, 69, 1932.

²⁾ G. HERZBERG, Naturwiss. **20**, 577, 1932.

³⁾ H. SALOW, Diss. Berlin 1935.

geführten verschiedenen Werten für den Druckexponenten hervorgeht.

In der Arbeit II wurde bereits auf graphischem Wege der Nachweis erbracht, dass die Messungen bei der Wellenlänge 2144 ÅE, die einerseits bei kleinen, andererseits bei grossen Drucken erfolgten, miteinander verträglich sind, das heisst, dass die Extinktion im ganzen Druckbereich zwischen 0,2 und 130 kg/cm² als Funktion des Druckes durch eine stetige, monoton anwachsende Kurve dargestellt werden kann.

Ziel der vorliegenden Mitteilung ist es nun, bei der Wellenlänge 2144 ÅE den Extinktionskoeffizienten E_p für das ganze Druckgebiet zwischen 0,2 und 130 kg/cm² auch rechnerisch durch eine einzige Formel von der Form:

$$E_p = E_1 p + E_2 p^2 + E_3 p^3 + \dots E_n p^n + \dots$$

darzustellen.

Es muss aber betont werden, dass es sich auch in diesem Fall nur um eine Interpolationsformel handeln kann. Denn bei einer eventuellen Interpretation des Zusammenhanges zwischen den Koeffizienten E_2 und E_3 und der Zahl der Zweier-, bzw. Dreierstösse ist grosse Vorsicht geboten, da über den Mechanismus der Anregung durch Stösse nur sehr wenig bekannt ist, und ausserdem der Begriff der gaskinetischen Stosszahl bei den hohen zur Anwendung kommenden Drucken (bis 130 kg/cm²) wohl seine einfache mechanische Bedeutung verliert.

Der Hauptvorteil der obigen Formel liegt indessen darin, dass sie wahrscheinlich eine Extrapolation nach kleineren Drucken gestattet. Das ist deshalb erwünscht, weil bei kleineren Drucken (unter 0,2 kg/cm²) Messungen auf grosse Schwierigkeiten stossen würden. Wie aus der Arbeit I hervorgeht, musste bereits bei Drucken unter 1 kg/cm² ein 25 m langes Absorptionsrohr verwendet werden, um eine genügend grosse Genauigkeit zu erhalten. Die Möglichkeit der Extrapolation nach kleinen Drucken ist aber von Bedeutung für die Kenntnis der Absorption der höheren Luftschichten der Atmosphäre. Diese ist in der Umgebung der Wellenlänge 2144 ÅE deshalb interessant, weil in diesem Spektralbereich die kombinierte Sauerstoff-Ozon-Absorption ein Minimum besitzt, wobei beide Gase etwa gleichviel zur Gesamtaborption beitragen. Dadurch ist es möglich, dass Sonnenlicht dieses Wellengebietes den Erdboden erreicht; eine Frage, die zuerst von EDGAR MEYER aufgeworfen und die experimentell mehrmals, mit wechselndem Erfolg zu beantworten gesucht wurde¹⁾. Eine genauere Abschätzung der Gesamt-

¹⁾ Z. B. EDGAR MEYER, H. P. A. **14**, 625, 1941 mit weiteren Literaturangaben.

absorption der Atmosphäre in diesem Spektralgebiet ist allerdings nur dann möglich, wenn auch der Einfluss des Stickstoffs auf die Absorption durch Sauerstoff berücksichtigt wird. Aus diesem Grunde wurden auch Messungen an Sauerstoff-Stickstoff-Gemischen bei hohen Drucken angestellt, über die später berichtet werden soll.

Da bei hohen Drucken, wie schon erwähnt, ein Druckexponent der Absorption gefunden wurde, der grösser als 2 ist ($\kappa = 2,11$), erscheint es zweckmässig, die Absorption des Sauerstoffs durch eine Formel vom obigen Typus mit drei Konstanten darzustellen, die Potenzreihe in p also erst nach dem kubischen Glied abzubrechen. Weil aber für die spätere Berücksichtigung des Stickstoffeinflusses auf die Sauerstoffabsorption eine einfachere Formel von grossem Vorteil ist, soll auch versucht werden, die experimentellen Werte durch eine Formel mit nur zwei Konstanten darzustellen.

C. Aufstellung der Formeln.

In der Tabelle I sind die für die Aufstellung der Formeln als Grundlage dienenden Messungen mit ihren Fehlern nochmals aufgeführt. Es werden dabei alle Drucke in kg/cm^2 und die dazu gehörigen Extinktionskoeffizienten E_p für die Schichtdicke $d = 1 \text{ cm}$ angegeben. E_p ist definiert durch die Gleichung: $I = I_0 \cdot 10^{-E_p \cdot d}$.

Tabelle I.

Messungen bei der Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ \AA E}$.

p in kg/cm^2	E_p ($d = 1 \text{ cm}$)	Messfehler in E_p	Mittlerer Fehler der Einzelmessung
0,2012	$1,22 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,12 \cdot 10^{-5}$	$0,30 \cdot 10^{-5}$
0,3412	$3,05 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,28 \cdot 10^{-5}$	
0,4417	$4,51 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,33 \cdot 10^{-5}$	
0,6687	$8,40 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,32 \cdot 10^{-5}$	
0,8998	$13,2 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,24 \cdot 10^{-5}$	
50	0,214	$\pm 0,010$	0,022
60	0,312	$\pm 0,010$	
70	0,437	$\pm 0,010$	
80	0,558	$\pm 0,010$	
90	0,750	$\pm 0,010$	
100	0,933	$\pm 0,029$	
110	1,131	$\pm 0,029$	
120	1,402	$\pm 0,029$	
130	1,572	$\pm 0,029$	

Es sollen nun in der Formel: $E = E_1 p + E_2 p^2 + E_3 p^3$ die Konstanten E_1 , E_2 , E_3 berechnet werden. Dies geschieht mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

Wie man aus der Tabelle I sieht, sind die absoluten Fehler der Messungen im Gebiet der grossen Drucke einerseits¹⁾ und im Gebiet der kleinen Drucke andererseits je ungefähr gleichgross, so dass man berechtigt ist, die beiden in der Tabelle angegebenen Werte für den mittleren Fehler zu bilden.

Diese beiden Werte sind aber nun um einen Faktor von ungefähr 10^4 verschieden. Würde man diesen Umstand nicht beachten und trotzdem formell die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, so würden die Messungen bei den kleinen Drucken gar nicht ins Gewicht fallen, weil die Quadrate ihrer Fehler bei der Bildung der Gesamtsumme der Fehlerquadrate vernachlässigbar klein wären. Daher würde ein ganz unsinniges Resultat die Folge sein; die der gewonnenen Formel entsprechende Kurve würde so verlaufen, als ob die Messpunkte bei den tiefen Drucken gar nicht vorhanden wären.

Diese Schwierigkeit kann nur dadurch behoben werden, dass bei der Bildung der Summe der Fehlerquadrate die Messungen bei den kleinen Drucken stärker berücksichtigt werden, und zwar so, dass ihre Fehlerquadrate von der Grössenordnung der Fehlerquadrate der Messungen bei den grossen Drucken werden. Zu diesem Zweck erteilt man allen Messungen im Gebiet der kleinen Drucke das Gewicht G , während den Messungen bei den hohen Drucken das Gewicht 1 zukommt. Zur Bestimmung von G fasst man jeden experimentellen Wert im Bereich der niedrigen Drucke als *Mittelwert* von je l *hypothetischen* Einzelmessungen auf. Hat der Mittelwert den Fehler δ , so kommt dann der Einzelmessung der Fehler $l \cdot \delta$ zu. Wählt man in unserem Fall nun $l = 10^4$, so kommt der hypothetischen Einzelmessung bei kleinem Druck ungefähr der gleiche Fehler zu wie einer wirklichen Messung bei hohem Druck. Es ist also jeder Messung bei tiefem Druck das Gewicht $G = l^2 = 10^8$ zu erteilen, das heisst, statt jeder Messung bei niedrigem Druck sind 10^8 hypothetische Einzelmessungen mit den gleichen Werten für Druck und Extinktion in die Rechnung einzuführen.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man mittels der Methode der kleinsten Quadrate für die zu berechnenden Konstanten die folgenden Werte: $E_1 = (6,586 \pm 0,414) \cdot 10^{-5}$; $E_2 = (8,755 \pm 0,495) \cdot 10^{-5}$; $E_3 = (4,955 \pm 4,334) \cdot 10^{-8}$.

¹⁾ Dass unter den 9 bei hohen Drucken erhaltenen Extinktionswerten (Messungen der Arbeit II) zwei verschiedene Fehlerwerte auftreten, hat seinen Grund darin, dass zwei verschiedene Schichtdicken benutzt wurden. Hierüber, sowie über die genaue Abschätzung des Messfehlers siehe II, S. 255 bis 258.

Wie man sieht, ist der Fehler des Koeffizienten E_3 von derselben Grössenordnung wie E_3 selbst. Es liegt also auch aus diesem Grunde nahe, die Konstanten E_1 und E_2 unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass $E_3 = 0$ ist, also eine Formel mit nur zwei Konstanten aufzustellen. In diesem Fall ergeben sich die Werte:

$$E_1 = (6,159 \pm 0,224) \cdot 10^{-5}; \quad E_2 = (9,315 \pm 0,091) \cdot 10^{-5}.$$

Die beiden Formeln lauten also:

$$E_p = (6,586 \pm 0,414) \cdot 10^{-5} \cdot p + (8,755 \pm 0,495) \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + (4,955 \pm 4,334) \cdot 10^{-8} \cdot p^3. \quad (1)$$

$$E_p = (6,159 \pm 0,224) \cdot 10^{-5} \cdot p + (9,315 \pm 0,091) \cdot 10^{-5} \cdot p^2. \quad (2)$$

D. Diskussion.

Damit man sehen kann, wie gut die in der Tabelle I aufgeführten Messungen durch die beiden Formeln dargestellt werden, wurden in der Tabelle II die nach den Formeln (1) und (2) berechneten Extinktionskoeffizienten mit den experimentell erhaltenen zusammengestellt (Spalten 2 bis 4). Ausserdem werden die Abweichungen der berechneten von den gemessenen Werten mit den experimentellen Fehlern verglichen (Spalten 5 bis 7).

Tabelle II.

Vergleich der experimentellen und der berechneten Extinktionskoeffizienten.

p in kg/cm ²	E_p (exp.)	E_p (ber.) (1)	E_p (ber.) (2)	ΔE_p (exp.)	E_p exp. - E_p ber. (1)	E_p exp. - E_p ber. (2)
0,2012	$1,22 \cdot 10^{-5}$	$1,680 \cdot 10^{-5}$	$1,618 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-5}$	$0,46 \cdot 10^{-5}$	$0,40 \cdot 10^{-5}$
0,3412	$3,05 \cdot 10^{-5}$	$3,267 \cdot 10^{-5}$	$3,188 \cdot 10^{-5}$	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$0,22 \cdot 10^{-5}$	$0,14 \cdot 10^{-5}$
0,4417	$4,51 \cdot 10^{-5}$	$4,618 \cdot 10^{-5}$	$4,539 \cdot 10^{-5}$	$0,33 \cdot 10^{-5}$	$0,11 \cdot 10^{-5}$	$0,03 \cdot 10^{-5}$
0,6687	$8,40 \cdot 10^{-5}$	$8,321 \cdot 10^{-5}$	$8,284 \cdot 10^{-5}$	$0,32 \cdot 10^{-5}$	$0,08 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-5}$
0,8998	$13,2 \cdot 10^{-5}$	$13,018 \cdot 10^{-5}$	$13,081 \cdot 10^{-5}$	$0,24 \cdot 10^{-5}$	$0,18 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-5}$
50	0,214	0,2284	0,2356	0,010	0,014	0,022
60	0,312	0,3298	0,3385	0,010	0,018	0,027
70	0,437	0,4506	0,4600	0,010	0,014	0,023
80	0,558	0,5910	0,6001	0,010	0,033	0,042
90	0,750	0,7512	0,7589	0,010	0,001	0,009
100	0,933	0,9316	0,9362	0,029	0,001	0,003
110	1,131	1,1326	1,1321	0,029	0,002	0,001
120	1,402	1,3542	1,3466	0,029	0,048	0,055
130	1,572	1,5970	1,5797	0,029	0,025	0,007
$\sqrt{\frac{\sum (E_p \text{ exp.} - E_p \text{ ber.})^2}{n - m}} = 0,0266$						0,0270

Schliesslich werden noch aus diesen Abweichungen der Einzelwerte die «mittleren Fehler» für alle Messungen, und zwar nach beiden Darstellungsarten berechnet. Dieses geschieht gemäss der Formel: $\sqrt{\frac{\sum (E_{\text{ber.}} - E_{\text{exp.}})^2}{n - m}}$ wobei bedeutet: n die Anzahl der Messungen, m die Anzahl der Konstanten; für Formel (1) ist $n = 14$, $m = 3$; für Formel (2) ist $n = 14$, $m = 2$. Bei der Berechnung muss darauf geachtet werden, dass für die Messungen bei den kleinen Drucken die oben definierten und zur Rechnung benutzten 10^4 mal grösseren Fehler der «hypothetischen Einzelmessungen» einzusetzen sind. Diese so berechneten Werte enthalten sowohl die experimentellen als auch die durch die Darstellung der Messungen vermittelt der Interpolationsformeln hervorgerufenen Fehler. Der letztere Anteil muss aber recht klein sein, da die Gesamtfehler die Grössenordnung der experimentellen Fehler nicht überschreiten und zwar für beide Formeln, also unabhängig vom Vorhandensein des kubischen Gliedes in p .

Es zeigt sich also, dass die Darstellung der Extinktionskoeffizienten E_p als Funktion von Potenzen von p recht gut ist. Es ist dies umso bemerkenswerter, als der Berechnung Experimente zu Grunde liegen, die in Gebieten von um zwei Zehnerpotenzen verschiedenen Drucken gemacht wurden, und bei denen auch ganz verschiedene Messmethoden zur Anwendung kamen.

Herrn Prof. EDGAR MEYER danke ich herzlich für sein grosses Interesse, seine fördernden Ratschläge und für die ausführlichen Diskussionen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

Die Empfindlichkeit bei der quantitativen Autoradiographie

von K. Zuber.

(1. II. 1949.)

Die Verwendung der photographischen Wirkung zur Messung von Aktivitäten besitzt gegenüber andern Methoden folgende Vorzüge: 1. Eine photographische Emulsion ist imstande, über lange Zeiten zu integrieren, so dass geringe Intensitäten gemessen werden können. 2. Die Ausdehnung des zu messenden Präparats kann klein sein. Seine minimale Grösse hängt vom Bau des Schwärzungsmessers ab. Da dagegen die Emulsion gross gewählt werden kann, so ist es möglich, viele Präparate oder die Aktivitäten verschiedener Punkte des gleichen Präparats gleichzeitig auf dem gleichen Film miteinander zu vergleichen. (Diesen Fall der photographischen Methode nennt man speziell Autoradiographie.) 3. Unter Umständen kann man die Präparate direkt auf die Emulsion legen, so dass einerseits jede Absorption der Strahlung vermieden wird, andererseits nützt man so den maximal möglichen Raumwinkel aus. 4. Ist die Rückseite des Präparats auch aktiv, so kann man beidseitig Filme legen. Bei durchdringender Strahlung wird man mehrere Filme aufeinander gelegt auf das Präparat bringen. In beiden Fällen erhält man mehrere Autoradiographien, an denen Messungen ausgeführt werden können. Dadurch wird die Messgenauigkeit erhöht. 5. Der entwickelte Film stellt ein Versuchsergebnis in Form eines anschaulichen, haltbaren Dokuments dar.

Auf diese Vorteile ist kürzlich (K. ZUBER 1948) hingewiesen worden. Im folgenden soll gezeigt werden, dass die Empfindlichkeit der quantitativen Autoradiographie in gewissen Fällen grösser ist als die Zählrohrmethode. Auch kann der Zeitaufwand, bei gleicher Genauigkeit, bei der Autoradiographie kleiner sein.

Die Frage, welchen Betrag eine Schwärzung haben muss, damit sie noch gemessen werden kann, hängt mit der Ausdehnung dieser Schwärzung zusammen. Besonders günstig ist der Fall, dass man den Ort der Schwärzung kennt, und dass sich in der Nähe der Schwärzung unbestrahlte Filmstellen befinden, so dass man die Schwärzung des Untergrundes direkt in der Umgebung der fraglichen Stellen bestimmen kann. Um einen Anhaltspunkt über die

Messgenauigkeit sehr geringer Schwärzungen zu erhalten, wurden folgende Versuche ausgeführt: Als Präparate wurden Goldmünzen verwendet, welche mit langsamen Neutronen aktiviert worden waren. Es entsteht dabei radioaktives Au^{198} , das β -Strahlen mit einer Halbwertszeit von 2,66 Tagen (Saxon 1948) emittiert. Die maximale Energie der β -Strahlen beträgt 0,970 MeV (LEVY und GREULING, 1948). Die Goldmünzen wurden unter Verwendung von Blenden zwischen Röntgenfilme (Kodak Ultra-Speed) gelegt und im allgemeinen während fünf bis sechs Tagen dort belassen. Die Blenden bestanden aus Messingblech von 0,55 mm Dicke und gaben einen mittleren Teil der Münze von 13 mm Durchmesser frei. Die Dicke des Blechs war nicht gross genug, um die Strahlung ganz zu absorbieren. Daher entstand auf dem entwickelten Film um das stark geschwärzte Mittelfeld ein Rand von etwa 4 mm Breite, welcher bei grösserer Intensität des Strahlers gerade noch mit dem Auge sichtbar war. Diese Randschwärzung S_R , wie auch jene des Mittelfeldes S_M wurde mit einem Schwärzungsmesser gemessen, dessen Lichtfleck rund 2 mm² gross war (S_R und S_M sind die beobachteten Schwärzungen über der Untergrundschwärzung S_0). Die Versuchsergebnisse von vier verschiedenen Filmen sind in folgender Tabelle wiedergegeben. Dabei sind die Zahlen nach der Grösse von S_M geordnet und in zwei Gruppen, grösser oder kleiner 0,2 geteilt.

Tabelle 1.

Film	S_M	S_R	S_R/S_M	Film	S_M	S_R	S_R/S_M
4	0,296	0,019	0,064	3	0,190	0,009	0,047
3	0,291	0,011	0,038	2	0,187	0,006	0,032
2	0,269	0,017	0,063	1	0,169	0,005	0,030
1	0,249	0,011	0,044	4	0,119	0,007	0,054
4	0,211	0,008	0,038	3	0,112	0,006	0,053
				1	0,108	0,008	0,074
				2	0,107	0,005	0,047
Mittel		0,013	0,050	Mittel		0,007	0,048

Es ist ersichtlich, dass für beide Gruppen die Mittelwerte von S_R/S_M gut miteinander übereinstimmen. Als Fehler einer Einzelmessung dieser Grösse ergibt sich rund 20%. Nehmen wir an, dass dieser Fehler nur von der Ungenauigkeit von S_R stammt, so erhalten wir das Resultat, dass sich mit der gegebenen Anordnung eine Schwärzung von 0,01 über dem Untergrund noch mit 20% Genauigkeit bestimmen lässt.

Leider war es nicht möglich, die Zahl der emittierten β -Strahlen auf eine genaue Weise direkt zu messen. Dagegen wurden folgende Wege eingeschlagen. Der entwickelte Film wurde mit einer Immersionsoptik mikroskopisch untersucht und die Anordnung der Ag-Körner im Untergrund und an der bestrahlten Stelle beobachtet. Es zeigt sich, dass im Untergrund die Körner vorwiegend einzeln oder zu zweit vorkommen, an der bestrahlten Stelle finden sich daneben auch häufiger im Mikroskop scheinbar zusammenhängende Gruppen. Die Tabelle 2 gibt eine rohe Statistik für die Häufigkeit von Gruppen mit n Körnern auf einer gesamten Fläche von $4200 \mu^2$.

Tabelle 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B	53	33	16	7	10	2	4	1	1	2	1	0	0	1
U	66	33	15	7	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	-13	0	1	0	8	1	4	1	1	2	1	0	0	1

Dabei bedeuten B die Zahlen für die bestrahlte, U für eine unbestrahlte Stelle und D die Differenz. Nimmt man an, dass der Überschuss der Gruppen mit mehr als vier Körnern bei der bestrahlten Stelle Spuren von β -Strahlen darstellen, so erhält man das Resultat, dass mindestens 19 β -Strahlen auf die Fläche gefallen sind. Die Schwärzung der betreffenden Stelle wurde zu 0,187 gemessen. Es folgt, dass zur Erzielung einer Schwärzung von 0,01 mindestens 240 β -Strahlen pro mm^2 auffallen müssen. Da man bei der Anordnung mit einer Fläche von etwa 4 mm^2 auskommt, so müsste die Aktivität mindestens rund 1000 β -Strahlen emittieren, damit sie mit 20% gemessen werden kann.

Die vom Präparat emittierten β -Strahlen werden zahlreicher sein als die angegebene Zahl, falls nicht jeder β -Strahl eine Kornreihe mit mehr als vier Körnern erzeugt. Der Mechanismus der photographischen Wirkung geladener Teilchen ist kürzlich (WEBB 1948) untersucht worden. Nach WEBB soll ein AgBr-Korn der verwendeten Emulsion entwickelbar werden, wenn das Teilchen im Korn mindestens 150 Ionisierungsprozesse ausführt. Diese Zahl ist berechnet worden unter Annahme eines Ionisierungsaufwandes von 7,6 eV. Ein AgBr-Korn würde somit entwickelbar, wenn das Teilchen einen Energieverlust von mindestens 1150 eV im Korn erleidet. Nimmt man an, dass diese Zahl auch für andere Emulsionen gilt, so lässt sich die minimale Wegstrecke im Korn ausrechnen, die ein β -Strahl zu durchlaufen hat, damit er unabhängig von seiner Energie das Korn entwickelbar macht. Mit einem Wert von 2200 eV/cm Luft als Minimum des Energieverlustes und einem Bremsvermögen von

AgBr bezogen auf Luft von 3000 (WEBB 1948), erhält man als kritische Wegstrecke $1,75 \mu$. Die Grösse der entwickelten, meist etwas länglichen Ag-Körner schwankte zwischen $1,5$ und 6μ , die AgBr-Körner waren natürlich grösser als diese Werte. Trotzdem die Ausdehnung somit grösser als die kritische Wegstrecke ist, kann es gelegentlich vorkommen, dass der Weg eines β -Strahls in einem Korn kleiner als diese ist. Da dieser Fall doch ziemlich selten sein wird, wird dies zur Folge haben, dass in einer längeren Reihe nun ein Korn ausfällt. Dadurch entstehen zu viele Reihen mit weniger als 5 Körnern. Nimmt man an, dass in der gefundenen Statistik bei der bestrahlten Stelle bei den kleinen Reihen solche defekten längeren Reihen vorkommen, so kann ihre Zahl nicht grösser als die statistische Schwankung der gefundenen Werte der Gruppen mit $n < 5$ sein. Das würde in unserem Fall bedeuten, dass etwa 50% der auffallenden β -Strahlen defekte Kornreihen ergeben haben. Zur Erzeugung der Schwärzung von 0,01 müssten somit pro mm^2 rund 500 β -Strahlen auffallen.

Dass die Abschätzung der Zahl der β -Strahlen der Grössenordnung nach richtig ist, folgt, wenn man die zu erwartende Schwärzung mit dieser Zahl berechnet und mit der beobachteten Schwärzung vergleicht. Beim entwickelten Film sei auf der Fläche F_m die gesamte Fläche der Projektionen aller vorhandenen Silberkörner F . Falls dN β -Strahlen zusätzlich auf den Film gefallen wären, so möge diese Fläche um dF grösser sein. Jeder β -Strahl erzeuge im Mittel n entwickelbare Körner der Grösse f . Dann ist

$$dF = \frac{F_m - F}{F_m} n \cdot f \cdot dN \quad (1)$$

Es folgt, wenn man für $N = 0$ $F = F_0$ setzt

$$\ln(1 - F_0/F_m) - \ln(1 - F/F_m) = \frac{n \cdot f}{F_m} N$$

Lässt man die Lichtintensität J_e auf den entwickelten Film fallen und bedeutet J die durchgelassene Intensität, so ist $S = -\log J_e/J$. Sind die Ag-Körner gross gegenüber der Lichtwellenlänge, so gilt $J_e/J = \frac{F_m}{F_m - F_0}$. Damit wird, wenn $S_0 = -\log \frac{F_m}{F_m - F_0}$ die Schwärzung des Untergrundes bedeutet,

$$S - S_0 = \frac{n \cdot f}{F_m} \cdot N \cdot \log e \quad (2)$$

Als mittlere Grösse von f wurde $7 \mu^2$ gefunden, die einzelnen Werte schwankten von 3 – $14 \mu^2$. Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, dass im

Mittel 7 Körner der Emulsion von einem β -Strahl entwickelbar gemacht werden. Da der Röntgenfilm beidseitig mit einer Emulsion belegt ist, so werden auch in der rückseitigen Emulsion entwickelbare Körner entstehen. Aus der bekannten Absorption der β -Strahlen von Au¹⁹⁸ (ZUBER 1948) hat man pro β -Strahl im Mittel 4 Körner auf der Rückseite zu erwarten. Es ist somit $n = 11$. Mit $F_m = 4 \text{ mm}^2$, $N = 1000$ berechnet sich $S - S_0 = 0,0084$ in guter Übereinstimmung mit dem Wert 0,01.

Es sei auch erwähnt, dass eine Zählrohrmessung ein Resultat ergab, welches nicht im Widerspruch mit den angegebenen Zahlen ist. Da es nicht möglich war, die Anordnung mit einem Normalpräparat zu kontrollieren, sei kein zu grosser Wert auf diese Messung gelegt.

Das hier mitgeteilte Ergebnis lässt sich bis zu einem gewissen Grad vergleichen mit Zahlen, welche für C¹⁴ (COBB und SOLOMON 1948) gefunden wurden. Sie finden, dass $1,6 \cdot 10^5$ β -Strahlen/mm² eines Röntgenfilms auffallen müssen, um eine Schwärzung von 0,6 zu erzielen. Nimmt man an, dass bis zu dieser hohen Schwärzung Proportionalität zwischen Schwärzung und Anzahl der β -Strahlen gilt, so findet sich, dass zur Erzielung der Schwärzung 0,01 pro mm² 2600 β -Strahlen auffallen müssen. Diese Zahl ist rund fünfmal grösser als unsere obere Grenze. Dazu ist zu bemerken, dass die kinetische Energie der β -Strahlen von C¹⁴ nur 0,15 MeV beträgt. Dies hat zunächst zur Folge, dass die β -Strahlen von C¹⁴ nicht zur rückseitigen Emulsion gelangen. Andererseits besitzen die im Maximum des kontinuierlichen β -Strahlspektrums emittierten Elektronen nur eine Reichweite von etwa 7–8 μ in AgBr. Ein β -Strahl dieser Energie wird somit aus Reichweitengründen nur 2–3 Körner entwickelbar machen können. Es ist daher verständlich, dass zur Erzielung der gleichen Schwärzung wesentlich mehr β -Strahlen von C¹⁴ notwendig sind als von Au¹⁹⁸.

Die Empfindlichkeitsgrenze der quantitativen Autoradiographie ist zuguterletzt durch die statistische Schwankung ΔS_0 der Untergrundschwärzung S_0 gegeben. Sie kommt zustande, weil die Fläche $F_0 = v_0 \cdot f \cdot F_m$ einerseits wegen den statistischen Schwankungen der Körnerzahl v_0 pro Flächeneinheit schwankt und andererseits, weil die Kornflächen verschieden gross sind. Es ergibt sich, wenn Δf die letztere Schwankung ist, $\Delta F_0 = f \cdot \sqrt{v_0 \cdot F_m} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2}$. Damit eine Aktivität noch gemessen werden kann, müssen die von ihr stammenden Ag-Körner eine Fläche ΔF_{\min} besitzen, welche grösser als ΔF_0 ist. Bedeutet a eine Zahl, welche umso grösser als 1

sein wird, je höher die verlangte Genauigkeit ist, so wird mit Formel (1)

$$\begin{aligned}\Delta F_{\min} &= \frac{F_m - F_0}{F_m} \cdot n \cdot f \cdot N_{\min} = a \cdot \Delta F_0 \\ &= a \cdot f \cdot \sqrt{\nu_0} \cdot F_m \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2}\end{aligned}$$

Die Schwärzung S_0 der verwendeten Röntgenfilme variierte je nach dem Alter der Filme zwischen 0,2 und 0,4. Mit einem mittleren Wert von 0,3 wird $F_0 = 0,5 F_m$ und $\nu_0 = \frac{1}{2} f$. Setzen wir in Hinblick auf die grosse Schwankung der Korngrössen $\Delta f = f$, so wird mit $n = 11$ und $f = 7 \mu^2$

$$N_{\min} = 138 a$$

Rührt der Fehler einer Messung nur von der statistischen Schwankung des Untergrundes her, so müssten, damit ein Wert mit 20% Genauigkeit folgen würde, die Zahl der auffallenden β -Strahlen grösser als 700 sein. Im zitierten Versuch ist aber sicherlich der Fehler auch noch durch den Ablesefehler vergrössert. Daher muss der Fehler, herrührend aus der statistischen Schwankung von S_0 wesentlich kleiner, d. h. a wesentlich grösser gewesen sein. Mit $a = 10$, d. h. es soll rund die Hälfte des Fehlers von S_0 herrühren, erhalten wir für die Abschätzung der β -Strahlen einen Wert, welcher innerhalb den früher angegebenen Grenzen liegt.

Alle diese Überlegungen zeigen, dass es vernünftig ist, anzunehmen, dass zwischen 1000 2000 β -Strahlen, herrührend von Au^{198} auf eine Fläche von 4 mm^2 des Films fallen müssen, damit nachher eine Schwärzung von 0,01 über der Untergrundschwärzung entsteht. Diese Schwärzung lässt sich mit einer Genauigkeit von noch 20% bestimmen.

Die Zahl von 2000 β -Strahlen lässt sich mit einem Zählrohr leicht messen, wenn sie während einer nicht zu langen Zeit emittiert werden. In unserem Falle betrug sie aber rund 150 Stunden, was rund 0,2 β -Strahlen pro Minute im Mittel entspricht. Um mit einer Zählordnung eine derartig kleine Stosszahl zu registrieren, müsste der Nulleffekt oder wenigstens dessen Gang wesentlich kleiner als diese Zahl sein. SOLOMON und Mitarbeiter (SOLOMON 1947) haben zur Messung von Aktivitäten von C^{14} ein Zählrohr mit 4,3 -5,3 Nullstössen pro Minute verwendet, was relativ günstig ist. Der Gang des Nulleffektes ist aber immer noch fünfmal grösser als die angegebene Zahl. Wollte man mit der Anordnung eine Aktivität mit 20% Genauigkeit messen, so dürfte diese umgekehrt nicht weniger als 5 Stösse pro Minute ergeben. Es müsste etwa eine Stunde lang die Stosszahl mit und ebensolang ohne die Aktivität gemessen werden.

Mit 10 zu vergleichenden Aktivitäten würde mindestens 20 Stunden registriert werden müssen. Mit der Autoradiographie dagegen erhalten wir in 6 Stunden eine Schwärzung von 0,01, welche sich bequem in 2 Stunden mit 20% Genauigkeit bestimmen lässt.

Der Film ist daher der Zählrohranordnung immer dann vorzuziehen, wenn es sich um den Vergleich vieler Aktivitäten kleiner Ausdehnung handelt, welche pro Minute wenige Elektronen emittieren. Die Lebensdauer muss so gröss sein, dass mindestens 500 β -Strahlen pro mm^2 des Films fallen. Dies gilt für den Fall, dass die Grenze des kontinuierlichen β -Strahlspektrums bei 1 MeV liegt. Für weichere β -Strahlen, wie sie z. B. von C^{14} emittiert werden, ist die Zahl rund fünfmal höher.

Istanbul, Institut für Experimentalphysik.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ J. COBB u. A. K. SOLOMON, Rev. Sci. Instr. **19**, 441 (1948).
 - ²⁾ P. W. LEVY u. E. GREULING, Phys. Rev. **73**, 83 (1948).
 - ³⁾ D. SAXON, Phys. Rev. **73**, 811 (1948).
 - ⁴⁾ A. K. SOLOMON et al. Phys. Rev. **72**, 1097 (1947).
 - ⁵⁾ J. H. WEBB, Phys. Rev. **74**, 511 (1948).
 - ⁶⁾ K. ZUBER, H. P. A. **21**, 365 (1948).
-

Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen Stochastischer Funktionen auf Turbulenzmessungen

von H. W. Liepmann.

(18. III. 1949.)

Zusammenfassung. Die mittlere Anzahl der Nullstellen einer stochastischen Funktion steht nach RICE im direkten Zusammenhang mit dem mittleren Quadrat ihrer Ableitung. Wendet man diesen Satz auf die Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit in isotroper Turbulenz an, dann kann man unter gewissen Voraussetzungen die für die Dissipation charakteristische Länge λ durch Zählung der Nullstellen bestimmen. Messungen dieser Art sind durchgeführt worden, und die Ergebnisse wurden mit drei anderen unabhängigen Bestimmungen von λ verglichen.

1. Die Zahl der Nullstellen einer Stochastischen Funktion.

Sei $J(t)$ eine stochastische Funktion der Zeit t . Der zeitliche Mittelwert $\overline{J(t)}$ sei null und der durch $J(t)$ beschriebene Vorgang stationär, d. h. die Korrelationsfunktion

$$\psi(\tau) = \overline{J(t) J(t + \tau)}$$

hänge nur von τ und nicht von t ab). Wie oft nimmt die Funktion $J(t)$ im Mittel in der Zeiteinheit den Wert ξ an? Fragen dieser Art sind von RICE¹⁾ diskutiert worden*).

Unter gewissen Voraussetzungen gilt speziell für die mittlere Anzahl der Nullstellen N_0 , ($\xi = 0$), in der Zeiteinheit

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\frac{\psi''(0)}{\psi(0)}} \quad (1)$$

Da für einen stationären Prozess mit $\psi(\tau)$ gilt:

$$-\psi''(0) = \left(\frac{dJ}{dt}\right)^2 = J'^2$$

folgt

$$N_0^2 = \frac{\overline{J'^2}}{\pi^2 \overline{J^2}} \quad (2)$$

und damit hat man eine Beziehung zwischen der mittleren Anzahl

*) Weitere Literaturangaben findet man in der Arbeit von RICE.

der Nullstellen und dem mittleren Quadrat der Ableitung. Definiert man eine Spektraldichte $F(n)$ derart, dass

$$\psi(0) = \overline{J^2} = \int_0^\infty F(n) \, dn$$

ist, dann gilt:

$$\psi(\tau) = \int_0^\infty F(n) \cos(2\pi n \tau) \, dn$$

und

$$-\psi''(0) = 4\pi^2 \int_0^\infty n^2 F(n) \, dn. \quad (3)$$

Dann folgt aus (1) auch:

$$N_0^2 = 4 \frac{\int_0^\infty n^2 F(n) \, dn}{\int_0^\infty F(n) \, dn} = 4 \overline{n^2}.$$

Die Relation (3) ist analog der einfachen harmonischen Schwingung, für welche $N_0^2 = 4 \overline{n^2}$ ist.

Die Voraussetzungen, die zu der Beziehung (1) führen, können durch eine einfache Überlegung gezeigt werden. Für eine strengere Ableitung siehe RICE (loc. cit.).

Sei $p(\xi) \, d\xi$ die Wahrscheinlichkeit dafür, $J(t)$ zur Zeit t im Intervall $\xi, \xi + d\xi$ zu finden. Fragt man jetzt nicht nach der Verweilzeit im Intervall $\xi, \xi + d\xi$, sondern nur nach der Anzahl der Durchgänge, dann ist es offenbar gleichgültig, wie lange die Funktion bei einem Durchgang im Intervall bleibt. Um die Wahrscheinlichkeit eines Durchganges zu erhalten, muss man daher um die Wahrscheinlichkeit $J(t)$ im Intervall $\xi, \xi + d\xi$ zu finden, jeweils durch die Zeit T dividieren, die $J(t)$ während dieses Durchganges in $d\xi$ verbringt. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Durchgänge und dem mittleren Quadrat der Ableitung $\overline{J'(t)^2}$ kommt dann natürlich dadurch zustande, dass die Zeit T von $J'(t)$ abhängt. Sei $p(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$ die Wahrscheinlichkeit, dass $J(t)$ im Intervall $\xi, \xi + d\xi$ ist und gleichzeitig $J'(t)$ im Intervall $\eta, \eta + d\eta$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $J(t)$ das Intervall mit einer bestimmten Ableitung η überschreitet

$$\frac{p(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta}{T} = p(\xi, \eta) \, |\eta| \, d\eta$$

da

$$T = \frac{d\xi}{|\eta|}$$

ist. Integriert man weiterhin über alle möglichen η , dann erhält man die Anzahl der Durchgänge durch ξ pro Zeiteinheit:

$$N_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| p(\xi, \eta) d\eta \quad (4)$$

Aus der Gleichung (4) folgt (1) unmittelbar unter der Annahme, dass $p(\xi, \eta)$ eine Gaußsche Verteilung ist und der Prozess stationär, d. h. $J(t) \overline{J'(t)} = 0$.

Wesentlich ist hier, dass $J(t)$ und $J'(t)$ statistisch unabhängig sind, d. h. dass $p(\xi, \eta)$ das Produkt einer Funktion von ξ und einer Funktion von η ist. Schreibt man $p(\xi, \eta) = l(\xi) m(\eta)$, dann folgt aus (4)

$$N_{\xi} = l(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| m(\eta) d\eta = l(\xi) \overline{|\eta|} \quad (5)$$

Für eine Gaußsche Verteilung genügt dafür das Verschwinden der Korrelation JJ' . Im allgemeinen ist $JJ' = 0$ zwar notwendig, aber nicht hinreichend für eine statistische Unabhängigkeit von $J(t)$ und $J'(t)$.

Für lineare Vorgänge kann man im allgemeinen zeigen, dass $J(t)$ und $J'(t)$ gaussisch verteilt sind. Für die Strahlung eines schwarzen Körpers findet man einen solchen Beweis bei v. LAUE²⁾ und der entsprechende akustische und elektrische Fall findet sich z. B. in der zitierten Arbeit von RICE. Die Möglichkeit die Gleichung (1) auf Turbulenzmessungen anzuwenden ist meines Wissens zuerst von DRYDEN erwähnt worden.

Turbulente Schwankungen gehorchen aber einer nichtlinearen Gleichung, und infolgedessen kann auf eine Gaußsche Verteilung nicht in derselben Weise, wie z. B. in der Strahlungstheorie geschlossen werden. Im Gegenteil, die Ableitung einer turbulenten Geschwindigkeitskomponente ist sicher nicht gaussisch verteilt. Das folgt im wesentlichen aus den Bewegungsgleichungen in der von KÁRMÁN und HOWARTH³⁾ gegebenen Form und ist durch Messungen von TOWNSEND⁴⁾ bestätigt worden. Es ist aber interessant, zu prüfen, wieweit sich diese — im allgemeinen schwache — Abweichung von einer Gaußschen Verteilung in der Zahl der Nullstellen auswirkt und wie weitgehend die Zahl der Nullstellen ein turbulentes Schwankungsfeld charakterisiert.

Messtechnisch ist die Methode sehr anziehend, da mit einer Zählordnung ohne weiteres Mittelwerte über fast beliebig lange Zeiten genommen werden können.

2. Beziehungen zur isotropen Turbulenz.

Unter isotroper homogener Turbulenz versteht man bekanntlich nach G. I. TAYLOR ein Schwankungsfeld, in dem Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten $u_i(x_k, t)$ und ihrer Ableitungen invariant gegenüber Translation, Rotation und Reflexion des Koordinatensystems sind. Experimentell stellt man ein solches Feld dadurch her, dass man eine möglichst gleichmässige und turbulenzfreie Strömung mit konstanter Geschwindigkeit U durch ein Gitter strömen lässt. Das Feld im Nachlauf des Gitters ist dann angenähert isotrop und im Kleinen homogen. Die Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit an einem festen Punkt $u_i(t)$ können dann mit der stochastischen Funktion $J(t)$ identifiziert werden. Aus messtechnischen Gründen ist es am einfachsten, die Komponente $u_1(t)$ in der Richtung der mittleren Geschwindigkeit U zu untersuchen.

Das Resultat für das mittlere Quadrat der Ableitung $\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2$, das aus der Zählung der Nullstellen erhalten wurde, konnte mit den Ergebnissen der zwei folgenden unabhängigen Methoden verglichen werden: Nämlich einmal mit der direkten Messung von $\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2$ durch Differentiation mittels einer Kapazitäts-Widerstands-Anordnung (vergl. TOWNSEND⁴) und auch mit der Messung der Spektraldichte $F(n)$ aus der $\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2$ durch graphische Auswertung von $\int_0^\infty n^2 F(n) dn$ entsprechend Gleichung (3) gewonnen werden kann.

Bisher haben wir nur Zeitfunktionen betrachtet. Für die Dynamik der Turbulenz sind aber besonders die räumlichen Korrelationsfunktionen wichtig. Diese räumlichen Korrelationsfunktionen werden nach v. KÁRMÁN am besten in der Form der Korrelationstensoren eingeführt.

In isotroper, homogener Turbulenz bestimmt dann eine skalare Funktion, z. B. $f(x)$, den Korrelationstensor zweiter Ordnung:

$$R_{ij} = \frac{\overline{u_i(x_k, t) u_j(x'_k, t)}}{u^2}.$$

Die Beziehung zwischen der zeitlichen Korrelationsfunktion $\psi(\tau)$ und $f(x)$ wird im allgemeinen dadurch erhalten, dass man setzt:

$$\begin{aligned} \tau &\longrightarrow \frac{x}{U} \\ \frac{d}{dt} &\longrightarrow -U \frac{d}{dx} \end{aligned} \quad (6)$$

d. h., man nimmt an, dass die Turbulenz unverzerrt mit der Geschwindigkeit U transportiert wird. Diese Substitution ist — selbst für kleine Schwankungen — meines Wissens nie theoretisch einwandfrei bewiesen worden, und sie kann mit Recht bezweifelt werden⁵⁾. Die wenigen Messungen, die einen Vergleich zwischen räumlicher und zeitlicher Korrelation zulassen, haben allerdings vorläufig keine systematischen Differenzen gezeigt und dasselbe gilt auch für die Messungen dieser Arbeit. Nimmt man einstweilen an, dass die Substitutionen (6) erlaubt sind, dann kann man schreiben:

$$\frac{1}{\bar{u}_1^2} \left(\overline{\frac{du_1}{dt}} \right)^2 = \frac{U^2}{\bar{u}_1^2} \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 = -U^2 f''(0) \equiv \frac{U^2}{\lambda^2}$$

λ ist eine Grösse, welche charakteristisch für die Dissipation der turbulenten Energie ist. Die Dissipationsgleichung in isotroper Turbulenz lautet bekanntlich (siehe z. B. ref. (3))

$$-\frac{3}{2} \rho U \frac{d\bar{u}_1^2}{dx} = \frac{15}{\lambda^2} \mu u_1^2 \quad (7)$$

und die Grösse λ kann daher aus Messungen des Abklingens der Turbulenz bestimmt werden. Messungen dieser Art wurden auch durchgeführt und die so erhaltenen Werte von λ könnten mit den erwähnten Messungen von $\left(\overline{\frac{du_1}{dt}} \right)^2$ verglichen werden. Im folgenden wird — mit dem erwähnten Vorbehalt — auch für die Grösse $\frac{1}{U^2} \frac{1}{\bar{u}_1^2} \left(\overline{\frac{du_1}{dt}} \right)^2$ wie üblich kurz $\frac{1}{\lambda^2}$ geschrieben werden.

3. Messapparatur.

Windkanal

Die Messungen wurden in einem kleinen Kanal mit einem Querschnitt von $20'' \cdot 20''$ ausgeführt. Der Turbulenzgrad dieses Kanals ohne Gitter ist klein:

$$\left[\frac{\bar{u}_1^2}{U^2} \right]^{1/2} \cong 3 \cdot 10^{-4}$$

Ein Gitter von 1,27 cm Maschenweite wurde zur Erzeugung von isotroper Turbulenz benutzt. Die Messungen wurden mit den Strömungsgeschwindigkeiten von 630 cm/sec und 1130 cm/sec ausgeführt.

Hitzdrahtanordnung.

Die Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit wurde mit Hilfe von Hitzdrähten und kompensierter Verstärkung aufgenommen. Wollaston-Draht mit einer $1,25 \cdot 10^{-4}$ cm dicken Platinseele

wurde verwendet. Die Drähte waren 1 bis 2 mm lang. Der Platindraht wurde nach Ablösung des Silberbezuges an die Spitzen feiner Nähnadeln gelötet. Die Anordnung ist frequenzgetreu innerhalb 2% zwischen 2 Hz und 10000 Hz.

Zählvorrichtung.

Die Nullstellen des Verstärkerstromes wurden mit einer Photomultiplierzelle auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen aufgenommen und mittels eines Untersetzers wurde jede $2^9 = 512$ te Nullstelle gezählt.

Differentiation.

Der Verstärkerstrom konnte mittels eines Kapazitäts-Widerstandssystems ähnlich wie bei TOWNSEND⁴⁾ differenziert werden. Der Verstärkungsgrad hier ist proportional der Frequenz zwischen 2 und 10^4 Hz.

Messung der Spektraldichte.

Die Spektralverteilung des Verstärkerstromes konnte mit Hilfe eines Hewlett & Packard Wave-Analyzers mit konstanter Bandweite, gemessen werden.

Korrekturen.

Die Resultate müssen für die endliche Länge des Hitzdrahtes korrigiert werden. Das heisst dafür, dass nicht $u_1(t)$ gemessen wird, sondern

$$u_1(t, l) = \frac{1}{l} \int_0^l u_1(t, y) dy$$

wo l die Länge des Hitzdrahtes ist. Für isotrope Turbulenz können die Korrektionsformeln angegeben werden. Für die Intensitätsmessungen hat man

$$\overline{u^2} = \overline{u^2}_{\text{gemessen}} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \right],$$

für die λ -Messungen

$$\lambda^2 = \lambda^2_{\text{gemessen}} \left[1 - \frac{G-3}{18} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \right] \quad \text{mit} \quad G = \lambda^4 f^{IV}(0).$$

Es ist klar, dass die Korrektionsformeln nur dann Sinn haben, wenn die Korrekturen klein sind, so dass man mit verhältnismässig rohen Werten für λ und G in den Korrektionstermen auskommt. Bei den Messungen in dieser Arbeit war $l/\lambda \leq 0,5$; G wurde aus dem Spektrum bestimmt: $G \cong 10 - 13$. Ausserdem wurde die Korrektion experimentell durch Verwendung von Drähten verschiedener Länge

bestimmt. Es ergab sich für die höhere Geschwindigkeit (1130 cm/sec): $(G - 3)/18 = 0,46$. Dieser Wert stimmt mit den Messungen von G genügend genau überein.

Die Zählvorrichtung muss ausserdem für das endliche Auflösungsvermögen korrigiert werden. Diese Korrektur erscheint zur Zeit die unsicherste zu sein und trägt daher dazu bei, dass die Abweichungen in den Resultaten der Zählmethode von den anderen Methoden nicht unmittelbar als reell angesehen werden können. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Nullstellen dicht hintereinander zu haben, kann angegeben werden. Eine entsprechende Formel findet sich bei RICE (loc. cit.). Die mittlere Anzahl N_D der doppelten Nullstellen innerhalb der kleinen Zeit T ist gegeben durch

$$N_D = \frac{\pi^2}{16} N_0 [G - 1] (N_0 T)^2.$$

Identifiziert man dann T mit dem Auflösungsvermögen, dann erhält man eine Korrektionsformel für die gemessene Anzahl der Nullstellen. Schwierigkeiten macht die Bestimmung von T . Die bisherigen Bestimmungen ergaben für die Anordnung $T \cong 10^{-4}$ sec. Die Korrektur ist dann klein. Der Wert ist aber nicht zu vertrauenswürdig und muss sicher besser bestimmt werden. Ausserdem kommt noch eine weitere Korrektur dadurch hinzu, dass unter Umständen sehr schnelle Durchgänge durch Null nicht gezählt werden. In dieser Hinsicht ist die Anordnung sicher noch verbesserungsfähig.

4. Resultate.

λ oder besser λ^2 wurde bei den Geschwindigkeiten 630 cm/sec und 1130 cm/sec in einem Abstand von 81 Maschenweiten hinter dem Gitter mit den verschiedenen Methoden gemessen. Die Resultate sind in der Tabelle zusammengestellt.

Tabelle.

Methode	$\lambda^2 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$			
	Nullstellen	Spektrum	Differentiation	Dissipation
1130 cm/sec	17,3	15,3	12,9	13,9
630 cm/sec	23,9	25,8	18,7	22,4

Die Messungen sind kaum genauer als $\pm 10\%$ in λ^2 . Exaktere Fehlergrenzen lassen sich vorläufig noch nicht angeben. Man findet nämlich, dass die gemessenen Werte zeitweilig genauer reprodu-

zierbar sind, sich aber dann manchmal systematisch um einige Prozent ändern. Wieweit derartige Änderungen durch die Apparatur bedingt sind, z. B. durch Irregularitäten in dem Gitter, muss noch geprüft werden.

Innerhalb dieser Fehlergrenzen kann, wie aus der Tabelle ersichtlich, kein systematischer Unterschied zwischen den Resultaten der verschiedenen Messmethoden sicher nachgewiesen werden. Für die höhere Geschwindigkeit gibt die Zählmethode zwar einen zu grossen Wert für λ^2 , für die kleine Geschwindigkeit nicht. Dieses Ergebnis legt den Verdacht nahe, dass das Auflösungsvermögen der Anordnung noch nicht genügend berücksichtigt ist.

Weder der Einfluss einer Abweichung von der Gaußschen Verteilung, noch ein Unterschied zwischen Zeit- und Ortsdifferenzierung kann daher innerhalb dieser Fehlergrenzen sicher nachgewiesen werden.

Am California Institute of Technology ist zur Zeit eine ausführliche Untersuchung der isotropen Turbulenz für das National Advisory Committee for Aeronautics im Gange. Die hier diskutierten Fragen kamen im Rahmen dieser Arbeit auf.

Die Hilfe von K. LIEPMANN, J. JOHN LAUFER und F. K. CHUANG bei diesen Arbeiten wird dankbar anerkannt.

Daniel Guggenheim Aeronautical Laboratory
California Institute of Technology.

Literatur.

- ¹⁾ RICE, S. O., The Bell System Technical Journal, **23**, 82 (1944). **24**, 46 (1945).
- ²⁾ LAUE, M. v., Ann. d. Physik, **47**, 853 (1915).
- ³⁾ KÁRMÁN, TH. v., Proc. Royal Soc. A, **164**, 192 (1938).
- ⁴⁾ TOWNSEND, A. A., Proc. Camb. Phil. Soc., **43**, 560 (1947).
- ⁵⁾ FRENKIEL, F. N., VII. Int. Congress for Appl. Math. & Mech., London 1948.

Elementare Betrachtungen über die Stabilität der Langgeschosse

von J. Ackeret, Zürich.

(18. III. 1949.)

In Vorlesungen und Lehrbüchern über Experimentalphysik fehlt selten der Hinweis auf die stabilisierende Wirkung des Geschossdralles als einer interessanten Anwendung der Kreiselgesetze. Fast immer aber ist die Darstellung hinsichtlich der Luftkraftmomente stark schematisch und veraltet, ein Mangel, dem man merkwürdigerweise auch in sonst guten modernen Ballistik-Lehrbüchern begegnet.

Heute hat man eine recht befriedigende Näherungstheorie¹⁾, die aber für den Elementarunterricht viel zu verwickelt ist. Es ist nun möglich, indem man Methoden verwendet, die in der früheren Theorie des Luftschiffes (MUNK u. a.) entwickelt wurden, in ganz einfacher und doch im wesentlichen korrekter Weise die Luftmomente anzugeben, die sogar quantitativ nicht übel ausfallen, sofern das Geschoss nur genügend schlank ist.

Wir denken uns ein Geschoss von der Länge L , dessen Meridian- bzw. Querschnittsverlauf r bzw. $r' = \pi r^2$ gegeben ist. (Fig. 1.) Der Schwerpunkt liege in S , das Geschoss sei, wie üblich, hinten scharf abgeschnitten, so dass dort eine endliche Heckfläche F_h vorhanden ist. Um die Stabilität zu untersuchen, ist es nötig, das Moment der Luftkräfte M_s um den Schwerpunkt zu kennen, das entsteht, wenn das Geschoss gegen die Flugrichtung V schwach geneigt ist (Winkel α); gleichzeitig entsteht im allgemeinen eine Querkraft Q . Die Geschossgeschwindigkeit V zerlegen wir in eine longitudinale und eine transversale Komponente V_l bzw. V_t . V_l kann in bezug auf die Schallgeschwindigkeit a beliebige Werte haben, d. h.: die Machsche Zahl V/a darf kleiner oder grösser als eins sein. Hingegen müssen wir voraussetzen, dass $V_t \ll a$ ist, was bei sehr kleinen Winkeln α (nur solche sollen betrachtet werden) ja stets der Fall ist. Die durch V_t erzeugte Druckverteilung am Körper ist rotations-

¹⁾ TH. V. KÁRMÁN und N. B. MOORE, Trans. Am. Soc. of Mechanical Engineers, **54**, 303–310 (1932), ferner H. S. TSIEN, Journal of aeronautical Sciences, **5**, 480–483 (1938).

symmetrisch und gibt keine Querkraft und kein Moment. Ist nun der Körper schlank, d. h.: $(r_{\max})/L$ klein, was bei guten Formen zutrifft, so können für kleine α mit guter Näherung die Änderungen der Geschwindigkeiten gegenüber V selbst linear superponiert werden. Diese „Störungsgeschwindigkeiten“, einestails von der Verdrängung, andernteils von der Schräganströmung herrührend, dürfen additiv zusammengefügt werden. Somit ist es erlaubt, den Einfluss von V_t separat zu betrachten. Wir wollen zunächst

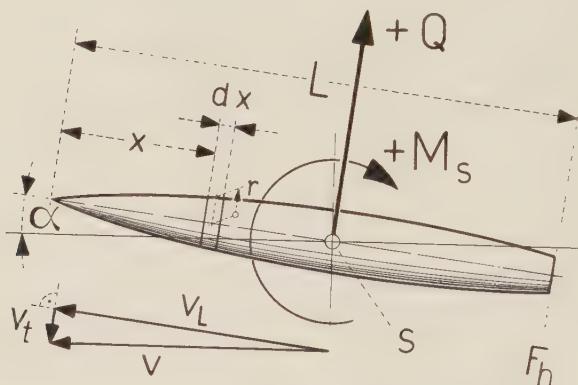


Fig. 1.

Luftkraft und Luftkraft-Moment auf ein schwach angestelltes Geschoss.

voraussetzen, dass die Machsche Zahl $M = V/a$ noch kleiner als eins sei (Unterschallflug). Dann führt eine einfache Impuls-Betrachtung zum Ziel.

Betrachten wir die von zwei Schnittebenen $x = \text{constant}$ und $x + dx = \text{constant}$ eingeschlossene ausserhalb des Kreises vom Radius r liegende Luftmasse. (Fig. 2.) Die materielle Scheibe, die durch die Ebenen aus dem Geschoss geschnitten wird, hat die Abwärtsbewegung $V_t = V \cdot \sin \alpha$, und die Ausweichbewegung der Luft entspricht mit grosser Näherung der Ausweichbewegung bei einem unendlich langen quer bewegten Kreiszyylinder vom Radius r , wobei die wohlbekannte reibungsfreie Lösung benützt werden darf. (Fig. 2 rechts.) Wir brauchen davon nur das sehr einfache Ergebnis, dass der der Luftschicht erteilte Impuls gegeben ist durch das Produkt aus Geschwindigkeit (hier V_t) des Zylinders und einer „scheinbaren“ Masse vom Betrag $\rho F dx = dm^*$. Der Vertikalimpuls der Schicht ist also:

$$dJ = \rho F dx V_t = \rho F dx V \sin \alpha.$$

Wäre der Querschnitt F konstant, das Geschoss also ein unendlich langer Kreiszylinder, so würde dJ sich zeitlich nicht ändern, die betrachtete Geschossscheibe also keine vertikale Kraft erfahren. Tatsächlich ändert sich aber F , indem das Geschoss ja durch die betrachteten Ebenen hindurchschlüpft.

Es ist somit:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot V_t = \frac{dF}{dx} \cdot V \cos \alpha$$

und die Kraft dQ auf das Geschossteil dx

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{dJ}{dt} = \varrho \, dx \, \frac{dF}{dx} V^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{\varrho}{2} V^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{dF}{dx} \cdot dx \end{aligned} \quad (1)$$

Also überall, wo der Querschnitt nach hinten zunimmt, entsteht ein positiver Beitrag, wo er abnimmt, ein negativer.

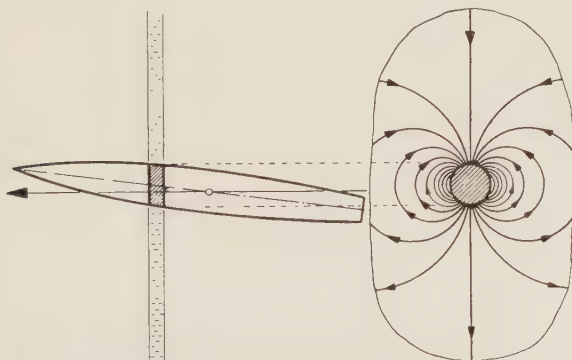


Fig. 2.

Durch Anstellung erzwungene Ausweichbewegung der Luft.

Die gesamte Querkraft Q wird, wenn $F(0) = 0$ gesetzt wird (Spitze):

$$Q = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin 2\alpha \int_0^L \frac{dF}{dx} dx = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin 2\alpha \cdot F_n \quad (2)$$

ein überraschend einfacher Ausdruck.

Q ist also gar nicht vom Querschnittsverlauf, sondern allein von der Bodenfläche abhängig.

Ebenso lässt sich das Moment etwa um die Geschossspitze rechnen:

$$M_0 = - \int_0^L \frac{dQ}{dx} \cdot x \, dx = - \frac{\varrho}{2} V^2 \sin 2\alpha \int_0^L x \, \frac{dF}{dx} dx$$

und nach partieller Integration ($F_0 = 0$)

$$M_0 = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin 2\alpha \{-F_h L + G\} \quad (3)$$

wo $G = \int_0^L F dx$ das Geschossvolumen ist. Ist der Schwerpunkt im Abstand s vor dem Boden F_h , so folgt

$$M_s = M_0 + Q (L-s) = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin 2\alpha \{G - F_h \cdot s\} \quad (4)$$

oder für kleine α

$$M_s = \varrho V^2 \sin \alpha \{G - F_h \cdot s\} = \mu \sin \alpha \quad (5)$$

Der Bodensog (Unterdruck auf F_h) hat keinen Einfluss auf das Moment, da seine Resultierende durch den Schwerpunkt geht. Ebenso sind die Momente der Reibungsspannungen an der Ge-

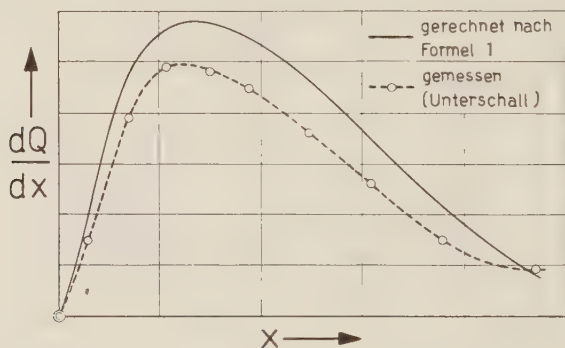


Fig. 3.

Vergleich der gerechneten und bei Unterschallgeschwindigkeit gemessenen Querkkräfte auf eine Geschößspitze.

schossoberfläche bei kleinen Winkeln unbedeutend. Da $G - F_h \cdot s$ fast immer > 0 , so ergibt sich ein positives also unstabilisierendes Moment, das das Geschoss quer zur Strömung zu drehen versucht. Es ist für $F_h = 0$ besonders gross:

$$M_s^* = \varrho V^2 \sin \alpha \cdot G \quad (6)$$

Für inkompressible Strömung ist das Moment für Rotationsellipsoide schon lange bekannt. Ein Vergleich ergibt, dass z. B. für das Dicke-Länge-Verhältnis 0,1 das genau gerechnete Moment 0,94 des obigen Wertes wird; für unendlich schlanke Ellipsoide ergibt sich genau (6).

In Fig. 3 ist für einen relativ schlanken Raketenkopf die Querkraftverteilung nach Formel 1 eingetragen, zusammen mit Messpunkten, die bei einem Versuch in unserem Windkanal (mit rund

28 m/sec Windgeschwindigkeit) erhalten wurden, indem man die Druckverteilung in einzelnen Schnitten mass und die Kräfte durch Integration über den Umfang ermittelte.

Der Anstellwinkel α betrug 10° . Es ist zu erwarten, dass man weniger Kraft bekommen muss, da ja die Reibungseinflüsse ganz vernachlässigt sind, die bei dem relativ grossen α schon spürbar sein müssen. Immerhin ist die gemessene Querkraft doch 75 bis 80% der gerechneten und der Verlauf befriedigend.

Wird $M \rightarrow \infty$ grösser als eins (Überschallgebiet), so sind an der Ablenkung der Luftteilchen in der Schicht CB (Fig. 4) nur noch die Partien des Geschosses vor C beteiligt. Das ergibt eine Änderung

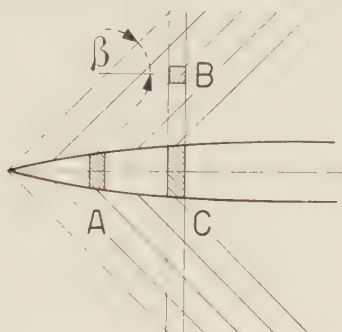


Fig. 4.

Machsche Kegel bei Überschallgeschwindigkeit.

der Querkräfte, die umso ausgeprägter ist, je grösser die Machsche Zahl ist. Der Einfluss beispielsweise von der Stelle A kann sich bekanntlich nur innerhalb des Machschen Kegels AB vom halben Öffnungswinkel β ausbreiten, wobei: $\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$ ist. Man muss also von der exakten Querkraftkurve erwarten, dass sie gegenüber der elementar gerechneten etwas nach hinten verschoben und natürlich auch im Betrag geändert wird. Immerhin ist es plausibel, dass für sehr schlanke Geschosse und nicht zu grosse Machzahlen (< 2) die elementare Theorie noch einigermaßen zutreffen muss, indem die scheinbare Masse im wesentlichen in der Nähe des Zylinderschnittes konzentriert ist.¹⁾ Wenn der Mach-Einfluss auf das Moment M_y bestimmt werden soll, so wird man wohl kaum die

¹⁾ Bei inkompressibler Strömung ist die scheinbare Masse innerhalb einem Radius r und dem Zylinderradius R gegeben durch $m^* = \rho \pi R^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$.

ausführliche Rechnung nach TSIEN bzw. SAUER¹⁾ entbehren können.

Fig. 5 zeigt für einen schlanken Rotationskörper und $M = 1,5$ die nach TSIEN bzw. SAUER gerechnete Querkraftverteilung verglichen mit der elementaren. Man sieht, dass an der Spitze die genau²⁾ gerechneten Querkräfte sich von den nach Formel 1 gerechneten in dem oben erwähnten Sinne unterscheiden. Der Vergleich der Querkräfte ergibt, dass die elementare Theorie sie um 4% zu niedrig liefert. Das elementar gerechnete Moment um den Punkt S ist 91% des nach der Tsienschen Theorie gefundenen.

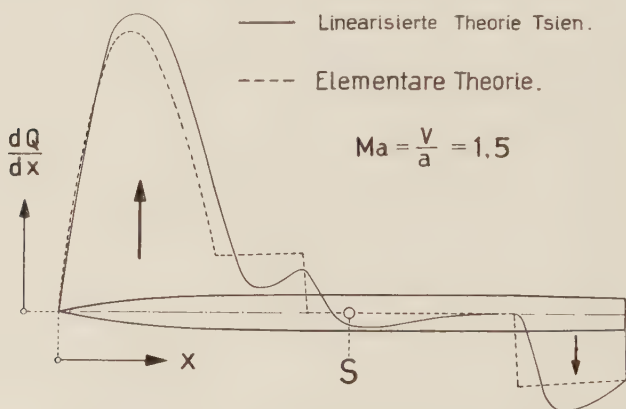


Fig. 5.

Querkraftverteilung nach der linearisierten und nach der elementaren Theorie, gerechnet für ein Langgeschoss.

Bemerkenswert ist, dass ein konisch verjüngtes Geschossheck einen Abtrieb ergibt (eine unmittelbare Konsequenz von Formel 1). Der Abwärtsimpuls der Luft verringert sich dort; dies drückt das Geschossende nach unten.

Das Luftmoment würde das Geschoss überschlagen lassen, wenn nun nicht die Kreiselwirkung eingreifen würde. Sie zwingt das Geschoss zu einer Präzessionsbewegung (Fig. 6). Der Drallvektor $D = A \cdot \omega$ drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ν um die Flugrichtung. Nun muss man aber berücksichtigen, dass diese Drehung

²⁾ SAUER, Theoretische Einführung in die Gasdynamik, Berlin 1943, S. 47–52. Die Methode ist von W. HAACK vereinfacht worden.

³⁾ Im Sinne der sogenannten „linearisierten Theorie“. Ich verdanke die Ausrechnung nach dieser Theorie Herrn Dipl. Ing. H. VOELLMY.

ihrerseits ein Zentrifugalmoment im unstabilen Sinne hervorruft, das für einen schlanken Körper sich ergibt zu (Abb. 6 unten)

$$M_z = \int dm v^2 (\sigma \sin \alpha) (\sigma \cos \alpha).$$

oder

$$\begin{aligned} M_z &= v^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int dm \cdot \sigma^2 \\ &= B v^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cong B v^2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

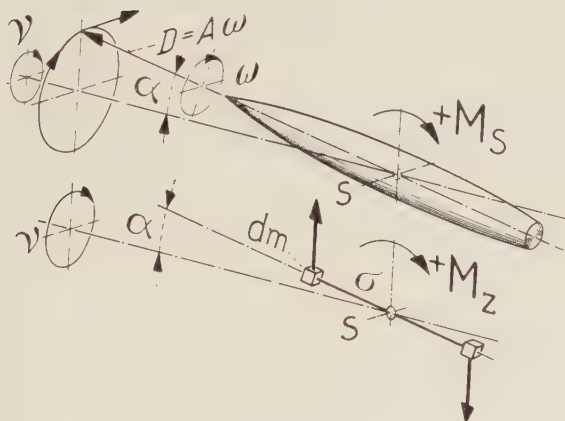


Fig. 6.

Präzessionsbewegung des rotierenden Geschosses.

Unten: Entstehung des Zentrifugalmomentes der Präzessionsbewegung.

wo $B \gg A$ das Trägheitsmoment um eine Querachse ist. Die sekundliche Dralländerung $(A \cdot \omega) \cdot \sin \alpha \cdot v$ muss beiden Momenten das Gleichgewicht halten:

$$M_s + M_z = \mu \sin \alpha + B v^2 \sin \alpha = A \cdot \omega v \sin \alpha$$

daraus:

$$v = \frac{A \omega \pm \sqrt{A^2 \omega^2 - 4 B \mu}}{2 B} \quad (8)$$

Der Radikand muss positiv sein; als Bedingung dafür ergibt sich:

$$A^2 \cdot \omega^2 \geq 4 B \mu$$

oder

$$\vartheta = \frac{A^2 \omega^2}{4 B \mu} \geq 1 \quad (9)$$

Das ist die aus der Ballistik wohlbekannte Stabilitätsbedingung, die man ja auch aus der Theorie des schweren symmetrischen Kreisels kennt.

Es ist dabei

$$\mu = \varrho V^2 \{G - F_h \cdot s\} \quad (10)$$

Praktisch erweist es sich als möglich, mit ϑ bis auf etwa 1,2 herunterzugehen¹⁾).

Das relativ gute quantitative Ergebnis soll natürlich nicht dazu verleiten, die elementare Theorie zu überspannen. Insbesondere für stumpfere Geschossformen werden die Querkräfte und Momente zahlenmässig für die Praxis zu ungenau. Für den Unterricht aber und auch für das allgemeine Verständnis sind die Ergebnisse der „Luftschifftheorie der Geschosse“ so wertvoll, dass es mir nützlich schien, sie hier aufzufrischen.

¹⁾ Nach freundlicher Mitteilung von Prof. W. HAACK, Berlin.

Der Diffusionsthermoeffekt als Vorlesungsversuch

von Klaus Clusius.

(18. III. 1949.)

Zusammenfassung. Es wird eine einfache Anordnung beschrieben, um die bei der Vermischung zweier Gase durch Diffusion auftretenden Temperaturänderungen nachzuweisen. Bereits 1872 hat DUFOUT diesen Diffusionsthermoeffekt beobachtet und im gleichen Jahr FEDDERSEN noch die Existenz des dazugehörigen Umkehr-effektes, der Thermodiffusion, vermutet. Weiter wird gezeigt, dass die Temperatur-änderungen nicht durch die Abweichung der Gase vom idealen Zustand hervorgerufen werden.

1. Unter dem Diffusionsthermoeffekt versteht man die Erscheinung, dass von zwei zunächst auf gleicher Temperatur befindlichen Gasen bei der Vermischung durch Diffusion das eine sich abkühlt und das andere sich erwärmt. Der Effekt steht keineswegs im Widerspruch zur Thermodynamik, nach der bei der Vermischung idealer, chemisch indifferenter Gase keine Wärmetönung auftritt, die innere Energie des Systems also unverändert bleibt. Denn dieser thermodynamische Satz vergleicht nur den Zustand der Gase *vor* und *nach* der Mischung, sagt aber nichts darüber aus, ob nicht *während* des Vorgangs *vorübergehend* Wärmeeffekte auftreten, die sich gegenseitig kompensieren. Dann kann sich das eine Gas während der Diffusion erwärmen, das andere abkühlen und die gesamte Mischungswärme trotzdem verschwinden. Dies wird nun tatsächlich beobachtet.

Der Effekt ist implizite bereits in den Arbeiten von ENSKOG und CHAPMAN enthalten¹⁾. So schreibt der Letztere: "It appears also that the motion of interdiffusion is accompanied by a flow of heat proportional to the velocity of diffusion, a process which we shall term the 'thermal flux of diffusion' ". Merkwürdigerweise wurde anscheinend nie die Grössenordnung der zu erwartenden Temperaturdifferenzen abgeschätzt, so dass der Effekt ganz unbeachtet

¹⁾ S. CHAPMAN, Proc. Roy. Soc. London (A) **93**, 11 (1917). D. ENSKOG, Dissertation Upsala 1917. Arkiv Matem. Astron. och Fysik **16**, 44 (1921).

blieb. Erst 1942 wurde er exakt im Gas nachgewiesen und in der Folgezeit genauer studiert¹⁾.

Überraschend ist die Grösse der auftretenden Temperaturdifferenzen, die für Gaspaare wie $\text{H}_2\text{—N}_2$ bei Zimmertemperatur bis zu $7,5^\circ$ betragen, also viel grösser sind als die differentialen Joule-Thomson-Koeffizienten dieser Gase. In der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{C_p}{V} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + p D \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \quad (1)$$

(mit der Molwärme konstanten Drucks C_p , dem Molvolumen V , der absoluten Temperatur T , der Zeit t , der Längenkoordinate x , der Wärmeleitung λ , dem Druck p , dem Diffusionskoeffizienten D , dem Molenbruch γ und dem Thermodiffusionsfaktor α) ist das zweite Glied der rechten Seite für unseren Effekt massgebend. Der Diffusionsthermoeffekt erscheint danach als Umkehrung der Thermodiffusion, mit der er im Sinne der Onsagerschen Reziprozitätssätze verknüpft und durch den gleichen Parameter α charakterisiert ist. Eine einfache Regel legt das Vorzeichen des Diffusionsthermoeffekts fest: Das bei der Diffusion entstehende Temperaturfeld trachtet durch Thermodiffusion die Vermischung zu verzögern. Dies Verhalten entspricht dem Braun-Le Chatelierschen Prinzip, das hier anwendbar ist, da im Sinne der kritischen Studien Ehrenfest's die Konzentration der Gase als Quantitätsgrösse mit ihrer Temperatur als Intensitätsgrösse in Beziehung gesetzt wird.

Bei der Diffusion stellt sich der maximale Temperaturunterschied im Abstand Δx etwa nach der Zeit $\Delta t_{\max} = \frac{\Delta x^2}{2D}$ ein, so dass wir mit der Gasgleichung $pV = RT$ erhalten

$$\Delta T_{\max} = \frac{pV D \alpha \Delta \gamma \Delta t}{C_p \Delta x^2} = \frac{RT \alpha \Delta \gamma}{2 C_p} \quad (2)$$

Für Stickstoff und Wasserstoff ist $C_p = 7 R/2$, $\alpha = 0,36$ und $\Delta \gamma = 0,5$, wenn man gleiche Volumina der reinen Gase ineinander diffundieren lässt. Die maximale Temperaturdifferenz ergibt sich im adiabatischen Fall zu

$$\Delta T_{\max} = \frac{T \alpha \Delta \gamma}{7} = \frac{290 \cdot 0,36 \cdot 0,5}{7} = 7,5^\circ \text{ Cel.}$$

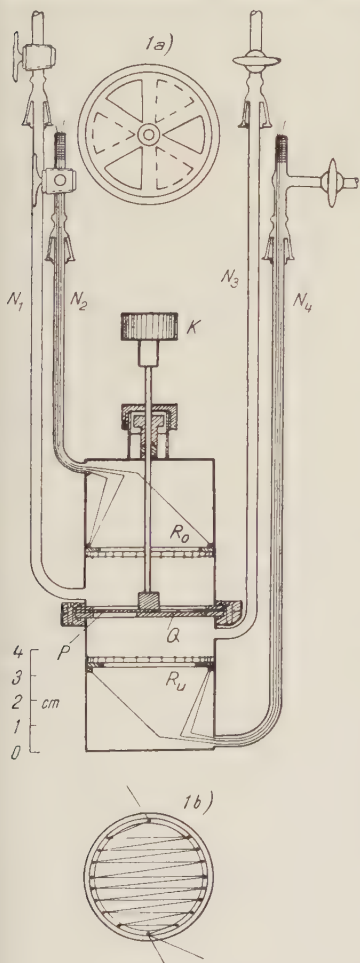
¹⁾ K. CLUSIUS und L. WALDMANN, Naturwiss. **30**, 711 (1942). L. WALDMANN, Naturwiss. **31**, 204 (1943), **32**, 222, 223 (1944). Z. f. Physik **121**, 501 (1943); **124**, 230, 175 (1944). Z. f. Naturforschg. **1** 10, 12, 59, 483 (1946); **2a**, 358 (1947). Le Journal de Physique et le Radium **7**, 129 (1946) sowie unveröffentlichte Arbeiten von L. MILLER, Universität München 1948.

Wegen des Einflusses der Behälterwände und der Störung durch die im Temperaturfeld entstehenden Konvektionsströme wird die tatsächlich beobachtbare Temperaturdifferenz 2—4mal kleiner sein. Auch dann ist sie für einen Schauversuch immer noch gross genug.

2. Dazu eignet sich eine einfache, bereits für die ersten Versuche 1942 benutzte Anordnung (Fig. 1), die hier näher beschrieben sei. Eine aus zwei zusammenschraubbaren Hälften verfertigte Messingbüchse trägt in der Mitte eine mit 3 sektorförmigen Ausschnitten versehene Querwand Q . Auf diese ist eine drehbare Platte P aus Messing aufgeschliffen, die ebenfalls 3 Sektorenausschnitte besitzt. Durch einen Deckring mit Anschlägen wird erreicht, dass die bewegliche Platte auf der Querwand genau aufliegt und am Kopf K gerade nur um 60° hin- und her gedreht werden kann. In der einen Endstellung liegen die Sektorenausschnitte übereinander, so dass die beiden Hälften des Behälters verbunden sind; am andern Anschlag ist die Querwand verschlossen, wie aus der Nebenzeichnung 1a) ersichtlich ist. Um eine vollkommene Dichtung herbeizuführen, ist die Schlifffläche mit etwas Apiezonöl benetzt. Im oberen wie im unteren Raum befinden sich zwei Preßspanringe R_o und R_u , die einen Kranz von kleinen Kupferstiften tragen (siehe 1b). Über diese ist im Zickzack ein $20\ \mu$ feiner Platindraht als Widerstandsthermometer ($\sim 50\ \text{Ohm}$) gespannt. Die Zuleitungen gehen durch die Neusilberrohre N_2 und N_4 , die zugleich mit den Neusilberrohren N_1 und N_3 zur Gaszufuhr dienen. Macht man die Zuleitungsdrähte gleich lang und führt man sie dem einen Ende des Platindrahtes doppelt zu, so lässt sich in bekannter Weise eine Brückenschaltung benutzen, bei der der Widerstand der Zuleitung herausfällt, so dass man an einem Dekadenwiderstand die Temperaturänderung in den Gasen unmittelbar als Widerstandsänderung ablesen kann. Für Demonstrationszwecke wird meistens die Beobachtung

Fig. 1.

des Galvanometerauschlages bequemer sein. Der in der Abbildung gegebene Abstand der beiden Thermometer ist so gewählt, dass ein gewöhnliches Demonstrations-Galvanometer von 2—3 Sekunden aperiodischer Einstellzeit vollauf genügt. Begnügt man sich mit dem Nachweis einer Temperaturdifferenz während



der Diffusion, so kann man die beiden Widerstandsthermometer in der Brücke gegeneinanderschalten. Instruktiver ist es, nacheinander zwei Versuche auszuführen, und sowohl die Erwärmung im Wasserstoff, wie die Abkühlung im Stickstoff zu zeigen.

Die Messingbüchse senkt man in ein leeres Dewargefäß oder hüllt sie wenigstens in Watte, um sie vor Zugluft zu schützen. Man füllt den oberen Behälter bei geschlossener Blende mit Wasserstoff und den unteren mit Stickstoff, wobei die Gase aus Stahlflaschen entnommen und nicht eigens gereinigt zu werden brauchen. Darauf schliesst man die zu den Neusilberrohren führenden Hähne ab und öffnet nach Einstellung der Messbrücke die Blende. Das Galvanometer zeigt darauf einen erst langsam und dann schneller, bis zu einem maximalen Wert steigenden Ausschlag an, der allmählich wieder zurückgeht. Von dem Vorzeichen des Ausschlags – Erwärmung im Wasserstoff und Abkühlung im Stickstoff – überzeugt man sich leicht, indem man gegen Ende des Experiments die Hand der Messingbüchse einen Augenblick nähert, wodurch eine Erwärmung angezeigt wird. Es ist sehr überraschend und aufschlussreich das Einsetzen der Diffusion und ihr allmähliches Abklingen unmittelbar mit der Temperaturmessung zu verfolgen. Man erhält einen guten Eindruck von der Dauer der Diffusion, wenn man während des allmählichen Rückganges des Ausschlags die Blende wieder schliesst; das Galvanometer erreicht die Nullage dann viel rascher.

Noch einfacher gestaltet sich die Ausführung, wenn die untere Kammer mit Luft und die obere mit Leuchtgas beschickt wird. Die Temperatureffekte sind dann etwa halb so gross.

3. Zu dem Diffusionsthermoeffekt seien zwei Bemerkungen gestattet. Die erste ist historischer Art. Bereits im August 1872 berichtete L. DUFOUR auf der Schweizerischen Naturforschertagung in Freiburg über bei der Diffusion auftretende Temperatureffekte¹⁾. In einer mit Luft oder Kohlendioxyd gefüllten Tonzelle stak ein feines Quecksilberthermometer, das eine Temperaturniedrigung anzeigte, sobald sie von Wasserstoff umspült wurde: «M. DUFOUR croit que ce changement de température ne s'accomplit pas dans toute la masse gazeuse, mais seulement à la surface de la paroi poreuse; il se représente que du côté où le gaz entre il y a condensation, compression, partant développement de chaleur, et de l'autre, au contraire, expansion du gaz, par suite absorption de chaleur.» Unstreitig hatte DUFOUR damals bereits den Diffusionsthermoeffekt unter den Händen, ohne ihn mit den primitiven Hilfsmitteln seiner Zeit genauer untersuchen und den Sitz der Temperaturänderung lokalisieren zu können.

Sicherlich ist der Effekt auch später gelegentlich beobachtet, aber in seiner Ursache nicht erkannt worden. Im Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Göttingen fand L. BEWILOGUA

¹⁾ L. DUFOUR. Archives de sciences physiques et naturelles, Genève **45**, 9 (1872). Siehe auch POGG. Ann. **148**, 490 (1873).

1933 unerklärlich grosse Temperaturschwankungen in einer Anordnung, die zur Messung der spezifischen Wärme C_p von Gasen nach der Lummer-Pringsheimschen Expansionsmethode diente, wenn ein in dem Messkolben befindliches Gas durch ein anderes verdrängt wurde. Spülte man den Kolben mit demselben, schon in ihm befindlichen Gas durch, so waren die Störungen des Widerstandsthermometers viel geringfügiger. Sie konnten also nicht ohne weiteres auf Schwankungen des Wärmeübergangs im strömenden Gas zurückgeführt werden. Die richtige Erklärung für diese wiederholt gemachte Beobachtung fanden wir damals nicht.

Es sei weiter erwähnt, dass die von ENSKOG und CHAPMAN theoretisch vorausgesagte Thermodiffusion bereits 1872 von FEDDERSEN vermutet wurde¹⁾. Er verstand damals unter „Thermodiffusion“ die Erscheinung, dass durch ein Diaphragma eine Gasströmung einsetzt, sobald es sich in einem Temperaturgefälle befindet. Erwärmte er in einem 12 mm weiten Rohr einen Gipspfropfen von 50 mm Länge an dem einen Ende, so wurde Gas in der Richtung von der kalten zur warmen Seite hindurchgezogen. FEDDERSEN schreibt: „Ob diese Art der Diffusion auch von der Natur des Gases abhängt, so dass also bei gemischten Gasen eine auswählende Diffusion stattfinden könnte, d. h. eine mechanische Trennung der Gase, analog wie bei der Diffusion von tropfbaren Flüssigkeiten, habe ich bisher nicht eruieren können. Bedenkt man die Dufourschen Versuche, so ist es allerdings wahrscheinlich . . . Es findet demnach bei den genannten Erscheinungen die analoge Reziprozität statt wie für Wärme und Elektrizität bei dem gewöhnlichen Thermostrom (Thermodiffusion) und dem Peltierschen Phänomen (DUFOURS Entdeckung)“.

Es ist sehr interessant, dass die Entdeckungsgeschichte beider Effekte so weit zurückreicht. Die erwähnten Beobachtungen und Vermutungen blieben unbeachtet und waren ohne jeden Einfluss auf die weitere Entwicklung auch dann noch, als fast ein halbes Jahrhundert später das Problem wieder aufgerollt wurde. Zum Teil mag das daran liegen, dass die feinen Temperaturmessgeräte, über die wir heute verfügen, noch nicht vorhanden waren, zum Teil daran, dass die an sich unnötige Einbeziehung poröser Stoffe und der damit verbundenen Unklarheiten wegen etwaiger Adsorptionswärmen den Vorgang für eine exakte Erforschung wenig geeignet erscheinen liess. Jedenfalls war die Zeit für eine Erklärung der Effekte auf gaskinetischer Grundlage noch nicht reif, so dass sich

¹⁾ W. FEDDERSEN, Pogg. Ann. **148**, 308 (1873). Seine Mitteilung ist aus Davos vom 26. Dezember 1872 datiert.

Dufour eine Deutung zurechtlegte, die Anschluss an die damals immer mehr an Ansehen gewinnende mechanische Wärmetheorie suchte.

4. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf den gelegentlich geäußerten Zweifel, ob nicht der Diffusionsthermoeffekt nur durch die Nichtidealität der verwendeten Gase hervorgerufen wird, demnach eine ganz triviale Ursache hat. Der Einwand ist unberechtigt. Man kann leicht zeigen, dass die Mischungswärme der realen Gase Wasserstoff und Stickstoff so gering ist, dass die damit zusammenhängenden Effekte etwa 80mal kleiner als die mit der Diffusion verbundenen Temperaturänderungen sind. Es sei J die Enthalpie, die mit der inneren Energie U durch die Definition

$$J = U + pV \quad (3)$$

verbunden ist. In dem hier in Frage kommenden Temperatur- und Druckbereich kann man die Realität der Gase ausreichend durch die Van der Waalsche Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (4)$$

bzw. für Drucke von wenigen Atmosphären ihre Näherung

$$pV = RT + B_p \text{ mit } B = b - \frac{a}{RT} \quad (5)$$

berücksichtigen. Dann gilt für die innere Energie

$$U = U_0 - \frac{a}{V} \quad (6)$$

und falls wir im Korrekturglied das ideale Gasgesetz einführen, was statthaft ist,

$$U = U_0 - \frac{ap}{RT} = U_0 + p(B - b) \quad (7)$$

Man erhält dann für die Änderung der Enthalpie durch die Vermischung

$$\Delta J_{\text{real}} = \Delta \Sigma (U_0 + p(B - b) + RT + pB),$$

wobei $\Delta \Sigma$ die Differenz des Klammerausdrucks für beide Gase vor und nach der Vermischung bedeutet. Bei isothermer Vermischung wird somit

$$\Delta J_{\text{real}} = \Delta \Sigma (p(2B - b)) \quad (8)$$

Benutzt man für die B -Werte die Beziehungen¹⁾

$$\begin{aligned} B_{\text{H}_2} &= 22,2 - 2260/T \\ B_{\text{N}_2} &= 60,2 - 19550/T \\ B_{\text{H}_2, \text{N}_2} &= 38,1 - 6655/T \end{aligned}$$

so ergibt sich bei der Vermischung von 1 Mol Stickstoff mit 1 Mol Wasserstoff — wobei 2 Mole Gemisch entstehen — für 290° als ΔJ_{real} zu $-52,8$ Kubikzentimeter-Atmosphären, was einer Enthalpieabnahme von $-0,64$ cal pro Mol entspricht. Bei adiabatischer Vermischung gleicher Teile Stickstoff und Wasserstoff würde man eine Temperaturabnahme von nur $\frac{-0,64^\circ}{7/2 R} = -0,09^\circ$ beobachten.

Die Abweichung vom idealen Gaszustand spielt also keine Rolle und wird bei der Beobachtung der Diffusionsthermik in Isotopen gemischen, wofür gerade besonderes Interesse besteht, wegen der weitgehenden Gleichheit der B - und b -Werte stets zu vernachlässigen sein. Dies schliesst nicht aus, dass für andere Gaspaare oder für Dämpfe oder bei extremen Temperaturverhältnissen oder bei erhöhtem Druck die Abweichung vom idealen Zustand durchaus als eine Korrektur beachtet werden muss.

Universität Zürich, Physikalisch-Chemisches Institut.

¹⁾ Siehe A. EUCKEN, Lehrbuch der Chemischen Physik II, 1. S. 236. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1943.

Über den Erschütterungseinfluss auf die Magnetisierung und seine Temperaturabhängigkeit

von Walther Gerlach in München.

(18. III. 1949.)

I.

Durch Erschütterungen unter einem Richtfeld, d. h. durch elastische Längs- und Querschwingungen wird bekanntlich die Grösse der Magnetisierung irreversibel geändert, und zwar in derselben *Richtung*, im allgemeinen aber nicht um denselben Betrag wie bei der Wechselfeld-Idealisierung¹⁾. Bei sehr weichen Proben und genügend starker Erschütterung wird jedoch angenähert die Grösse der W-Idealisierung erreicht. Insbesondere ist die Endkurve der „stabilen“ $\cos \vartheta$ -Werte²⁾, die sich bei gegebener Erschütterung als Endzustand einstellen, in Abhängigkeit von dem magnetischen Richtfeld *nicht* hysteresefrei; es ist also nicht gleichgültig, ob im gleichen magnetischen Richtfeld ein Zustand der Neukurve oder der rückläufigen Hysteresekurve erschüttet wird. Ob dies bei genügend starker Erschütterung der Fall ist, scheint nach unsern bisherigen Untersuchungen keine sinnvolle Frage, weil hierbei die Probe dauernd härter wird, sich also verändert. Man sollte also nicht von einer „Erschütterungsidealisierung“ sprechen, sondern besser von einer Überführung in den gegen die angewandte Erschütterungsart und -stärke *stabilen* Zustand.

Durch eine Erhöhung und Wiedererniedrigung der Temperatur in konstantem Richtfeld tritt ebenfalls eine irreversible Änderung der Magnetisierung ein. Diese Erscheinung nennen wir die thermische Idealisierung³⁾; wenn nämlich die Temperaturerhöhung genügend gross war (sie braucht im allgemeinen nicht die Curietemperatur zu erreichen), so ist der nach Abkühlung erreichte $\cos \vartheta$ -Wert unabhängig davon, von welchem Magnetisierungszu-

¹⁾ W. STEINHAUS und E. GÜMLICH; Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 369 (1915).

²⁾ Wir charakterisieren die Magnetisierung nicht durch die I -Werte, sondern durch die Richtungsverteilung $J = J_0 \cos \vartheta$; J_0 ist die spontane (oder Sättigungs-) Magnetisierung. Davon interessant sind nur die Änderungen der Richtung, nicht aber die Änderung der spontanen Magnetisierung, z. B. bei Vergleich verschiedener Temperaturen.

³⁾ W. GERLACH und A. TEMESVÁRY; Ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. im Druck (vorgelegt am 9. Januar 1948).

stand man ausging; er hängt hysteresefrei nur von der Grösse des Richtfeldes ab.

Bei der *Wechselfeld-Idealisierung* wird unter einem konstanten Richtfeld eine periodische Ummagnetisierung mit abnehmendem Betrag der Amplitude vorgenommen. Infolge des konstanten Richtfeldes sind die hierbei von der Probe durchlaufenen Hysteresekurven unsymmetrisch. Es tritt eine von der Form der Hysteresekurve abhängige Vergrösserung von $\cos \vartheta$ ein, wenn das Wechselfeld auf Null abgenommen hat. Dass der Ausgangspunkt — jungfräuliche Kurve, ab- oder ansteigende Hysteresekurve — gleichgültig ist, beruht darauf, dass bei Beginn des Wechselfeldprozesses die gesättigte Hystereseschleife durchlaufen wird, die „magnetische Vorgeschichte“ also ausgelöscht ist.

Für die *thermische Idealisierung* ist die Abnahme der Coerzitivkraft mit steigender Temperatur massgeblich. Mit zunehmender Temperatur gehen unter dem konstanten Richtfeld immer mehr 180°-Prozesse vor sich, so dass $\cos \vartheta$ zunimmt. Bei der Wiederabnahme der Temperatur liegt kein Grund vor, dass unter dem konstanten Richtfeld diese 180°-Richtungsänderungen wieder zurückgehen.

Die *Wirkung einer Erschütterung* ist gänzlich anderer Art: durch die bei den elastischen Schwingungen auftretenden Zug- und Druckspannungen werden die Vektoren (im Nickel) abwechselnd zwischen den Vorzugslagen 0° bzw. 180° und 90° (gegen die Längsachse des Stabes-Feldrichtung) hin und her geworfen. War der Stab remanentmagnetisiert, lagen also alle Vektorenrichtungen in der „positiven“ Halbkugel, so werden die, welche durch die Zugspannung unter 90° gestellt wurden, nun durch die folgende Druckspannung nach 0° oder 180° gedreht; denn ohne Richtfeld, in $H_i = 0$, sind diese beiden Übergänge energetisch gleichberechtigt⁴⁾. Es tritt durch die Erschütterung also auf diesem Wege eine Abmagnetisierung ein. Da aber bei nicht genügend grossen Spannungen nicht *alle* Vektoren einmal auf 90° gedreht werden, sondern ein Teil innerhalb der positiven Halbkugel bleibt, so tritt keine völlige Abmagnetisierung auf. Ihr Betrag hängt von der Stärke der Erschütterung ab.

Steht die Probe aber unter einem konstanten „positiven“ Richtfeld, so wird in der Zugphase ein Teil der Vektoren, welche noch nach der „negativen“ Halbkugel orientiert sind, unter 90° gestellt. Bei der folgenden Druckspannungsphase gehen diese aber nicht in die negative Halbkugel (180°-Lage) zurück, sondern wegen des

⁴⁾ Bei der Erschütterungsabmagnetisierung permanenter Magnete ist zwar $H_a = 0$, aber nicht $H_i = 0$; sie erfolgt also in einem negativen Richtfeld abnehmender Stärke.

positiven Zugfeldes in die positive Halbkugel. Es tritt also eine Zunahme von $\cos \vartheta$ durch die Erschütterung auf; sie ist umso grösser, je mehr Vektoren in der Zugphase in die 90° -Lage gedreht werden.

II.

In Fig. 1 ist die gestrichelte Kurve Ia die Neukurve einer Nickelprobe. Durch eine mittlere Erschütterung geht diese in die Kurve Ib, durch stärkere Erschütterung in die Kurve Ic über (Pfeilrichtung). Ib und Ic werden so erhalten, dass nach jedesmaliger Abmagnetisierung die Probe in verschiedene Richtfelder H_i gebracht und dann durch Anschlagen eines Pendels erschüttert wurde; Schlaghöhe und Schlagzahl wurden jeweils konstant gehalten.

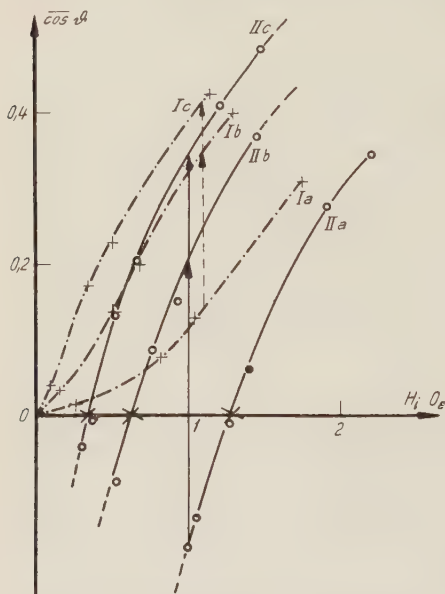


Fig. 1.

Erschütterungsbeeinflussung der Magnetisierung.

Ia. jungfräuliche Kurve. Ib Ic nach Erschütterung.

IIa Hysterese. IIb IIc nach Erschütterung.

II *a b c* sind Teile der zugehörigen aufsteigenden Äste der Hystereseschleife, *a* ohne, *b* mittlere, *c* stärkere Erschütterung entsprechend wie Ia, b, c.

Es ergab sich, dass angenähert für die verschiedenen Zustände das Produkt aus Anfangsmagnetisierung und Coerzitivkraft konstant ist.

III.

Es wurden Messungen über die Änderung der jungfräulichen Magnetisierung im konstanten Gleichfeld bei verschiedenen Temperaturen durch eine möglichst gleichstarke Erschütterung der Probe ausgeführt.

Für eine Ni-Probe wurde die $\cos \vartheta$ -Änderung bei 11° und 100° C durch gleiche Erschütterung längs der ganzen jungfräulichen Kurve gemessen. Bezogen auf gleiches Richtfeld sind die Änderungen

$\Delta \overline{\cos \vartheta}$ bei beiden Temperaturen sehr verschieden, nicht aber, wenn man $\Delta \overline{\cos \vartheta}$ auf die gleiche Richtungsverteilung $\overline{\cos \vartheta}_0$ des Ausgangszustandes bezieht.

Tabelle 1 enthält die $\overline{\cos \vartheta}_0$ -Ausgangswerte der jungfräulichen Kurve, $\overline{\cos \vartheta}$ für den stabilen Endzustand nach der Erschütterung bei 11° und 100° C, $\Delta \overline{\cos \vartheta}$ die Differenz zwischen stabilem und Ausgangszustand.

Tabelle 1.

$\overline{\cos \vartheta}_0$ bei 11° bzw. 100°	$\overline{\cos \vartheta}$		$\Delta \overline{\cos \vartheta}$	
	11°	100°	11°	100°
$\sim 0,06$	0,2	0,2	$\sim 0,14$	$\sim 0,14$
0,1	0,30	0,31	0,20	0,21
0,2	0,43	0,42	0,23	0,22
0,3	0,51 ₅	0,50	0,21 ₅	0,20
0,4	0,58 ₅	0,58 ₅	0,18 ₅	0,15 ₅
0,5	0,63 ₅	0,63 ₅	0,13 ₆	0,13 ₅
0,54	0,65 ₀	—	0,11 ₀	—
0,55	—	0,65 ₃	—	0,10 ₃
0,60	—	0,67 ₅	—	0,07 ₅
0,62	—	0,67 ₅	—	0,06 ₅

Dieses Ergebnis entspricht genau dem, welches wir für den Betrag der Wechselfeld-Idealisierung bei verschiedenen Temperaturen erhalten haben⁵⁾.

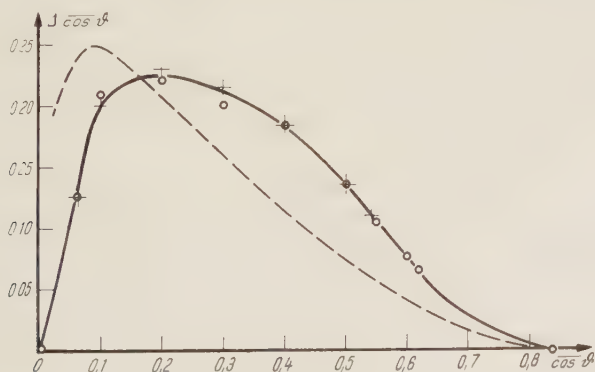


Fig. 2.

Zunahme von $\overline{\cos \vartheta}_0$ durch Erschütterung. + bei 11° C. o bei 100° C.
 --- durch Wechselfeld-Idealisierung bei 11° und 100° (Ordinate $\times 2$).

Die Zunahme von $\overline{\cos \vartheta}$ ist also für beide Temperaturen gleich, wenn auf gleichen Wert der reduzierten Ausgangsmagnetisierung bezogen wird. (Fig. 2). Ein Ausgangszustand mit $\overline{\cos \vartheta} 0,85$ ist stabil gegen

⁵⁾ W. GERLACH und A. TEMESVARY, Zs. f. Phys. **124**, 570 (1947).

Erschütterung und auch nicht mehr durch Wechselfeld (oder thermisch) idealisierbar. Abb. 2 zeigt aber, dass die Abhängigkeit $\Delta \cos \vartheta = f(\cos \vartheta_0)$ ziemlich anders verläuft als bei der *W*-Idealisierung; insbesondere liegt das — viel breitere — Maximum bei höheren $\cos \vartheta_0$ -Werten. Auch die folgenden Versuche zeigen, dass die magnetischen Molekularevorgänge, welche die Zunahme durch die Erschütterung bewirken, anderer Art sind als die bei der *W*-Idealisierung.

IV.

Dies wird geschlossen aus der *W*-Idealisierungskurve von verschiedenen stark erschütterten Proben. Figur 3 *ABC* enthalten das Ergebnis von Messungen folgender Art: Die unterste Kurve *a* stellt jeweils die normale *W*-Idealisierungskurve in dem angegebenen Richtfeld *H* dar, d. h. die Zunahme der jungfräulichen Magnetisierung *J* in Abhängigkeit von der gesteigerten Maximalamplitude (Abszisse) des idealisierenden Wechselfeldes; jedesmal wurde das Wechselfeld mit einem Gumlich-Rogowski-Transformator langsam kontinuierlich auf Null gebracht; gearbeitet wurde mit 50 Hz; es war gleichgültig, ob diese Schwächung über 500 oder 6000 Feldwechsel durchgeführt wurde, auch ob die jeweilige Maximalamplitude plötzlich eingeschaltet oder ob von Null auf sie gesteigert wurde. Sodann wurde die Probe wieder in den gleichen Ausgangszustand gebracht und unter dem gleichen Richtfeld *H* einer gewissen Erschütterung unterworfen, wodurch ihre Magnetisierung zunahm. Jetzt wurde wieder in der gleichen Weise die *W*-Idealisierungskurve *b* des erschütterten Zustandes aufgenommen. Dasselbe wurde wiederholt für stärkere Erschütterungen (*c*, *d*, *e*), sowohl bei 12° als auch bei 100° C.

Die durch die Erschütterung erfolgte $\cos \vartheta$ -Zunahme (Erhöhung des Ausgangspunktes auf der Ordinate) beruht also *nicht* auf den gleichen inneren Orientierungsänderungen wie dieselbe $\cos \vartheta$ -Zunahme, welche durch eine partielle *W*-Idealisierung hergestellt wird. Wäre das der Fall, dann müsste die *W*-Idealisierungskurve der erschütterten Zustände zunächst horizontal bis zum Schnittpunkt mit der *W*-Idealisierungskurve *a* verlaufen und dann dieser folgen. Sie steigt aber schon bei kleiner *W*-Feldamplitude an und läuft erst bei der Sättigung in die letztere ein. Erst die durch stärkere Erschütterungen erreichten höheren $\cos \vartheta$ -Werte zeigen einen kleinen horizontalen Bereich ihrer *W*-Idealisierungskurve.

Durch eine geringe Erschütterung laufen also schon irreversible Vorgänge ab, welche erst durch hohe *W*-Amplituden eingestellt werden. Andererseits ist auch der stark erschütterte Zustand schon

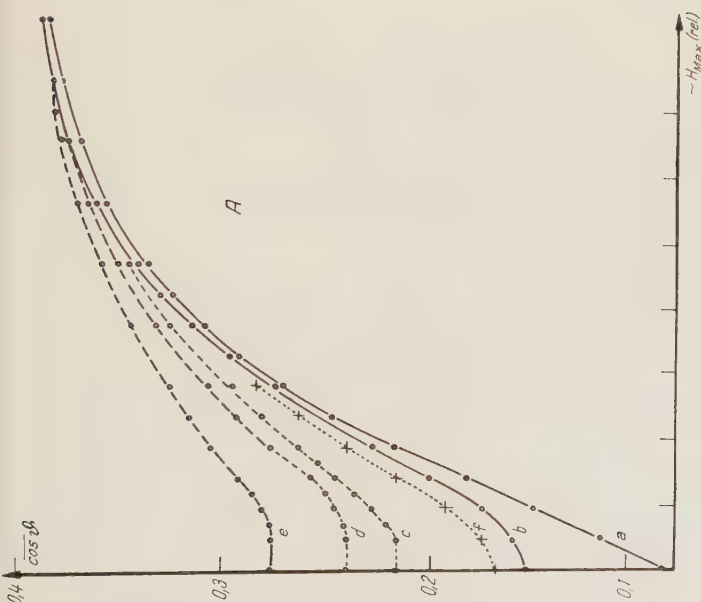
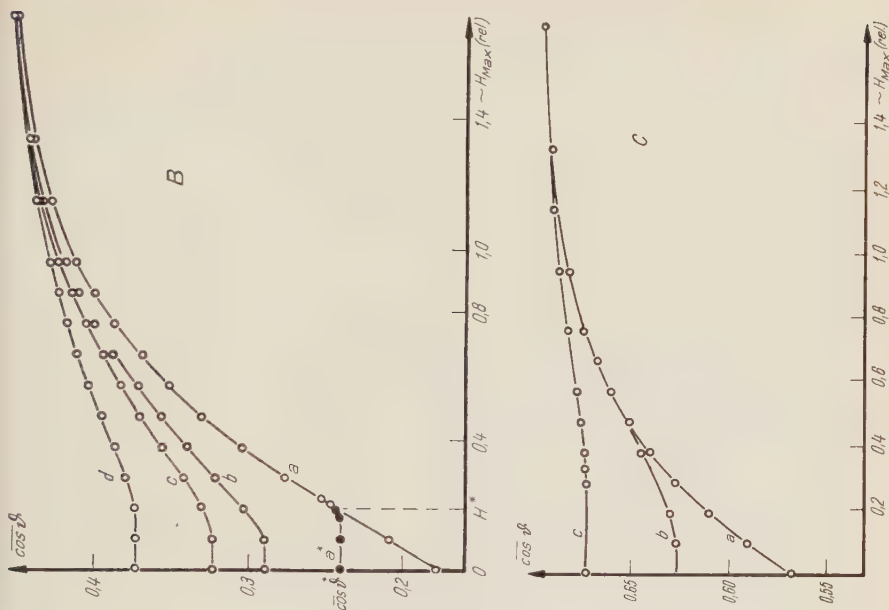


Fig. 3 A B C.

Wechselfeld-Idealisierungskurven

A. 120° , $H = 5 Oe$

B. 120° , $H = 13,6 Oe$

C. 100° , $H = 5 Oe$.

a) jungfräulicher Zustand; b), c), d), e) zunehmend erschüttert,
f) nach partieller thermischer Idealisierung.

durch kleine W -Felder weiter idealisierbar. (Es muss unter Verwendung stehender Schwingungen noch untersucht werden, welche Unterschiede zwischen Knoten und Bäuchchen bestehen.)

Es sei noch hinzugefügt, dass auch die Abmagnetisierungskurve eines „erschütterten“ Zustands wesentlich anders verläuft als die eines W -idealisierten Zustandes.

Partiell-thermisch-idealisierte Zustände verhalten sich ähnlich wie die erschütterten: in Figur 3. A Kurve f ist der Ausgangszustand der Kurve a durch Erwärmung und wieder Abkühlung auf 12° im konstanten Richtfeld $50e$ hergestellt; auch dieser zeigt die gleiche Art der Idealisierbarkeit, wie die erschütterten Zustände.

Erwähnt sei noch eine Beobachtung: wenn mit einer gewissen maximalen W -Feld-Amplitude H^* z. B. bis $\overline{\cos \vartheta^*}$ partiell idealisiert war und nun nochmals mit kleinen Maximalamplituden anfangend die W -Idealisierungskurve aufgenommen wird, so bleibt $\overline{\cos \vartheta^*}$ zunächst konstant, steigt aber *kurz vor* H^* an. Es scheint sich hier um eine Folge der irreversiblen Nachwirkung zu handeln. In Figur 3B ist bei Kurve a ein solcher Versuch eingetragen. Die W -Idealisierung wurde bei $\overline{\cos \vartheta^*} = 0,24$ unterbrochen und nochmals mit kleinem Wechselfeld begonnen. Bei Steigerung des Wechselfeldes ergibt sich jetzt die Kurve a^* . Erst nach mehrfacher Wiederholung wird a^* reversibel.

V.

Zusammenfassung.

1. Die Zunahme der Magnetisierung durch Erschütterung unter konstantem Feld beruht auf der elastischen Beeinflussung der Vorzugslagen der Magnetisierungsvektoren.
2. Die Zunahme der Ausrichtung durch Erschütterung hängt nur von der Ausrichtung im Ausgangszustand ab, unabhängig von der Temperatur.
3. Für Ausgangszustand und verschieden stark erschütterte Zustände ist das Produkt von Anfangsmagnetisierung (zunehmend) und Coerzitivkraft (abnehmend) angenähert konstant.
4. Gleiche $\Delta \cos \vartheta$ -Zunahmen unter konstantem Richtfeld durch Wechselfeldidealisierung, durch partielle thermische Idealisierung und durch Erschütterungen beruhen auf verschiedenen Umorientierungsvorgängen. Erstere ist rein magnetisch, die zweite durch eine thermische Auslösung der irreversiblen Nachwirkung, die dritte durch die spannungsbedingte Vektorenlage gegeben.

München, Physikalisches Institut der Universität.

Messungen bei höheren Temperaturen an dielektrischen Substanzen in cm-Wellenbereich

von F. Borgnis (Zürich).

(16. I. 1949.)

Dielektrizitätskonstante und dielektrische Verluste verschiedener Materialien (insbesondere Einschmelzgläser und keramische Stoffe) wurden bei cm-Wellen bis zu Temperaturen von 400° C mittels Hohlraumresonatoren gemessen. Im Gegensatz zu vielen Gläsern zeigen keramische Stoffe keine wesentlichen Veränderungen der dielektrischen Verluste innerhalb des untersuchten Temperaturbereichs; die Dielektrizitätskonstante ändert sich bei allen untersuchten Proben nur sehr wenig.

Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten (DK) ϵ und der dielektrischen Verluste (Leitfähigkeit σ oder Verlustfaktor $\tan \delta$) von Isolierstoffen bei Mikrowellen stehen im wesentlichen zwei Methoden zur Verfügung: die eine macht von der Veränderung des Resonanzzustandes durch das Einbringen einer Probe in einen Reso-

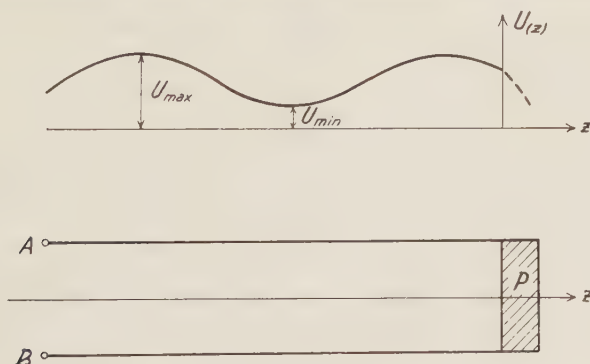


Fig. 1.

Zylindrischer Wellenleiter mit einer dielektrischen Probe P. Bei Erregung zwischen zwei Punkten A, B bildet sich längs der z-Achse eine periodische Verteilung der Spannungsamplitude $U(z)$.

nator Gebrauch, die andere von der Beeinflussung der räumlichen Spannungsverteilung längs eines Wellenleiters durch eine darin befindliche Probe. Ein Beispiel für das letztere Verfahren zeigt Fig. 1. Eine Erregung zwischen zwei geeigneten Punkten A, B mit einer Kreisfrequenz ω , die längs der z-Achse laufende Wellen erzeugt, gibt zu einer periodischen Verteilung der Spannungsamplitude $U(z)$

auf der Leitung Anlass, die man sich durch Superposition einer auf die Probe zulaufenden mit einer von derselben reflektierenden Welle entstanden denken kann. Die Spannungsverteilung lässt sich durch zwei Grössen charakterisieren, die ausser von den Eigenschaften der Probe noch davon abhängen, in welcher Weise die Leitung hinter der Probe abgeschlossen ist; gewöhnlich wählt man als Merkmale der Spannungsverteilung die Koordinate eines Spannungsknotens oder -bauchs sowie das «Wellenverhältnis» U_{\max}/U_{\min} . Das Abtasten der Spannung längs der Leitung - meist noch bei verschiedenen Abschlussverhältnissen am Leitungsende - gibt die notwendigen Daten zur Ermittlung der dielektrischen Konstanten der Probe. Als Messleitungen lassen sich bei Wellenlängen bis herab zu einigen Zentimetern konzentrische Leitungen unter Erregung des «Lechertyps» (TEM-Typ) oder bei noch kürzeren Wellenlängen Hohlleiter unter Erregung einer Welle des elektrischen (TM) oder magnetischen (TE) Typs verwenden.

Messungen mit einer solchen Anordnung über ein Temperaturintervall von einigen 100° C bereiten zufolge der Wärmeausdehnung in den verschiedenen Teilen der relativ komplizierten Apparatur grössere Schwierigkeiten. Das Abtasten der Spannung erfolgt im allgemeinen durch einen schmalen Längsspalt hindurch mit einer feinen Sonde, die auf einem Wagen bewegt werden kann, wobei sorgsam sowohl auf einwandfreie mechanische Führung wie auch den elektrischen Kontakt geachtet werden muss. Die Ablesegenauigkeit der Stellung der Sonde soll einige hundertstel Millimeter betragen. Auf hohe Konstanz des Rohrquerschnitts bei präziser Schlitzung muss gesehen werden, ferner auf einen genau definierten Leitungsabschluss hinter der Probe sowie bei Rohren mit Innenleiter auf mechanisch und elektrisch einwandfreie Abstützungen. Diese kurze Erwähnung der wichtigsten experimentellen Erfordernisse bei dieser Methode dürfte die Schwierigkeiten evident machen, die überwunden werden müssen, um mit einer solchen Apparatur eine genügende Messgenauigkeit über einen grösseren Temperaturbereich zu erzielen.

Aus diesem Grunde wurde die andere, eingangs erwähnte «Resonanzmethode» benutzt, wobei mit Rücksicht auf Temperaturversuche ein mechanisch möglichst einfacher Resonator Verwendung fand. Ein kreiszylindrischer Hohlraumresonator wird in der elektrischen Grundschwingung [1] erregt; die Eigenwelle λ hängt hier allein vom Radius R des Zylinders, nicht aber von seiner Länge l ab und ist durch $\lambda = 2,61 \cdot R$ gegeben. Das elektrische Feld E_z besitzt nur eine Komponente in Richtung der Zylinderachse, das Magnet-

feld verläuft in Kreisen um die z -Achse. (Fig. 2). Die Intensität von E_z fällt vom Maximum auf der Achse nach einer Besselfunktion (J_0) zum Wert Null am metallischen Zylinderrand ab. Die Probe wird als dünnes, gewöhnlich kreisrundes Stäbchen über die ganze Länge l zentrisch in den Hohlraum eingebracht. Die durch die Probe hervor- gebrachte Dämpfungserhöhung und Veränderung der Resonanz- frequenz lassen sich einfach berechnen. Der Vorteil dieser Anord- nung liegt in ihrer geometrischen Einfachheit, sowohl im Hinblick auf eine exakte theoretische Behandlung als auf die geometrischen Veränderungen bei Wärmeeinwirkung. Gemessen werden die Ver- änderung $\Delta \lambda$ der Resonanzwelle λ sowie die Halbwertsbreiten d'

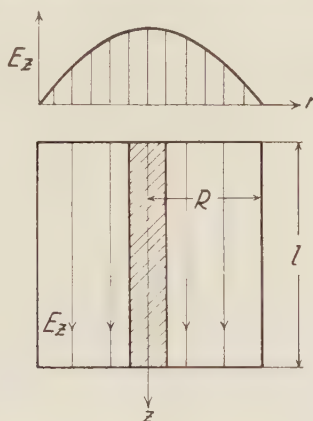


Fig. 2.

Elektrische Grundschiwingung (TM_{001}) im kreiszylindrischen Hohlraum (Radius R , Länge l) mit zentrisch angebrachter dielektrischer Probe. Das elektrische Feld E ist längs der z -Achse konstant; den radialen Amplitudenverlauf $E_z(r)$ zeigt die obere Kurve.

bzw. d der Resonanzkurve des Hohlraums mit und ohne Probe. Die DK ε und der Verlustfaktor $\operatorname{tg} \delta$ bestimmen sich bei dünnen kreis- zylindrischen Proben vom Radius ϱ aus folgenden Beziehungen [2]:

$$\varepsilon - 1 = 0,538 \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{0,269}{\varepsilon} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2 (d' - d),$$

wobei Leitfähigkeit σ und Verlustfaktor zusammenhängen durch*)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}.$$

Während bei Zimmertemperatur gewöhnlich metallische Hohl-

*) σ in $(\text{Ohm} \cdot \text{cm})^{-1}$; $\varepsilon_0 = 0,886 \cdot 10^{-18}$.

räume verwendet werden, wurden für die Temperaturmessungen keramische Hohlzylinder aus Calit benutzt, deren Innenseite versilbert war. Zwei Typen kamen dabei zur Verwendung (Fig. 3): Der Typ *a* war oben offen und mit einem Flansch versehen; ein ebener Deckel, der genau auf dem Flansch auflag, wurde längs des Umfangs mechanisch aufgedrückt. Der Hohlzylinder trug am Boden einen kurzen Rohrstutzen zur Einführung der Ankopplung, der Deckel ebenfalls einen Kopplungsstutzen sowie eine zentrische (leicht konische) Öffnung, in die eine entsprechende Vorrichtung zum Einbringen der Proben (Stäbchen von zirka 100 mm Länge und wenigen Millimetern Durchmesser) eingesetzt werden konnte. Der Typ *b* war

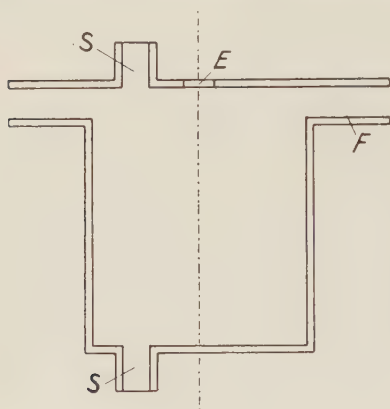


Fig. 3a.

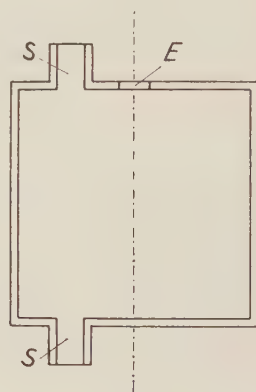


Fig. 3b.

Kreisförmige keramische Hohlräume (Calit). Die Innenflächen sind mit einem Überzug aus Silber versehen. Type *a* besitzt einen getrennten Deckel, der auf den Flansch *F* aufgesetzt wird; Type *b* ist oben geschlossen. Kreisförmige Öffnungen *E* dienen zur Einführung der Proben, die Rohrstutzen *S* zur Ein- und Auskopplung.

an beiden Enden abgeschlossen. Beide Typen waren geeignet. Die Kopplung wurde durch starre Stücke konzentrischer Rohrleitungen vermittelt, welche, am Ende durch Schlitze federnd, in die Rohrstutzen eingeführt wurden. Der Hohlraum befand sich in einem Thermostaten; die Durchführungen für die beiden Koppelleitungen waren mit einer Wasserkühlung versehen. Zum Einbringen der Probestäbchen erwies sich eine die Öffnung *E* genau schließende Calitscheibe, die im Zentrum eine kreisförmige Einschmelzung aus einer speziellen Nickelstahllegierung trägt, als geeignet; in das Metall kann die Vorrichtung zur Einführung und zum Justieren der Proben eingeschraubt werden.

Als Generator fand eine Bremsfeldröhre für 14 cm Wellenlänge [3], die sich durch die notwendige Frequenzkonstanz (10^{-6}) aus-

zeichnete, Verwendung; als Indikator dienten neben Dioden vorwiegend Spezialdetektoren (Germanium). Die günstigsten Koppelungsbedingungen wurden durch Transformationsvierpole vermittelt, die das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsimpedanz in weiten Grenzen zu variieren erlaubten. Ein Schema der Gesamtanordnung zeigt Fig. 4.

Die Temperatur im Thermostaten liess sich zwischen Zimmertemperatur und etwa 500°C verändern; sie wurde mit einem Thermometer gemessen. Zunächst wurde im leeren Hohlraum der Temperaturgang der Resonanzwellenlänge und der Dämpfung durch Aufnahme der Resonanzkurven ermittelt, wobei eine befriedigende

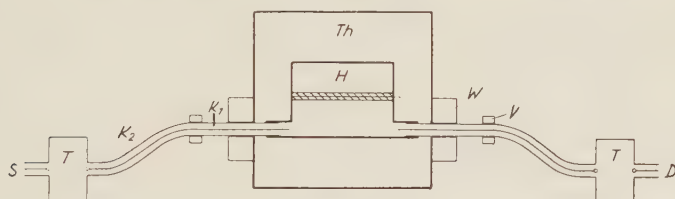


Fig. 4.

Schema der Anordnung zur Messung stabförmiger dielektrischer Proben bei höheren Temperaturen: *S* Sender, *D* Detektor, *T* Transformationsvierpole, *K*₂ flexible konzentrische Leitungen, *V* Verbindungsstücke, *K*₁ starre konzentrische Leitungen zur Einführung der Ein- und Auskopplung in den Messhohlraum *H*, *W* Wasserkühlung, *Th* Thermostat.

Reproduzierbarkeit erzielt wurde. Die gemessenen Dämpfungen lagen in der Grössenordnung der theoretischen Werte. Bei der Durchmessung der Proben wurde die Anordnung auf etwa 400°C aufgeheizt; die Messungen wurden im Verlauf der sich selbst überlassenen Abkühlung, die einige Stunden dauerte, durchgeführt. Die erreichte Genauigkeit lässt sich beim Verlustfaktor mit durchschnittlich 10% angeben, was bei Messungen dieser Art als genügend angesehen werden kann.

Die folgende Tabelle enthält eine Anzahl von Messresultaten, insbesondere an keramischen Hochfrequenzisolierstoffen und Einschmelzgläsern*). Die Änderung der $DK\epsilon$ in dem untersuchten Temperaturbereich lag innerhalb der Messgenauigkeit von einigen Prozenten.

*) Die Messungen wurden bereits vor längerer Zeit am Physikalischen Institut (Abt. für Technische Physik) der Universität Graz durchgeführt. Herrn Privatdozent Dr. E. LEDINEGG bin ich für seine Mitarbeit zu besonderem Dank verpflichtet.

Tabelle.

Dielektrizitätskonstante ϵ und Verlustfaktor $\operatorname{tg} \delta$ bei $\lambda = 14$ cm ($\nu = 2,1 \cdot 10^9$ Hz)

Nr.	Materialbezeichnung	ϵ	$10^4 \cdot \operatorname{tg} \delta$		
			20° C	250° C	350° C
1	Ergan	3,8	19	Verlustfaktor ändert sich nur innerhalb der Fehlergrenze	
2	Calit	5,4	10		
3	Frequenta	5,4	12		
4	Tempa S	11,7	7		
5	Condensa C, F	80,	<20		
6	Quarz	3,5	3,5		
7	Beton	8,5	300		
8	Uviolglas	4,9	83		
9	Supremaxglas	5,2	33		
10	Magnesiaglas	6,4	70		200
11	Wolframglas 122p . . .	6,3	36	90	120
12	Wolframglas 246b . . .	6,9	80	190	250
13	Wolframglas 301b . . .	7,7	20	45	50
14	Wolframglas 637h . . .	5,0	42	60	80

Bei den keramischen Isolierstoffen (Nr. 1-5) ist der Temperatureinfluss auf den Verlustfaktor sehr gering. Die keramischen Stoffe sind daher bis zu sehr kurzen Wellen und auch bei relativ hohen Temperaturen vorzügliche Hochfrequenzisolierstoffe. Orientierende Messungen bei einer Wellenlänge von 7 cm zeigten, dass sich das Bild nicht verändert. Abweichungen von diesem Verhalten, d. h. Dispersionserscheinungen sind erst bei um 1 bis 2 Zehnerpotenzen kürzeren Wellenlängen zu erwarten. Einschmelzgläser wurden in grosser Zahl untersucht; die ausgewählten Beispiele der Tabelle zeigen, dass hierbei eine beträchtliche Variationsbreite im Temperaturverhalten des Verlustfaktors vorliegt; bei höheren Temperaturen können daher an Glaseinschmelzungen beachtliche Hochfrequenzverluste auftreten.

Literatur.

- [1] F. BORGNIS, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **54**, 121, 1939 und **59**, 22, 1942.
- [2] F. BORGNIS, Physikalische Zeitschr. **43**, 284, 1942.
- [3] A. ALLERDINGS, W. DÄLLENBACH, W. KLEINSTEUBER Hochfr. Techn. u. Elektroak. **51**, 96, 1938 u. W. DÄLLENBACH, id. **61**, 161, 1943.

Mesures spectroscopiques des radiations X de radioéléments

par P. Marmier, J.-P. Blaser, P. Preiswerk et P. Scherrer.

(27. I. 1949.)

Summary. An X-ray curved-crystal spectrometer of the Cauchois type for use in nuclear research, using a film or a Geiger counter as detector, has been designed. A detailed investigation of intensity problems is given in the case where strong perturbing radiation is present. The X rays of 50 min. Tc-isomer have been measured and the wavelengths of the K lines determined.

L'émission d'un rayonnement X caractéristique se produit au cours d'un très grand nombre de désintégrations. En particulier, la capture K donne lieu à l'ionisation de la couche K et à l'émission du rayonnement X caractéristique de l'élément final de la désintégration. De même, chaque fois qu'une radiation du noyau est convertie dans le cortège électronique, des radiations caractéristiques des couches K, L, M... sont émises. Les énergies ne sont cependant pas les mêmes si le rayon provient du noyau primaire ou du noyau final de la désintégration, ce qui permet de l'attribuer à l'un ou à l'autre.

Très souvent, la détection de ces radiations peut se faire au moyen de mesures d'absorption, et, si cela est possible, on utilise des absorbants critiques. Ces mesures ont l'avantage de leur simplicité et permettent d'utiliser de grands angles solides, c'est-à-dire de petites intensités. Elles deviennent cependant peu exactes, ou ne donnent aucun résultat, lorsqu'on est en présence d'un fort bruit de fond dû aux autres rayonnements de la préparation active ou que la radiation X est composée. Dans ces conditions, une mesure spectroscopique est nécessaire. Toutefois, les radioéléments dont on peut disposer à partir d'un cyclotron sont des sources d'une intensité 10^4 — 10^5 fois inférieure à celle des tubes à rayons X et les temps d'exposition sont liés à la période de l'isotope étudié. Il n'est donc guère possible d'utiliser des spectrographes classiques dont les angles solides sont très petits et dont la luminosité est fonction du pouvoir séparateur.

Le montage bien connu de CAUCHOIS¹⁾ permet d'agrandir considérablement l'angle solide utilisable, sans porter atteinte au pouvoir

séparateur. En plus de sa grande luminosité, il remplit spécialement bien deux conditions imposées par la physique nucléaire: sources étendues et présence de rayonnements perturbateurs. La méthode de Cauchois a déjà été employée avec succès par plusieurs auteurs dont: DU MOND²⁾, EDWARDS et al.³⁾. Rappelons-en brièvement le principe:

Un cristal est courbé selon une portion de cylindre de rayon R . La source est placée du côté convexe du cristal. Les rayons X réfléchis sur les plans réticulaires internes du cristal sont focalisés, du

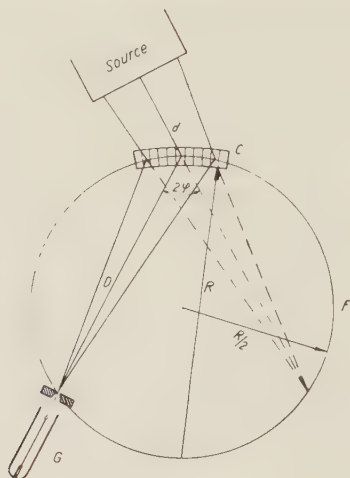


Fig. 1.

côté concave, sur un cercle de rayon $R/2$, tangent au sommet du cristal (fig. 1). Sur ce cercle, on dispose un film courbé convenablement, ou on déplace la fente d'un compteur de GEIGER. On obtient une raie ou un maximum d'intensité pour un angle de BRAGG φ correspondant à la longueur d'onde mesurée et à la constante réticulaire du cristal. Aucune fente n'étant placée entre la source et le cristal, l'ouverture utile atteint plusieurs degrés.

Choix des Dimensions.

Comme nous l'avons déjà dit, la source de rayons X dont on désire mesurer l'énergie est en même temps une source de radiations perturbatrices. Il est donc important de savoir comment l'intensité utile (signal S , c'est-à-dire nombre de coups ou noircissements) et l'intensité perturbatrice (bruit N) dépendent des dimensions générales de l'appareil.

Pour calculer le signal S , considérons un élément de la source. S sera proportionnel à l'angle spatial dans lequel les radiations peuvent être émises de façon à pouvoir atteindre le récepteur après réflexion dans le cristal. L'ouverture verticale ζ (parallèle aux génératrices du cylindre de courbure) est égale à :

$$\zeta = \frac{h}{D+d}$$

où h désigne la hauteur de la fente du compteur, D la distance cristal-compteur et d la distance source-cristal. L'ouverture horizontale ε' dépend de l'angle ε de la mosaïque du cristal, qui exprime l'écart maximum entre les plans réticulaires réels et ceux du cristal idéal. Il est facile de se rendre compte que

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{D}{d}.$$

Le signal produit par une source d'intensité 1 pendant un temps t sera donc :

$$S = \frac{h D \alpha t}{(d + D)^2} \quad (1)$$

où α représente le pouvoir de réflexion du cristal.

Pour obtenir les meilleures conditions de mesure, il est nécessaire de blinder la source de manière que seul le cristal soit exposé à son rayonnement. Le bruit N proviendra donc du rayonnement secondaire diffusé par le cristal. L'ouverture F de ce dernier étant fixée par la dimension de la source ainsi que par la nécessité de balayer, au cours d'une mesure, un certain domaine d'énergie, nous la considérons dans ce qui suit comme constante.

Dans ces conditions, le cristal vu du récepteur, représente une source de rayons diffusés d'intensité proportionnelle à l'éclairement du cristal, c'est-à-dire variant avec l'inverse de d^2 . Si l'on désigne par δ la largeur de la fente du compteur, largeur égale à celle des raies sur le cercle de focalisation, et par σ un coefficient de diffusion du cristal pour les rayonnements perturbateurs, le bruit N sera :

$$N = \frac{h F \delta \sigma \cdot t}{d^2 D^2} \quad (2)$$

Pour obtenir le meilleur contraste entre le fond continu et la ligne mesurée, on a à choisir le rapport S/N maximum. Celui-ci est :

$$\frac{S}{N} = \frac{d^2 D^3}{(d + D)^2} \cdot \frac{\alpha}{F \delta \sigma} \quad (3)$$

ce qui montre que ce maximum est atteint pour des dimensions

infiniment grandes. Toutefois, il faudrait aussi un temps infini pour la mesure. Le temps de mesure étant limité en pratique, et le but à atteindre, de déterminer avec la plus grande précision possible la présence (c'est-à-dire l'intensité) d'une ligne, il faudra rechercher le minimum de l'erreur relative $\delta S/S$, due à la statistique. Le signal S ne peut pas être mesuré directement, mais seulement par la relation

$$S = (S + N) - N.$$

L'erreur δS se déduit des erreurs sur $S + N$ et N d'après :

$$\delta S = \sqrt{\{\delta(S + N)\}^2 + (\delta N)^2}$$

En introduisant les valeurs de S et de N données par (1) et (2) on trouve :

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{1}{\sqrt{h \alpha t}} \sqrt{\frac{(d + D)^2}{D} \left\{ 1 + \frac{2 F \delta \sigma}{\alpha} \cdot \frac{(d + D)^2}{d^2 D^3} \right\}}. \quad (4)$$

Cette expression permet de calculer la dimension optimum du spectrographe en cherchant le D rendant $\delta S/S$ minimum. Celui-ci devient :

$$D_{\text{opt}} = 4 \cdot \sqrt[3]{\delta F \frac{\sigma}{\alpha}}$$

Les valeurs de α et de σ sont difficiles à estimer et varient énormément d'une source à l'autre. Une estimation grossière donne pour D (c'est-à-dire pour R) une valeur de plusieurs dizaines de cm. Nous avons choisi une valeur de R de 33 cm donnant, avec un cristal de constante réticulaire inférieure à 5 Å, un pouvoir de résolution suffisant pour permettre de séparer les lignes K de tous les éléments. Une fois qu'on dispose d'un spectrographe donné, il s'impose de savoir à quelle distance du cristal la source doit être placée, de façon à obtenir la meilleure statistique du signal S . En cherchant dans (4) le rapport D/d rendant, indépendamment de la valeur de $F \delta \sigma/\alpha$, $\delta S/S$ minimum, on trouve : $D = 3 d$.

Réalisation de l'appareil.

Sur la fig. 2 on aperçoit en C le porte-cristal, en F le cercle de focalisation. Le compteur de GEIGER G est constamment orienté vers le cristal par la tige directrice T . Le cercle de focalisation et le cristal peuvent tourner autour d'un axe vertical passant par le sommet du cristal. En L se trouve une lunette servant à orienter le cercle de focalisation et le cristal par rapport à la source, de manière à l'amener dans l'angle d'incidence de BRAGG.

Lors de mesures avec le compteur, on maintient la tige directrice T' fixe dans l'espace. A un mouvement de la vis micrométrique entraînant le compteur correspond alors une rotation du cristal et du cercle de focalisation et une translation du compteur le long de T' . L'avantage de ce procédé est de permettre de disposer la source, le compteur et les blindages respectifs de manière fixe. En P est disposée la cassette courbant le film suivant le cercle de focalisation.

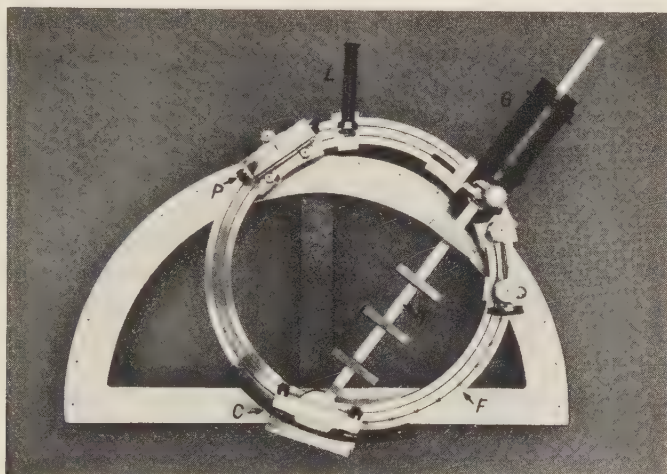


Fig. 2.

Choix des cristaux et mise au point.

Le nombre des cristaux pouvant être courbés est assez restreint. Nous avons fait des essais avec le sel gemme, le quartz et la muscovite. Comme, le plus souvent, la source radioactive est une target de cyclotron présentant une activité répartie sur 1 cm environ, le cristal doit avoir une surface utile de 1 à 3 cm². Le sel gemme ne présente pas une courbure régulière (glissement des plans réticulaires les uns sur les autres) et donne par conséquent des lignes mal définies et faibles. Nous n'avons employé le quartz que sous de faibles épaisseurs et pour des longueurs d'onde supérieures à 1,2 Å. Pour des longueurs d'ondes inférieures, nous avons adopté la muscovite dont nous employons la constante réticulaire de 2,5 Å. Nous choisissons habituellement les plans inclinés de 10° par rapport à la normale aux plans de clivage. L'orientation du cristal dans son support se fait, en première approximation, par rapport à la figure de choc et aux axes optiques. Le reste du réglage se fait dans l'appareil lui-même, au moyen de rayons X. Un petit nombre de spé-

cimens seulement donnent, à épaisseur égale, des intensités réfléchies utilisables pour des sources radioactives. L'épaisseur du cristal adaptée au domaine d'énergie considéré doit être déterminée expérimentalement. Pour des énergies de l'ordre de 25 keV elle est de 0,4 mm.

De par ses défauts naturels, ainsi que pour des raisons mécaniques, le cristal courbé ne forme jamais une surface cylindrique géométriquement parfaite et son rayon de courbure ne correspond pas exactement à celui des joues entre lesquelles il est fixé. Pour obtenir un bon pouvoir de résolution, il est indispensable que le récepteur ne s'écarte du cercle ayant comme diamètre le rayon de courbure moyen du cristal et tangent au centre de ce dernier, que de quelques millièmes de R au plus. Une variation de la méthode de FOUCAULT servant à contrôler la perfection des lentilles et des miroirs a été utilisée pour ce réglage. On place sur le cercle de focalisation une source de lumière ponctuelle et intercepte au moyen d'une lame de rasoir l'image filiforme réfléchie par la surface concave du cristal. Dans une lunette placée derrière la lame, on aperçoit un relief de la surface du cristal. Si la lame se trouve au foyer réel de la portion du cristal considérée, celle-ci apparaît plate. Ceci permet de mesurer avec une haute précision la courbure locale de chaque zone du cristal, et d'effectuer les réglages nécessaires.

Méthode de mesure.

L'intensité nécessaire à une mesure varie beaucoup suivant la région d'énergie étudiée, puisque la sensibilité du compteur (ou celle du film) en dépend, de même que le pouvoir de réflexion du cristal. Il est en général possible d'obtenir des photographies et des mesures au compteur satisfaisantes à partir de quelques millicuries en rayonnement X. Pour les périodes courtes, des irradiations répétées seront nécessaires pour obtenir un noircissement suffisant. Il faut cependant ajouter que l'enregistrement au moyen du compteur n'est pas équivalent à celui qu'on obtient par le film. La photographie a l'avantage d'intégrer l'intensité au cours du temps (longues périodes), tandis que le compteur permet de mesurer la période correspondant à une ligne. Lorsqu'à côté du rayonnement X, la source émet des positrons, on peut réduire considérablement le bruit de fond dû à la radiation d'annihilation provenant du cristal, en disposant devant la source un filtre de Beryllium (quelques millimètres), qui laisse passer, presque sans les absorber, les rayons X. Un second filtre de Be, placé directement devant le film, arrête les électrons secondaires.

Le compteur.

Le compteur doit présenter une sensibilité aussi grande que possible dans un domaine d'énergie allant jusqu'à 100 keV environ. Afin d'obtenir un haut pourcentage d'absorption dans le gaz du compteur, on est obligé de recourir à des gaz de remplissage lourds (Kr ou Xe), et à des pressions aussi élevées que possible. Dans ces conditions, l'auto-extinction de la décharge devient critique avec les adjonctions organiques usuelles. De bons résultats ont été obtenus avec du Krypton à 40 cm Hg additionné de 7 à 10 mm d'acétate d'amyle, de *n*-pentane, de chlorure d'éthyle, de bromure de méthyle ou, tout spécialement, de bromure d'éthyle. Avec ce dernier gaz,

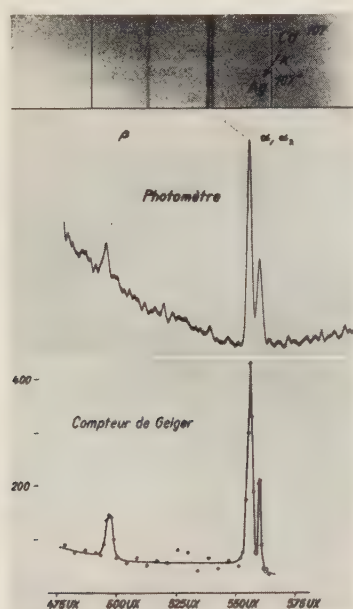


Fig. 3.

des plateaux d'une longueur de 300 V inclinés de 3 à 5% par 100 V sont obtenus avec une tension de service d'environ 1500 V. Les compteurs sont en verre, munis d'une mince fenêtre frontale (2 mg/cm²) de mica. Celle-ci est collée au moyen d'Araldit (Ciba). Le fil est en tungstène poli électrolytiquement et a un diamètre de 0,3 à 0,4 mm. Ces compteurs peuvent enregistrer plus de 10⁸ coups sans variation sensible des caractéristiques.

Mesure du Cd^{107} .

La désintégration du Cd^{107} (6,7 h) fournit un exemple particulièrement favorable à une mesure de contrôle. En effet, environ les deux tiers du rayonnement total sont concentrés dans les lignes X de l'argent, le reste étant constitué essentiellement par des électrons de faible énergie. Comme source, on emploie directement la target d'Ag après son irradiation dans le cyclotron (6,8 MeV). Après 4 h de bombardement, on obtient une activité, en rayons X, d'environ 10 millicuries. La fig. 3 montre les résultats. Au maximum de la ligne $K\alpha_1$ la mesure au compteur permettait d'enregistrer environ 500 coups à la minute avec une fente correspondant à 1,1 UX. La photographie a été exposée pendant deux périodes. Pour augmenter le noircissement, une pellicule renforçatrice a été placée derrière le film, ce qui produit un certain élargissement des lignes. On voit que dans le cas du Cd, où la période est suffisamment longue et le rayonnement perturbateur faible, compteur et film donnent des résultats concordant au point de vue de l'intensité et du pouvoir séparateur.

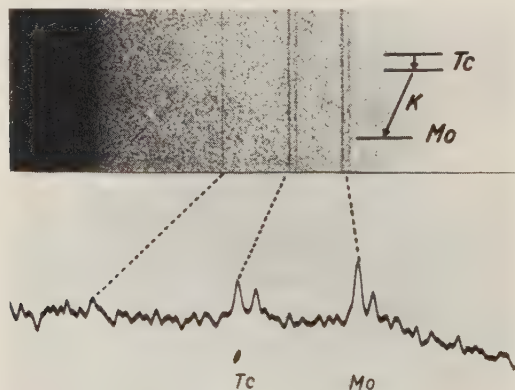


Fig. 4.

Mesure du Tc (élément 43).

Un isotope du Tc, obtenu par irradiation du Mo avec des protons, montre au spectrographe semi-circulaire β une ligne de 33,4 keV ayant une période d'environ 50 min.⁴). Une mesure effectuée au moyen du spectrographe de CAUCHOIS (fig. 4) montre les raies caractéristiques du Tc et du Mo. Ceci a permis de conclure à la présence d'un état isomérique du Tc. Le bruit de fond dû à l'intense rayonnement de positrons ne permet l'enregistrement photographique des lignes que grâce aux filtres de Be. Comme on

le voit sur la figure, le film est complètement noirci sur sa partie gauche. Il ne s'agit pas là d'un rayon direct, mais uniquement d'un rayonnement secondaire passant à côté du Be. Comme la période est relativement courte, une exposition ne suffit pas pour obtenir des lignes bien noircies. Nous avons donc fait 6 irradiations et 6 expositions dans le spectrographe, en prenant chaque fois une target inactive, de manière à éviter l'influence des longues périodes.

Les longueurs d'onde des raies K du Tc ont été mesurées par BURKHART, PEED et SAUNDERS⁵⁾ qui ont excité, dans un tube à rayons X 1,5 mg de Tc, extrait de la pile de CLINTON. Nous en avons fait une nouvelle détermination qui concorde, dans les limites des erreurs possibles, avec celle de ces auteurs. Nous avons calculé ces longueurs d'onde au moyen de la formule de MOSELEY, avec un coefficient d'écran interpolé entre les 8 éléments voisins du Tc. Les résultats sont les suivants:

	calculé	mesuré	
$K \alpha_2$	677,91	677,9	UX
$K \alpha_1$	673,57	673,4	
$K \beta_1$	600,1	600	

Littérature.

- ¹⁾ Y. CAUCHOIS, J. de phys. et rad. **3**, 320 (1932). J. de phys. et rad. **4**, 61 (1933).
- ²⁾ J. W. DUMOND and H. A. KIRKPATRICK, Phys. Rev. **52**, 419 (1937).
J. W. DUMOND, Rev. Sci. Inst. **18**, 626 (1947).
- ³⁾ J. E. EDWARDS, M. L. POOL and F. C. BLAKE, Phys. Rev. **67**, 150 (1945).
- ⁴⁾ O. HUBER, P. MARMIER, H. MEDICUS, P. PREISWERK and R. STEFFEN, Phys. Rev. **73**, 1208 (1948).
- ⁵⁾ L. E. BURKHART, W. F. PEED and B. G. SAUNDERS, Phys. Rev. **73**, 347 (1947).

Über die temperaturbedingte Änderung des Absorptionsspektrums des Sehpurpurs

von **Robert A. Weale**

(Vision Research Unit, Institute of Ophthalmology. University of London.)

(5. II. 1948.)

Die Mitteilung der Herren HERCZOG und WIELAND¹⁾ ist sehr interessant, insbesondere, da ihre Resultate zeigen, dass die Geraden für die Extinktionskoeffizienten in der Nähe des «Kreuzpunktes» einander in einem Punkte schneiden, wenn eine genügende Extrapolierung ausgeführt wird. Es ist leicht zu sehen, dass dieser Punkt am absoluten Nullpunkt liegt, und dass die Wellenlänge, die dieser Temperatur entspricht, derjenigen gleich ist, an der das Absorptionsmaximum zu finden wäre, wenn es möglich wäre, auch dieses bei -273°C zu bestimmen. Die Figuren 4 (III, IV, V) und 5 in der obengenannten Mitteilung bezeugen dies.

Das ist nicht überraschend, denn dieser Schluss folgt schon aus der klassischen Dispersionstheorie. Wie bekannt, ist die Breite eines Absorptionsbandes den Temperaturschwingungen der absorbierenden Korpuskeln zuzuschreiben. Bei -273°C wird die Breite daher unendlich eng. Ausserdem ist zu sehen, dass es eine Wellenlängenregion gibt (die im einfachsten Falle eigentlich nur einer einzigen Wellenlänge entspricht), in welcher der Temperaturkoeffizient des Extinktionskoeffizienten sehr gering ist. Diese Wellenlänge fällt mit der des Absorptionsmaximums zusammen, wenn man letzteres zum absoluten Nullpunkt extrapoliert. Wie erwartet, befindet sich hier auch ein Extremum des Brechungsindex. Es ist interessant festzustellen, dass man dieselbe Beobachtung im ultravioletten Transmissionsband des Silbers machen kann. Hier fällt die besagte Wellenregion, die bei -273°C mit der des Transmissionmaximums identisch wird, mit dem Maximum des Brechungsindex zusammen, und ist daher von ähnlichen Regionen, die in Metallen beobachtet worden sind, und die der Autor²⁾ theoretisch erklärt hat, zu unterscheiden.

Um zu erfahren, ob die von HERCZOG und WIELAND beschriebene geradlinige Relation für kompliziertere Substanzen als Chlor gültig

¹⁾ Helv. Phys. Acta, **21**, 6 (1948).

²⁾ Proc. Phys. Soc., London, **60**, 8 (1948).

ist, wurden BRODA und GOODEVES¹⁾ Resultate für den Sehpurpur gewählt. Der Sehpurpur ist, wie bekannt, die Flüssigkeit in der Netzhaut des Auges, die photochemischen Verwandlungen untersteht, wenn sie dem Licht ausgesetzt wird. Er ist ein Chromoprotein, dessen Molekulargewicht von HECHT und PICKELS²⁾ als 270000 angegeben wird, dessen Wert der Autor aber auf ungefähr 47000 geschätzt hat³⁾. Um gültige Kritik vorwegzunehmen, sei angegeben,

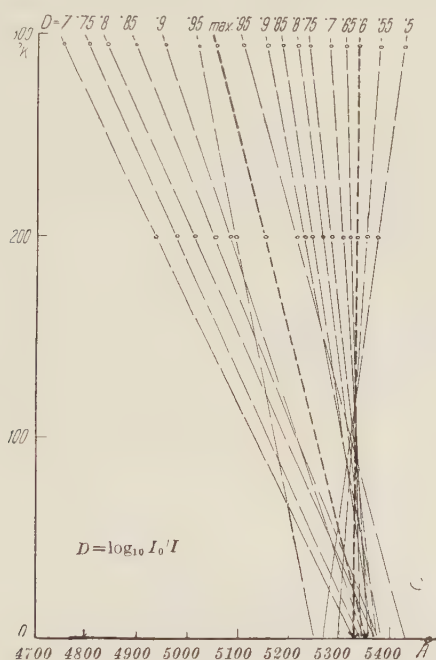


Fig. 1.

dass BRODA und GOODEVE das Absorptionsspektrum für den Sehpurpur nur an zwei Temperaturen bestimmt haben: diese sind $+20^{\circ}$ und -73° C. Andererseits sind diese Temperaturen genügend weit voneinander entfernt, um eine Extrapolierung nicht unberechtigt erscheinen zu lassen. Ihre Resultate sind im beigefügten Diagramm im Sinne von HERZOG und WIELAND reproduziert. Es ist klar, dass die geraden Linien einander in der Nähe des absoluten Nullpunktes schneiden. Die schräge gestrichelte Linie stellt die Temperaturänderung des Absorptionsmaximums dar; es ist zu be-

¹⁾ Proc. Roy. Soc., A, **179**, 151 (1941).

²⁾ Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., **24**, 172 (1938).

³⁾ Nature, London, im Drucke.

tonen, dass diese Gerade *nicht* einem konstanten Extinktionskoeffizienten entspricht. Wie zu sehen ist, erreicht sie den Nullpunkt in der Nähe derjenigen Wellenlänge, welche dem Extinktionskoeffizienten $d\varepsilon/dT = 0$ entspricht.

Man kann nun diesen Schluss ziehen: wenn die Lösung der absorbierenden Substanz genügend dünn ist (im obigen Falle war sie ungefähr $10^{-4} N$), so dass sie als ein Gas betrachtet werden kann, dann wird die ungefähr geradlinige Variation zwischen Temperatur und Wellenlänge für konstante Extinktionskoeffizienten eine solche sein, dass der absolute Nullpunkt und die ihm zugehörige charakteristische Schwingungsfrequenz ($T = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$) als ein Punkt, an dem die geraden Linien einander schneiden, betrachtet werden kann. Dies wurde benutzt, um das Absorptionsspektrum von LYTHGOES «Übergangsorange» (transient orange)¹⁾ bei Zimmertemperatur zu bestimmen. Das Resultat ist aber von keiner Bedeutung im Zusammenhange mit dieser Mitteilung und wird an anderer Stelle berichtet.

¹⁾ Journ. Physiol., **94**, 399 (1938).

Innere Konversion der γ -Strahlung und Röntgenstrahlung beim K -Einfang schwerer Atomkerne

von R. M. Steffen, O. Huber und F. Humbel (ETH. Zürich).

(8. I. 1949.)

Summary. The radiation from the gold isotopes of mass number 194, 195, 196 and 198 obtained by (p, n) -reactions from platinum have been investigated by spectrometric methods and coincidence techniques using calibrated counter arrangements. Complete decay schemes have been obtained; all of the four Au isotopes were found to decay by K -capture; which in the cases of Au¹⁹⁶ and Au¹⁹⁸ is accompanied by β^- -emission.

The internal conversion coefficients α_K and α_L of the various γ -rays have been carefully measured and the multipole character of the transitions deduced therefrom. By measuring the yields of Auger electrons accompanying the K -capture processes in Pt, the internal conversion coefficients for x -rays were determined and found in quantitative agreement with the relativistic theory developed by MASSEY and BURHOP.

I. Einleitung.

1. Innere Konversion von γ -Strahlung.

Ein angeregter Atomkern kann ausser durch Emission von γ -Strahlung auch auf strahlungslosem Wege in den Grundzustand übergehen durch direkte Übertragung seiner Anregungsenergie auf ein Hüllenelektron, wodurch dieses aus dem Atomverband herausgeworfen wird (innere Konversion der γ -Strahlung). Zur γ -Übergangswahrscheinlichkeit, die durch die Strahlungsbreite Γ_γ gegeben ist, tritt also wegen der unmittelbaren Wechselwirkung Kern-Elektronenhülle, noch eine zusätzliche „Konversionsbreite“ Γ_e hinzu; somit ist die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit des Kernniveaus:

$$\lambda = \frac{1}{h} (\Gamma_\gamma + \Gamma_e) = \frac{1}{h} \Gamma_\gamma \left(1 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_\gamma} \right) = \frac{1}{h} \Gamma_\gamma (1 + \alpha). \quad (1)$$

Der „Konversionskoeffizient“ $\alpha = \Gamma_e / \Gamma_\gamma$ kann theoretisch berechnet werden und hängt sehr stark von der Energie und dem Multipolcharakter des γ -Überganges, sowie von Z ab. Von DANCOFF und MORRISON¹⁾ wurde der Konversionskoeffizient α_K der K -Schale für kleine γ -Energien, leichte Atome (bis etwa $Z = 30$) und belie-

bige Multipolordnung berechnet. Unter der gleichen Voraussetzung gelten die Formeln von HEBB und NELSON²⁾ für den Konversionskoeffizienten α_L der L -Schale.

Die Konversionskoeffizienten α_K und α_L bei schweren Atomen (insbesondere für $Z = 84$) wurden für elektrische und magnetische Dipol- und Quadrupolübergänge von HULME, TAYLOR, MOTT, FISK und OPPENHEIMER³⁻⁹⁾ für γ -Energien von 0,1 MeV bis 2,6 MeV exakt berechnet (Verwendung der relativistischen Wellenmechanik). Ausser aus älteren Untersuchungen bei natürlichen radioaktiven Substanzen sind wenig Messungen von Konversionskoeffizienten schwerer Atome bekannt; vor allem deswegen, weil die Bestimmung von α die genaue Kenntnis des bei schweren Kernen im allgemeinen komplizierten Zerfallsschemas erfordert. Aus der Kenntnis von α kann, durch Vergleich mit dem theoretischen Wert, auf den Multipolcharakter des γ -Übergangs geschlossen werden.

2. Innere Konversion von Röntgenstrahlung.

Auch bei Röntgenübergängen in der Elektronenhülle des Atoms kann anstatt der Emission eines Röntgenquants die verfügbare Energie direkt auf ein Elektron in den äusseren Schalen des Atoms übertragen werden (Auger-Effekt). Demzufolge wird auch die Lebensdauer eines Röntgenniveaus durch die Summe von Strahlungsbreite Γ_X und Augerbreite Γ_A gegeben

$$\lambda = \frac{1}{\hbar} (\Gamma_X + \Gamma_A) = \frac{1}{\hbar} \Gamma_X \left(1 + \frac{\Gamma_A}{\Gamma_X} \right) = \frac{1}{\hbar} \Gamma_X (1 + a). \quad (2)$$

$a = \Gamma_A/\Gamma_X$ wird als Koeffizient der inneren Konversion der Röntgenstrahlung bezeichnet. Öfters verwendet wird in der Röntgenliteratur die sog. Fluoreszenz-Ausbeute (fluorescence-yield).

$$W = \frac{\Gamma_X}{\Gamma_A + \Gamma_X} = \frac{1}{1 + a} \quad (3)$$

W hängt stark von der Ordnungsnummer des betreffenden Atoms ab. Theoretischen Überlegungen von WENTZEL¹⁰⁾ entsprechend kann nach HAAS¹¹⁾ bzw. PINCHERLE¹²⁾ die Fluoreszenz-Ausbeute der K -Niveaus durch den halbempirischen Ausdruck

$$W_K = \frac{Z^{3,5}}{Z^{3,5} + K} \quad (4)$$

gegeben werden. Die gemessenen Werte von W_K werden durch die

obige Formel recht gut wiedergegeben, wenn man die Konstante $K = 2,2 \cdot 10^5$ setzt (Fig. 1).

Genaue Berechnungen der „Augerbreite“ Γ_A und der „Strahlungsbreite“ Γ_X der einzelnen Röntgenniveaux von Au ($Z = 79$) sind von RAMBERG und RICHTMYER¹³⁾, sowie von MASSEY und BURHOP¹⁴⁾ durchgeführt worden. RAMBERG und RICHTMYER berechneten Γ_X und Γ_A nach der WEISSKOPF-WIGNER'schen Theorie¹⁵⁾ der Niveaubreiten mit Hilfe unrelativistischer Eigenfunktionen, während die Rechnungen von MASSEY und BURHOP auf Grund der relativistisch invarianten Methode von MÖLLER¹⁶⁾ zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten bei Beteiligung von zwei Elektronen durchgeführt wurden.

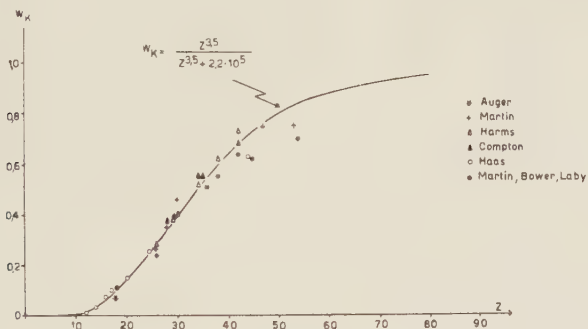


Fig. 1.

Abhängigkeit der Fluoreszenzausbeute des K -Niveaus von der Atomnummer Z . Messpunkte nach AUGER⁴⁸⁾, MARTIN⁴⁹⁾, HARMS⁵⁰⁾, COMPTON⁵¹⁾, HAAS¹¹⁾ und MARTIN, BOWER und LABY⁵²⁾.

Bei Ionisation der K -Schale mit Röntgenstrahlung kann a_K experimentell bestimmt werden. Solche Messungen wurden wegen der bei grösserem Z auftretenden experimentellen Schwierigkeiten nur bis $Z = 54$ (Xenon) durchgeführt. Der Wert von a_K kann aber gut bestimmt werden bei schweren Elementen, die durch den radioaktiven Zerfallsprozess des K -Einfangs zerfallen. Die durch den K -Einfangprozess in der K -Schale ionisierten Atome können durch Emission der charakteristischen Röntgenstrahlung oder durch Emission von Augerelektronen den Normalzustand erreichen. Wegen der relativ grossen Energie ist bei schweren Elementen sowohl die Messung der K -Strahlung (bei Au zirka 0,07 MeV Quantenenergie) als auch der Augerelektronen (bei Au zirka 0,05–0,06 MeV Energie) kein Problem.

3. Positronenemission und K -Einfang bei schweren Kernen.

Nach der Fermischen Theorie des β -Zerfalls ergibt sich für das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten von K -Einfang und β^+ -Emission bei erlaubten Übergängen für alle fünf Kopplungsansätze (MOLLER¹⁷):

$$A(Z, W_0) = \frac{F_K}{F_{\beta^+}} = \frac{\pi \cdot \Gamma(3+2S) (Z\alpha)^{3+2S} (W_0 + W_K)^2}{\int_0^{p^0} e^{-\pi \frac{Z\alpha W}{p}} \left| \Gamma\left(1+S+i \frac{Z\alpha W}{p}\right) \right|^2 p^{2+2S} (W_0 - W)^2 dp} \quad (5)$$

Die Funktion $A(Z; W_0)$ wurde für die Energiedifferenzen zwischen Anfangs- und Endniveau $W_0 = 2,0$ und $W_0 = 4,0$ berechnet (Fig. 2). Der Verlauf von $A(Z)$ zeigt, dass bei grossen Z der Zerfall

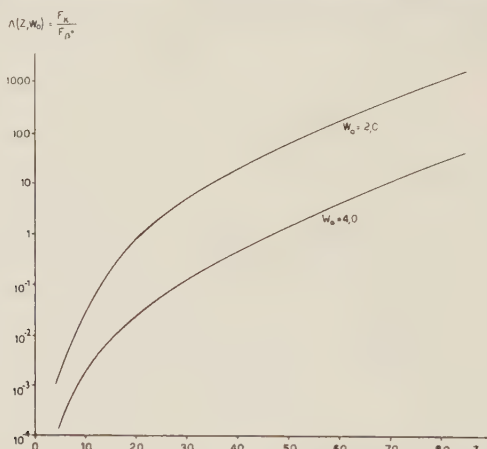


Fig. 2.

Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten von K -Einfang und Positronenemission nach der Fermischen Theorie des β -Zerfalls für erlaubte Übergänge.

durch K -Einfang sehr stark überwiegt. Dies erklärt die Tatsache, dass kein Kern mit $Z > 60$ experimentell sichergestellt ist, der durch Positronenemission zerfällt, während bei leichten und mittelschweren Kernen die Wahrscheinlichkeit der beiden Zerfallsprozesse K -Einfang und β^+ -Emission vergleichbar ist. Zur Untersuchung der inneren Konversion sowohl der γ -Strahlung, als auch der Röntgenstrahlung bei schweren Elementen, schienen uns die radioaktiven Au-Isotope, die durch K -Einfang zerfallen, besonders geeignet, weil solche bei Bestrahlung von Platin mit den Protonen des Cyclotrons durch die (p, n) -Reaktion einfach hergestellt werden können, und die relativistischen Berechnungen von MASSEY und BURNOP ohne weiteres auf die Röntgenniveaus der durch den K -Einfang der Au-Isotope entstehenden Pt-Atome anwendbar sind.

II. Untersuchungsmethoden zur Bestimmung der Zerfalls-Schematas und der Konversionswahrscheinlichkeiten bei den radioaktiven Au-Isotopen.

1. Herstellung der Präparate.

Die meisten radioaktiven Au-Strahlungsquellen wurden durch Bestrahlung von sehr reinem Pt mit Protonen von 7 MeV Energie im Cyclotron der ETH. hergestellt. Die chemische Abtrennung der durch die (p, n) -Kern-Reaktion entstehenden Au-Isotope von der bestrahlten Pt-Target wurde von Dr. E. Jacobi ausgeführt, dem wir dafür unsern besten Dank aussprechen möchten. Das radioaktive Au wurde mit wenig Trägersubstanz als metallisches Au gefällt und auf ein dünnes Filterpapier gebracht. Die Flächen-dichte der verwendeten Präparate betrug 0,6–1,5 mg cm².

Für gewisse Untersuchungen wurden Au¹⁹⁸-Präparate durch die (n, γ) -Einfangreaktion hergestellt. Reinstes Au-Blech wurde mit langsamen Neutronen, die bei der Cu⁶³ (p, n) Zn⁶³-Reaktion in grosser Intensität im Cyclotron entstehen, bestrahlt. Da Gold nur das einzige stabile Isotop Au¹⁹⁷ besitzt, entsteht bei der (n, γ) -Reaktion das Au¹⁹⁸ rein.

2. Halbwertszeit-Messungen der Elektronen- und γ -Strahlung.

Da das Pt ($Z = 78$) fünf stabile Isotope der Massenzahlen 192 (0,8% Häufigkeit), 194 (30,24%), 195 (35,3%), 196 (26,6%) und 198 (7,2%) besitzt, ist zu erwarten, dass durch die (p, n) -Reaktion die den obigen Massenzahlen entsprechenden Au-Isotope entstehen. Die Zerlegung der zeitlichen Abfallskurve sowohl der Elektronen- als auch der weichen γ -Strahlung der radioaktiven Au-Präparate zeigte das Auftreten von vier Aktivitäten, die mit den folgenden Halbwertszeiten zerfallen: 39 h, 65 h, 5,6 d und 180 d. Nach Messungen von WILKINSON¹⁸⁾ müssen diese Aktivitäten den folgenden Massenzahlen zugeschrieben werden:

$$T_{1/2} = 39 \text{ h} : \text{Au}^{194}$$

$$T_{1/2} = 65 \text{ h} : \text{Au}^{198}$$

$$T_{1/2} = 5,6 \text{ d} : \text{Au}^{196}$$

$$T_{1/2} = 180 \text{ d} : \text{Au}^{195}$$

Wegen der geringen Häufigkeit des Pt¹⁹² und der vermutlich kurzen Halbwertszeit eines eventuell existierenden Au¹⁹²-Isotops ist das Fehlen einer fünften Halbwertszeit bei unseren Messungen zu erwarten.

3. Messung der Elektronenstrahlung der einzelnen Au-Isotope.

Das Elektronenspektrum der radioaktiven Au-Isotope wurde sowohl mit einem Halbkreispektrometer hohen Auflösungsvermögens als auch mit einem Linsenspektrometer grosser Lichtstärke¹⁹⁾ ausgemessen (Fig. 3 und 4). Bei der Messung im Halbkreispektrometer (Fig. 3) wurde eine Quelle von $1,0 \text{ mg/cm}^2$ Flächendichte verwendet. Die Abschlussfolie des Fensterzählrohrs war extrem dünn (zirka $0,02 \text{ mg/cm}^2$), so dass keine Korrekturen in bezug auf Absorption der weichen Elektronenstrahlung nötig war.

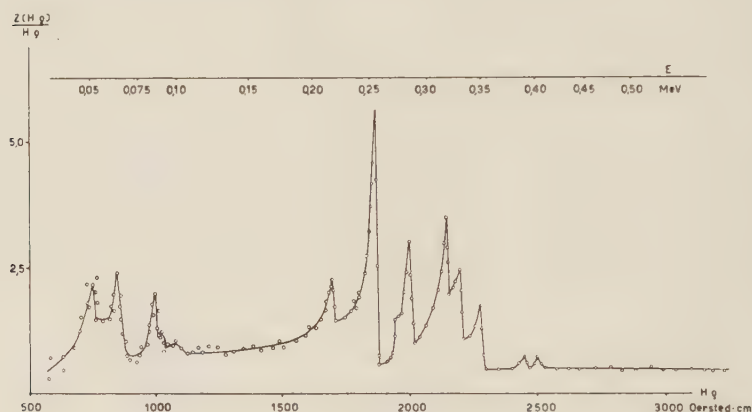


Fig. 3.

Elektronenspektrum der bei der Reaktion $\text{Pt}(p, n)\text{Au}$ entstehenden, radioaktiven Au-Isotope. Gemessen mit einem Halbkreis-Spektrometer hohen Auflösungsvermögens.

Wegen der Kompliziertheit des Elektronenspektrums (Fig. 3 und 4) erfordert die Zuordnung der einzelnen Konversionslinien und β^- -Spektren zu den verschiedenen Perioden besondere Sorgfalt. Aus diesem Grunde wurde das Elektronenspektrum in verschiedenen Zeitabständen 18mal mit dem lichtstarken Linsenspektrometer vollständig ausgemessen, so dass für jeden Hg-Wert eine zeitliche Abfallskurve konstruiert werden konnte. Auf Grund der Zerlegung dieser Abfallskurven konnte das Elektronenspektrum in seine mit verschiedener Halbwertszeit zerfallenden Komponenten zerlegt werden: Fig. 5, 6, 7, 8. Diese Messungen wurden in bezug auf Absorption im Präparat ($0,6 \text{ mg/cm}^2$) und in der Zählrohr-Verschlussfolie ($0,8 \text{ mg/cm}^2$ Glimmer) nach Möglichkeit korrigiert.

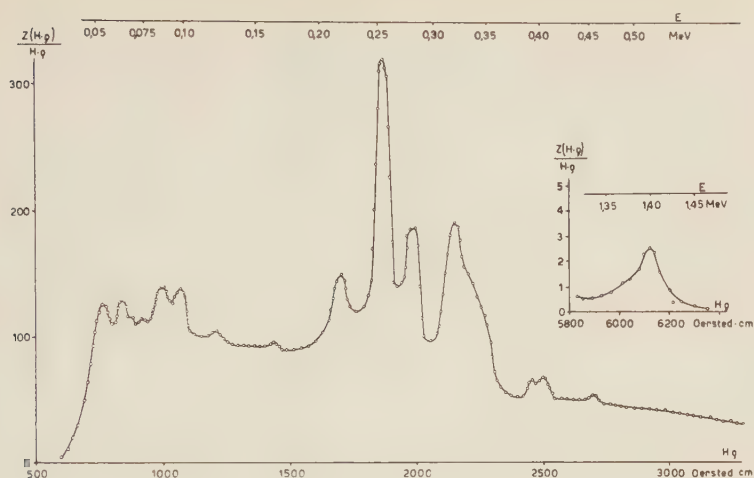


Fig. 4.

Elektronenspektrum der bei der Reaktion $\text{Pt}(p, n)\text{Au}$ entstehenden radioaktiven Au-Isotope. Gemessen mit einem Linsenspektrometer grosser Lichtstärke.

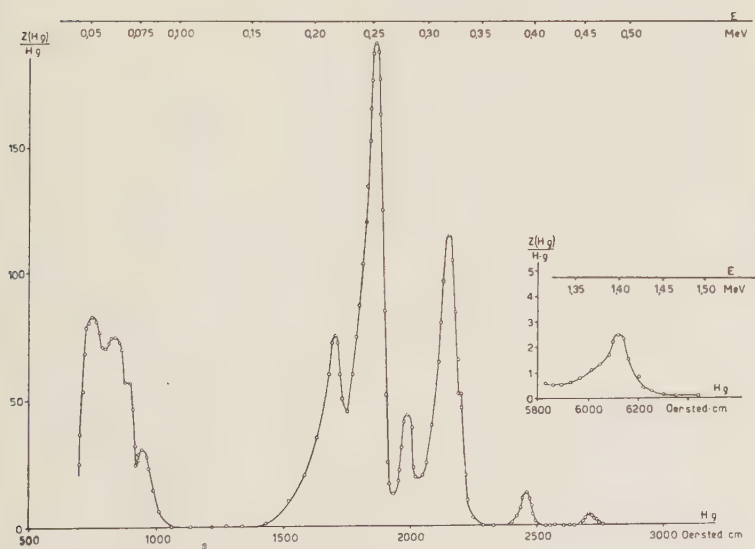


Fig. 5

Elektronenspektrum des 39 h-Au¹⁹⁴.

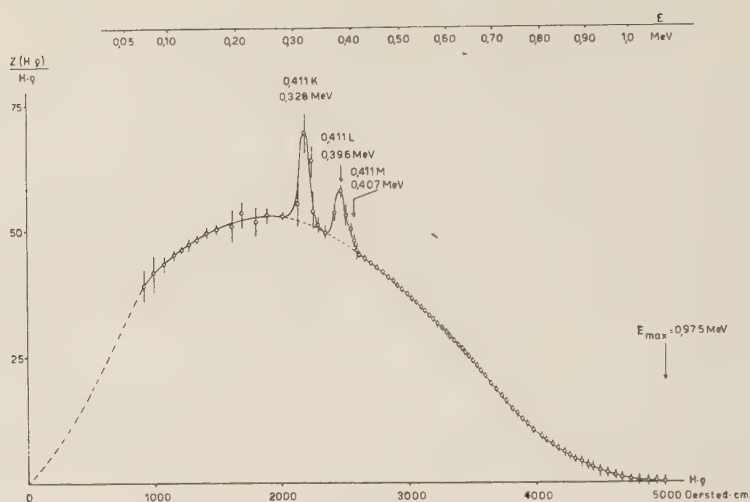


Fig. 6.

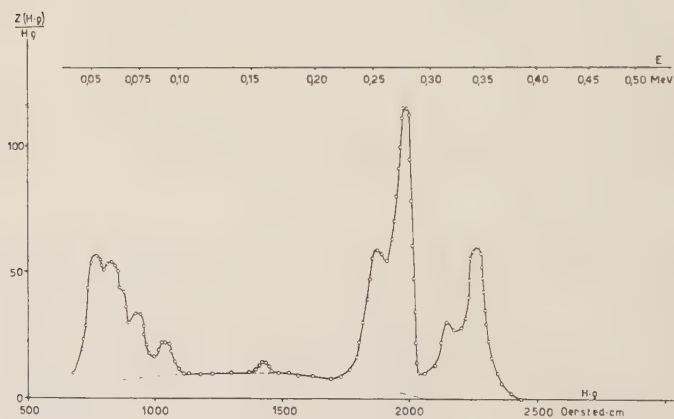
Elektronenspektrum des 65 h-Au 198 .

Fig. 7.

Elektronenspektrum des 5,6 d-Au 196 .

Die Ergebnisse dieser Spektrographenmessungen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Tabelle 1.
Elektronenstrahlung der einzelnen Au-Isotope.

HWZ	Elektronen- strahlung	Energie- in MeV	Interpretation der Elektronen- strahlung		rel. Inten- sität
			Bezeichnung	Übergang	
39 h	Elektronenlinie	0,051	Augerelektronen	$LL \rightarrow K \infty$	80
39 h	Elektronenlinie	0,061	Augerelektronen	$LM \rightarrow K \infty$	55
39 h	Elektronenlinie	0,063	Augerelektronen	$LN \rightarrow K \infty$	20
39 h	Elektronenlinie	0,071	Augerelektronen	$MM \rightarrow K \infty$	20
39 h	Elektronenlinie	0,213	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,291$ MeV		63
39 h	Elektronenlinie	0,277	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,291$ MeV		33
39 h	Elektronenlinie	0,254	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,328$ MeV		195
39 h	Elektronenlinie	0,314	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,328$ MeV		110
39 h	Elektronenlinie	0,325	M -Konv.-Linie von $h\nu=0,328$ MeV		15
39 h	Elektronenlinie	0,388	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,466$ MeV		8
39 h	Elektronenlinie	0,441	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,466$ MeV		3
39 h	Elektronenlinie	1,40	K -Konv.-Linie von $h\nu=1,48$ MeV		5
39 h	Kein kont. β^- -Spektrum				
65 h	β^- -Spektrum $E_{\max}=0,975$				655
65 h	Elektronenlinie	0,328	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,411$ MeV		18,5
65 h	Elektronenlinie	0,396	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,411$ MeV		8
65 h	Elektronenlinie	0,407	M -Konv.-Linie von $h\nu=0,411$ MeV		2
5,6 d	Elektronenlinie	0,051	Augerelektronen	$LL \rightarrow K \infty$	29
5,6 d	Elektronenlinie	0,061	Augerelektronen	$LM \rightarrow K \infty$	18
5,6 d	Elektronenlinie	0,063	Augerelektronen	$LN \rightarrow K \infty$	6
5,6 d	Elektronenlinie	0,071	Augerelektronen	$MM \rightarrow K \infty$	7
5,6 d	Elektronenlinie	0,092	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,175$ MeV		5,5
5,6 d	Elektronenlinie	0,160	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,175$ MeV		1,6
5,6 d	Elektronenlinie	0,252	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,330$ MeV		20
5,6 d	Elektronenlinie	0,316	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,330$ MeV		11,5
5,6 d	Elektronenlinie	0,280	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,358$ MeV		52
5,6 d	Elektronenlinie	0,344	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,358$ MeV		30
5,6 d	β^- -Spektrum $E_{\max} \cong 0,30$				55
180 d	Elektronenlinie	0,051	K -Konv.-Linie von $h\nu=0,129$ MeV		14
180 d	Elektronenlinie	0,115	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,129$ MeV		2,5
180 d	Elektronenlinie	0,127	M -Konv.-Linie von $h\nu=0,129$ MeV		0,5
180 d	Elektronenlinie	0,082	L -Konv.-Linie von $h\nu=0,096$ MeV		35
180 d	Elektronenlinie	0,093	M -Konv.-Linie von $h\nu=0,096$ MeV		5,4
180 d	Kein kont. β^- -Spektrum				

Die Interpretation der Elektronenstrahlung als K - und L -Konversionslinien ergibt sich auf Grund der Energiedifferenz der K - und L -Schale der Pt-Atome (64,2 KeV) bzw. der Hg-Atome (68,1 KeV). Die Energiewerte der Elektronenliniengruppe unter 0,072 MeV stimmen genau mit den Energiewerten der Augerelektronen, die beim Auffüllen der K -Schale des Pt emittiert werden, überein. Da ausserdem genau dieselben Elektronenlinien bei zwei verschiedenen Perioden ($T_{1/2} = 39$ h und $T_{1/2} = 5,6$ d) auftreten, dürfte ihre Inter-

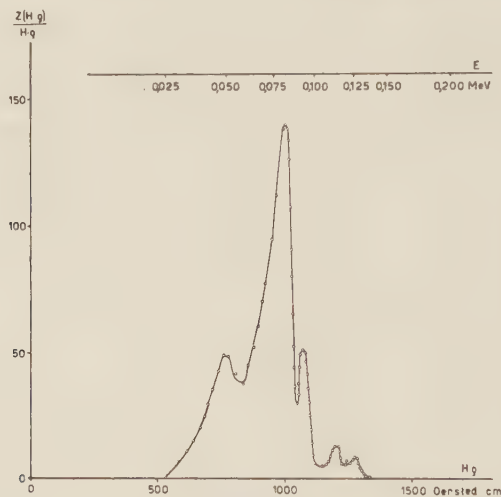


Fig. 8.
Elektronenspektrum des 180 d-Au¹⁹⁵.

pretation als Augerelektronen gerechtfertigt sein. Bei den einzelnen Augerlinien ist der Übergang der beiden beim Auger-Effekt beteiligten Elektronen in die K -Schale bzw. ins Kontinuum (∞) angegeben.

4. Die L -Röntgenstrahlung der einzelnen Au-Isotope.

Beim Übergang der Elektronen höherer Niveaus in die K -Niveaus der durch K -Einfang ionisierten Pt-Atome entstehen ebenfalls Elektronenlücken in den L -, M - und N -Schalen. Ausser der Pt- K -Röntgenstrahlung kann also durch geeignete Messmethoden noch die beim Auffüllen der L -Schale emittierte Pt- L -Strahlung gemessen werden. Die M -Röntgenstrahlung wird wegen ihrer kleinen Energie schon in der Quelle fast vollständig absorbiert.

Aus den relativen Intensitäten der $K\alpha_1$ - und $K\alpha_2$ - bzw. der $K\beta_1$ - $K\beta_2$ - und $K\beta_3$ -Röntgenstrahlung können die relativen Strahlungsbreiten der Röntgenniveaus berechnet werden, und daraus lässt

sich die Anzahl der pro K -Einfangprozess angeregten L -Niveaus bestimmen. Mit den bekannten Intensitäten der $Pt-K_{\alpha}$ -Strahlung und $Pt-K_{\beta}$ -Strahlung²⁴⁾ ²⁵⁾ berechnet man, dass 0,75 L -Niveaus pro K -Einfangprozess angeregt werden. Es werden also 0,75 W_L L -Röntgenquanten pro Einfang eines K -Elektrons emittiert (W_L = Fluoreszenzausbeute des $Pt-L$ -Niveaus).

Die mittlere Energie der $Pt-L$ -Röntgenstrahlung beträgt (unter Berücksichtigung der Intensität der verschiedenen Übergänge ins L -Niveau²⁶⁾):

$$\underline{h \bar{\nu}_L = 10,1 \text{ keV} .} \quad (6)$$

Zur Messung der $Pt-L$ -Strahlung wurden normale Fensterzählrohre mit Argonfüllung verwendet und durch C -Absorber der Eintritt der Elektronenstrahlung in die Zählrohre verhindert. Aus der Absorption der L -Strahlung im Füllgas des Zählrohrs berechnet man eine Sensibilität der Zählrohre für die $Pt-L$ -Strahlung von $\varepsilon_L \approx 0,03$. Bei der Untersuchung der durch den K -Einfang des 65 h-IIg^{197} -Isomers angeregten Au -Röntgenstrahlung wurde $\varepsilon_L \cdot W_L^{Au}$ experimentell für die hier verwendeten Zählrohre bestimmt²³⁾:

$$\varepsilon_L \cdot W_L^{Au} \simeq 0,01 . \quad (7)$$

5. Messung der γ -Strahlung der einzelnen Au -Isotope.

Zur Bestimmung der relativen Intensitäten der einzelnen γ -Komponenten ist die Messung der Absorptionskurve der komplexen γ -Strahlung mit einer in bezug auf Absorption geeichten Standardanordnung sehr geeignet²⁰⁾. Besonders wenn die Energien der einzelnen γ -Komponenten und damit aus der Eichkurve der Standardanordnung auch die Absorption in Pb bekannt ist, ergibt die Zerlegung der gemessenen Absorptionskurve zuverlässige Resultate.

Die Standardanordnung zum Messen von γ -Absorptionskurven wurde schon früher beschrieben²⁰⁾; sie ist auch in Fig. 13 angegeben. Als Detektor für härtere γ -Strahlung ($h \nu > 0,25 \text{ MeV}$) wurden Zählrohre mit Bi -Kathode verwendet, deren Sensibilität gut bekannt ist²¹⁾. Zur Messung weicherer γ -Strahlung (bis etwa $0,4 \text{ MeV}$) und besonders der $Pt-K$ -Strahlung (zirka 65 keV) wurden dünnwandige Messingzählrohre mit einer $0,035 \text{ g.cm}^2$ dicken Au -Kathode verwendet. Die absolute Sensibilität dieser Au -Zählrohre für $0,067 \text{ MeV}$ ($Au-K$ -Strahlung) wurde bei der Untersuchung der durch K -Einfang zerfallenden IIg^{197} -Isomere zu $\varepsilon_{0,067 \text{ MeV}} = (9,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$ bestimmt (HUBER, STEFFEN und HUMBEL²²⁾ ²³⁾) und für andere γ -Energien aus Vergleichsmessungen mit dem Bi -Zählrohr bekannter Sensibilität erhalten.

Die Absorption der γ -Strahlung der einzelnen Au-Isotope in Pb wurde auf die folgende Weise bestimmt: Aus 22 zu verschiedenen Zeiten vollständig gemessenen Pb-Absorptionskurven wurde die zeitliche Abnahme der γ -Intensität als Funktion der Dicke der Pb-Absorber zwischen Quelle und Zählrohr bestimmt, und durch die zeitliche Zerlegung der so für verschiedene Absorberdicken erhaltenen Kurven der Anteil der γ -Intensität der einzelnen Au-Perioden in Funktion der Pb-Absorberdicke ermittelt. Daraus kann die Absorption der γ -Strahlung jeder einzelnen Au-Periode in Pb erhalten werden (Fig. 13 und 20). Da die Halbwertszeiten der einzelnen Au-Isotope ziemlich verschieden sind und ausserdem nur die kurze Periode (39 h-Au¹⁹⁴) harte γ -Strahlung ($h\nu > 0,42$ MeV) emittiert, sind die Fehlergrenzen der auf die oben angegebene Art erhaltenen Absorptionskurven relativ klein.

6. Koinzidenzmessungen.

Zur Bestimmung von komplizierten Zerfallsschematas sind Koinzidenzmessungen äusserst wichtig; auf ihre sorgfältige Ausführung und Berücksichtigung der verschiedenen Korrekturen muss daher besondere Sorgfalt verwendet werden.

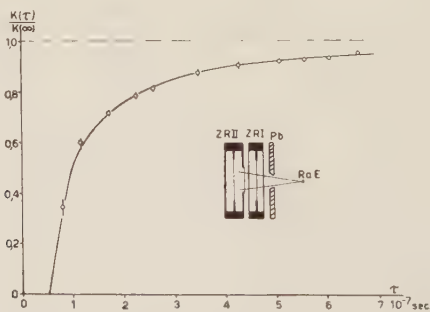


Fig. 9.

Verluste bei Koinzidenzmessungen infolge der Verzögerungszeit in den Zählrohren.

Um die Zahl der zufälligen Koinzidenzen zu verringern ist eine möglichst kleine Auflösungszeit τ des Koinzidenzverstärkers wünschenswert. Andererseits wird aber wegen den statistischen Schwankungen der Verzögerungszeit (time-lag = Zeit zwischen dem Eintritt des ionisierenden Teilchens ins Zählrohr und dem Beginn des Anstiegs des Potentials des Zählrohr-Drahtes) bei kleiner Auflösungszeit τ ein Teil der Koinzidenzen nicht als solche gezählt (DUNWORTH²⁷), BRADT und SCHERRER²⁸). DEN HARTOG²⁹), ROTBLAT³⁰)).

Zur Bestimmung der Koinzidenzverluste wurden zwei dünnwandige, in Koinzidenz geschaltete Zählrohre mit einem Bündel Elek-

tronen (RaD) durchstrahlt (Öffnungswinkel $2\varphi = 15^\circ$, siehe Fig. 9) und die echten Koinzidenzen $K(\tau)$ in Funktion der Auflösungszeit τ der Koinzidenzmischung gemessen. Wurden beide Eingänge des Koinzidenz-Verstärkers mit dem Zählrohr II verbunden, so war die Anzahl $K(\infty)$ der gemessenen Koinzidenzen von τ unabhängig. Aus dem Verlauf von $K(\tau)/K(\infty)$ (Fig. 9) kann für jedes Auflösungsvermögen τ die wahre Anzahl der Koinzidenzen aus den gemessenen berechnet werden.*)

Zur Vermeidung von die Messungen verfälschenden gestreuten Koinzidenzen wurden alle Koinzidenzmessungen mit speziellen in bezug auf Raumwinkel und Sensibilität geeichten Zählrohr-Standardanordnungen durchgeführt. Die Anordnung zur Messung von β - γ - und γ - γ -Koinzidenzen, sowie die β - β -Koinzidenzanordnung

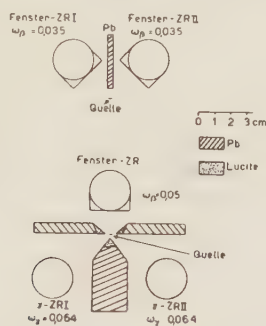


Fig. 10.

Zählrohranordnungen zur Messung von β - β -Koinzidenzen (obere Figur) und zur Messung von γ - γ - und β - γ -Koinzidenzen (untere Figur).

ist aus Fig. 10 ersichtlich. Zum Nachweis der β -Strahlung wurden mit einem RaE-Standardpräparat geeichte Fensterzählrohre ($1,1$ – $1,5$ mg/cm² Glimmerfenster) verwendet.

Der zeitliche Abfall aller Koinzidenzen wurde bei jeder Messreihe (es wurden vier Messreihen durchgeführt!) während 5–6 Monaten ununterbrochen verfolgt und durch zeitliche Zerlegung in die den vier Perioden entsprechenden Anteile die Zahl der Koinzidenzen für die einzelnen Au-Isotope gefunden.

Wurden bei den Absorptionsmessungen der Koinzidenzen nicht die oben angegebenen Standardanordnungen verwendet, so sind die Anordnungen bei den entsprechenden Kurven eingezeichnet.

*) Die Diskrepanz zwischen unserer und der von BRADT und SCHERRER gemessenen Kurve erklärt sich durch das wesentlich schmalere Elektronenbündel, das diese Autoren zur Durchstrahlung der Zählrohre verwendeten.

7. Methode zur Bestimmung der Zerfallsschematas. Auswertung der Messungen.

Die Methoden zur Bestimmung des Zerfallsschemas eines radioaktiven Kerns sind naturgemäss je nach Art des Zerfalls verschieden; das prinzipielle Auswertungsverfahren war hingegen bei der Untersuchung der Zerfallsprozesse der vier radioaktiven Au-Isotope das gleiche:

Aus den relativen Intensitäten der Pt - K -Strahlung, der γ -Strahlung und der Elektronenstrahlung und aus der Absorption der Elektronen- und γ -Strahlung bei den Koinzidenzabsorptionsmessungen konnte jeweils ein bestimmtes Zerfallsschema angenommen werden. Auf Grund dieses angenommenen Schemas wurden die charakteristischen Zerfallsgrössen des entsprechenden Au-Isotops berechnet: Die Anzahl N^I , N^{II} , N^{III} usw. der Zerfallsprozesse auf die verschiedenen Kernniveaus und die Konversionskoeffizienten. Mit der Kenntnis dieser Grössen konnten die Koinzidenzen, Einzelstösse und Absorptionskurven der verschiedenen beim Zerfall emittierten Strahlungen berechnet und mit dem Experiment verglichen werden. Bei Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte konnte dann das Zerfallsschema abgesehen von sehr intensitätsschwachen Übergängen als gesichert gelten, während eine einzige wesentliche Diskrepanz zwischen berechneten und experimentellen Grössen die Richtigkeit des Zerfallsschemas in Frage stehen liess. Es zeigte sich, dass besonders die berechneten Daten der Koinzidenzmessungen äusserst empfindlich sind, in bezug auf eine, wenn auch sehr geringfügige Änderung des Zerfallsschemas.

Die Interpretation der experimentellen Resultate durch die Angabe eines Termschemas lässt sich auf diese Art in relativ sehr eindeutiger Weise durchführen.

Die bei der Auswertung der Messresultate verwendeten Bezeichnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$$N = \sum_X N^X$$

N^X

Anzahl der insgesamt pro Zeiteinheit (min.) zerfallenden Kerne

Anzahl der Zerfallsprozesse der Art X pro Zeiteinheit. (Verschiedene Möglichkeiten des Zerfalls (z. B. β^+ und K -Einfang, oder Zerfall auf verschiedene Anregungsniveaus des Folgekerns) werden durch römische Ziffern als obere Indices unterschieden: $X = I, II, \dots$ Erfolgt der Zerfall in mehreren Stufen (z. B. β^- -Zerfall mit mehreren γ -Übergängen in Kaskade) so werden die einzelnen Stufen des Zerfalls in ihrer Reihenfolge durch kleine Buchstaben $x = a, b, c, \dots$ nach der

römischen Ziffer unterschieden. Zum Beispiel $Xx = \text{IIc}$ bedeutet dritter Übergang beim Zerfall der Art II.)

Anzahl (Intensität) der pro Zeiteinheit beim Übergang Xx emittierten Teilchen der Sorte ν . ($\nu = \alpha, \beta, \gamma; K, L, M, \dots; e_K^-, e_L^-, e_M^-, \dots$ entsprechend α -, β -, γ -Strahlung; K -, L -, M -Röntgenstrahlung; Konversionselektronen aus K -, L -, M -Schale. Zum Beispiel $I_{e_L^-}^{\text{IIc}}$ bedeutet: Intensität der beim dritten Übergang des Zerfalls II emittierten L -Konversionselektronen)

Von einem Zählrohr erfasster Raumwinkel für Partikel ν

Ansprechwahrscheinlichkeit eines Zählrohrs für Partikel ν (bezogen auf Zählrohr-Wanddicke = 0)

Effektive Ansprechwahrscheinlichkeit eines Zählrohrs für Partikel ν (Absorption der Strahlung in der Zählrohrwand berücksichtigt)

Faktor der Absorption der Partikel auf dem Wege von der Quelle ins Zählrohr = Bruchteil der nicht absorbierten Strahlung: $A_\nu \leq 1$ (für γ - und Röntgenstrahlung $A_\nu = e^{-\mu_\nu d}$)

Mit einem Zählrohr pro Zeiteinheit insgesamt registrierte Partikel ν

Mit einem Zählrohr pro Zeiteinheit registrierte Partikel ν des Übergangs Xx

Mit einer Zählrohranordnung insgesamt registrierte Koinzidenzen zwischen Partikeln der Sorte ν und μ

Mit einer Zählrohranordnung registrierte Koinzidenzen zwischen Partikeln der Sorte ν und μ bei der Zerfallsmöglichkeit X

Konversionskoeffizient des γ -Übergangs Xx für die K -Schale (entsprechende Bezeichnung für L -, M -...-Schale)

Konversionsverhältnis des γ -Übergangs Xx für die K -Schale ($\bar{\alpha} < 1$)

Fluoreszenzausbeute des K -Niveaus (in bezug auf alle möglichen Übergänge)

Konversionskoeffizient der K -Röntgenstrahlung (in bezug auf alle möglichen Übergänge)

Konversionsverhältnis der K -Röntgenstrahlung (in bezug auf alle möglichen Strahlungs- und Auger-Übergänge)

 I_ν^{Xx}
 ω_ν
 ε_ν
 $\bar{\varepsilon}_\nu$
 A_ν
 $Z_\nu = \sum_{Xx} Z_\nu^{Xx}$
 $Z_\nu^{Xx} = I_\nu^{Xx} \cdot A_\nu \bar{\varepsilon}_\nu \omega_\nu$
 $K(\nu; \mu) = \sum_X K^X(\nu; \mu)$
 $K^X(\nu; \mu)$
 $\alpha_K^{Xx} = \frac{\Gamma_{e_K^-}^{Xx}}{\Gamma_\gamma^{Xx}} = \frac{\bar{\alpha}_N^{Xx}}{1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{Xx}}$
 $\alpha_K^{Xx} = \frac{\Gamma_{e_K^-}^{Xx}}{\Gamma_\gamma^{Xx} + \Gamma_{e_{\text{Tot}}^-}^{Xx}} = \frac{\bar{\alpha}_K^{Xx}}{1 + \alpha_{\text{Tot}}^{Xx}}$
 $W_K = \frac{\Gamma_X^K}{\Gamma_X^K + \Gamma_A^K} = \frac{1}{1 + a_K} = 1 - \bar{a}_K$
 $a_K = \frac{\Gamma_A^K}{\Gamma_X^K} = \frac{\bar{a}_K}{1 - \bar{a}_K}$
 $\bar{a}_K = \frac{\Gamma_A^K}{\Gamma_X^K + \Gamma_A^K} = \frac{a_K}{1 + a_K}$

III. Untersuchung der Umwandlungsprozesse der radioaktiven Au-Isotope und Bestimmung der Konversionskoeffizienten.

1. Untersuchung des 39 h-Au¹⁹⁴.

a) Bestimmung der Halbwertszeit und bisherige Untersuchungen an Au¹⁹⁴.

Die Untersuchung des zeitlichen Abfalls der Elektronen- und γ -Strahlung der durch die Reaktion Pt (p, n) Au entstehenden radioaktiven Au-Isotope erwies das Auftreten eines Au-Isotops, welches sich mit einer Halbwertszeit von zirka 40 h umwandelte, wobei relativ wenig Elektronen, hingegen sehr viele energiereiche γ -Quanten emittiert werden. Die durch 1,5 cm Pb gefilterte γ -Strahlung zeigte einer ein exponentielle zeitliche Abnahme einer Halbwertszeit von

$$T_{1/2} = (39 \pm 2) \text{ h}$$

entsprechend.

In den einzigen Untersuchungen dieser Periode (im Verlaufe unserer Messungen von WILKINSON¹⁸) veröffentlicht, wird die 39 h-Periode dem Au¹⁹⁴ zugeordnet. Das Auftreten dieser Periode bei der Pt (p, n) Au-Reaktion bestätigt diese Zuordnung.

b) Die Elektronen- und γ -Strahlung des 39 h-Au¹⁹⁴.

Das Elektronenspektrum des Au¹⁹⁴ zeigt (vergl. Fig. 5), dass beim Zerfall des Au¹⁹⁴ nur Auger- und Konversionselektronen emittiert werden. Die Energiewerte der Elektronenlinien ergeben das Auftreten von 4 konvertierten γ -Übergängen der Quantenenergie

$$h \nu_1 = (0,291 \pm 0,002) \text{ MeV}$$

$$h \nu_2 = (0,328 \pm 0,002) \text{ MeV}$$

$$h \nu_3 = (0,466 \pm 0,005) \text{ MeV}$$

$$h \nu_4 = (1,48 \pm 0,006) \text{ MeV}$$

(vergl. Tabelle 1). Das Fehlen eines β -Kontinuums und die Emission von Augerelektronen lassen darauf schliessen, dass sich das Au¹⁹⁴ durch K-Einfang in Pt¹⁹⁴ umwandelt. Da nach Fig. 1 die K-Fluoreszenzausbeute des Pt $w_K = 0,94$ beträgt und das Intensitätsverhältnis der Augerelektronen zu den K-Konversionselektronen 175/271 beträgt (vergl. Tabelle 1), können die Augerelektronen nicht bei der Auffüllung der durch Konversion entstandenen Lücken in der K-Schale emittiert worden sein. Dass das Au¹⁹⁴ durch K-Einfang zerfällt, geht auch aus der Messung der Absorption der γ -

Strahlung in Sn mit einem Au-Zählrohr als Detektor hervor: zirka 25% aller beim Zerfall des Au^{194} emittierten Quanten besitzen eine Energie von $(0,070 \pm 0,005)$ MeV, was innerhalb der Fehlergrenzen der Pt-K-Strahlung (zirka 0,065 MeV) entspricht.

Wilsonkammelmessungen und der Vergleich der Koinzidenzraten, die zum Nachweis der Vernichtungsstrahlung mit zwei γ -Zählrohren unter einem Winkel bezüglich des Präparates von 90° und 180° gemessen wurden, ergaben, dass keine Positronen (weniger als 2% der Zerfallsprozesse) emittiert werden.

Um festzustellen, ob beim Zerfall des Au^{194} neben der harten in der K-Schale konvertierten 1,48 MeV- γ -Strahlung noch weitere

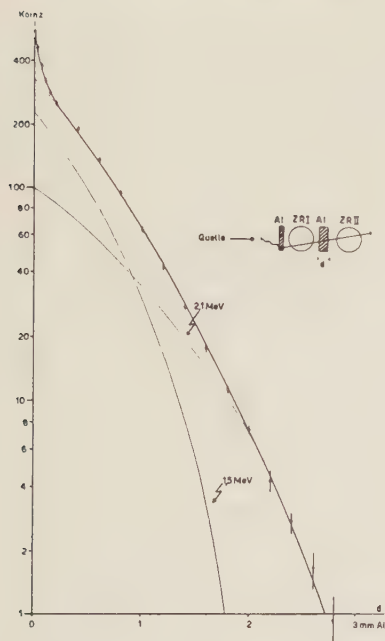


Fig. 11.

Absorption der Sekundär-Elektronen der harten γ -Strahlung des Au^{194} .

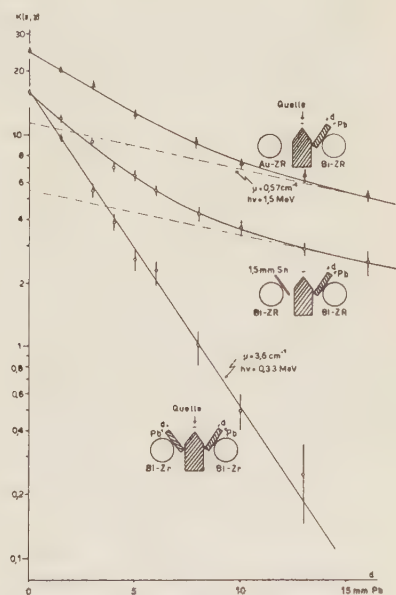


Fig. 12.

Absorption der γ - γ -Koinzidenzen des Au^{194} (Pb-Absorber).

energiereiche γ -Strahlung emittiert wird, wurde die Reichweite der von der Au^{194} - γ -Strahlung in einer Aluminiumplatte ausgelösten Comptonelektronen bestimmt. Die Messung wurde nach der von BOTHE angegebenen Methode mit Hilfe zweier in Koinzidenz geschalteter Elektronen zählrohre, zwischen welche die Al-Absorber gebracht wurden, durchgeführt (Fig. 11). Die Zerlegung der gemessenen Absorptionskurve der Comptonelektronen nach der Methode

VON BLEULER und ZÜNTI³¹⁾ auf Grund der mit γ -Strahlern bekannter Energie bestimmten Eichkurve der Anordnung zeigte neben der 1,48 MeV- γ -Strahlung noch das Auftreten einer weiteren harten γ -Strahlung mit der Quantenenergie

$$h \nu_1 = (2,1 \pm 0,1) \text{ MeV}.$$

Das Intensitätsverhältnis der beiden harten γ -Komponenten wurde zu:

$$\frac{I_{1,48 \text{ MeV}}}{I_{2,1 \text{ MeV}}} = 2,3 \pm 0,2 \quad (8)$$

bestimmt.

Zur Messung des relativen Anteils der weichen γ -Komponenten ist die Methode der Absorption der Sekundärelektronen nicht geeignet. Zur Bestimmung der relativen Intensitäten der γ -Strahlungen mit der Quantenenergie 0,291 MeV, 0,328 MeV, 1,48 MeV und 2,1 MeV

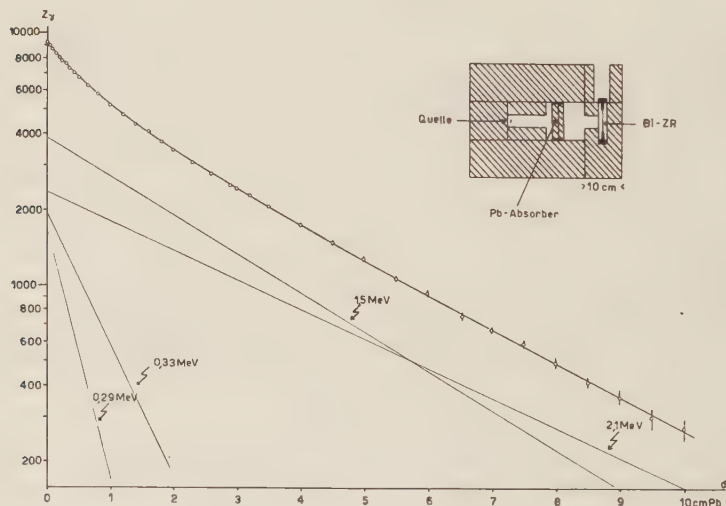


Fig. 13.

Absorption der γ -Strahlung des Au^{194} (Pb-Absorber).

wurden Absorptionsmessungen mit Pb in der Standardanordnung durchgeführt (vergl. Abschnitt II 5). Da die Energie und somit auch die Absorption der 4 Komponenten der γ -Strahlung bekannt ist (wegen der geringen Intensität wird der Anteil der 0,466 MeV- γ -Strahlung vernachlässigt!), kann die Pb-Absorptionskurve in relativ eindeutiger Weise in die 4 Anteile zerlegt werden (Fig. 13). Unter Berücksichtigung der von der Quantenenergie abhängigen Zählrohr-

Sensibilität²¹⁾ erhält man für das Intensitätsverhältnis der 4 γ -Komponenten:

$$I_{2,1 \text{ MeV}} : I_{1,48 \text{ MeV}} : I_{0,328 \text{ MeV}} : I_{0,291} = 1 : 2,8 : 2,0 : 2,5. \quad (9)$$

Die Genauigkeit der Zerlegung dürfte etwa 20% betragen. Die Intensitäten der 3 γ -Linien mit 0,291 MeV, 0,328 MeV und 1,48 MeV Quantenenergie sind innerhalb der Fehlergrenzen gleich; demnach besteht die Möglichkeit, dass diese 3 γ -Komponenten in Kaskade emittiert werden.

c) Koinzidenzabsorptionsmessungen und Termschema der Au^{194} - Pt^{194} -Umwandlung.

Der Verlauf der Absorption der γ - γ -Koinzidenzen mit Pb, wobei zugleich vor beide Bi-Zählrohre Pb-Absorber gleicher Dicke gebracht wurden (Fig. 12), entspricht der Absorption einer γ -Strahlung von 0,33 MeV. Daraus geht hervor, dass die 1,48 MeV- und die 2,1 MeV- γ -Strahlung nicht in Kaskade emittiert werden.

Zur Untersuchung der Koinzidenzfähigkeit der übrigen γ -Komponenten wurde die Anzahl der γ - γ -Koinzidenzen in Funktion der Dicke des Pb-Absorbers vor einem Bi-Zählrohr gemessen, während durch einen 1,5 mm dicken Sn-Absorber vor dem andern Bi-Zählrohr die Registrierung von eventuellen K - γ -Koinzidenzen verhindert wurde (Fig. 12). Der Verlauf dieser Absorptionskurve zeigt (unter Berücksichtigung der Zählrohrsensibilität), dass eine harte γ -Strahlung an den γ - γ -Koinzidenzen zu zirka einem Drittel beteiligt ist, während zwei Drittel der γ - γ -Koinzidenzen von weicherer γ -Strahlung (zirka 0,3 MeV) herrühren. Dadurch wird die Annahme nahegelegt, dass die 1,48-MeV-, die 0,328-MeV- und die 0,291-MeV- γ -Strahlung in Kaskade emittiert werden, was auch mit den Intensitätsverhältnissen dieser 3 γ -Strahlungen vereinbar ist.

Die Absorption der K - γ -Koinzidenzen (Fig. 12) lässt die gleiche Schlussfolgerung zu und zeigt, dass der relative Anteil der harten γ -Strahlung bei den K - γ -Koinzidenzen grösser ist als bei den γ - γ -Koinzidenzen, was darauf schliessen lässt, dass die 2,1-MeV- γ -Strahlung direkt in den Grundzustand des Pt^{194} führt, wobei das 2,1-MeV-Niveau direkt durch den K -Einfangsprozess angeregt wird.

Man bemerkt auch, dass die Energiesummen der 3 in Kaskade emittierten γ -Komponenten 1,48 MeV, 0,328 MeV und 0,291 MeV den Wert $(2,10 \pm 0,15)$ MeV ergibt, was genau der Quantenenergie der direkt angeregten 2,1-MeV- γ -Strahlung entspricht. Dies legt die Annahme nahe, dass durch den K -Einfang des Au^{194} ein Anregungsniveau des Pt^{194} -Kerns von 2,1 MeV Energie angeregt wird, wobei

der Grundzustand des Pt^{194} -Kerns entweder durch die 3 in Kaskade emittierten γ -Linien (Zerfallsmöglichkeit I) oder durch einen „cross over“-Übergang mit Emission der 2,1-MeV- γ -Strahlung erreicht werden kann (Zerfallsmöglichkeit II), entsprechend dem Termschema der Fig. 14.

Die sehr schwache 0,466-MeV- γ -Strahlung, die experimentell nur durch ihre Konversionselektronen nachgewiesen werden konnte,

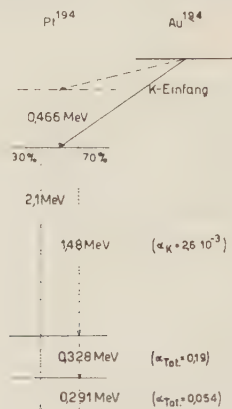


Fig. 14.

Termschema der Au^{194} -Umwandlung.

kann eventuell auf die in Fig. 14 angegebene Weise eingeordnet werden. Bei allen folgenden Berechnungen wird dieser γ -Übergang vernachlässigt.

d) Verifikation des Termschemas durch Koinzidenzmessungen und Bestimmung der Konversionsverhältnisse.

Zur Bestimmung der Anzahl der Zerfallsprozesse $N = N^{\text{I}} + N^{\text{II}}$ eines bestimmten im folgenden vermessenen Au^{194} -Präparates wurde mit einem in bezug auf Raumwinkel geeichten Bi-Zählrohr die Stosszahl Z_γ hinter 20 mm Pb gemessen:

$$Z_\gamma = (7200 \pm 50) \text{ min}^{-1} \quad (10)$$

Durch den Pb-Absorber wurden die 0,291-MeV- (Id) und die 0,328-MeV- γ -Strahlung (Ic) praktisch vollständig absorbiert und nur die 1,48-MeV- (Ib) und die 2,1-MeV- γ -Quanten (IIb) registriert:

$$Z_\gamma = Z_\gamma^{\text{Ib+IIb}} = N^{\text{I}} \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} \cdot e^{-\mu_{1,48} \text{ MeV} \cdot d_{\text{Pb}}} + N^{\text{II}} \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{IIb}} \cdot e^{-\mu_{2,1} \text{ MeV} \cdot d_{\text{Pb}}} \quad (11)$$

(Vernachlässigung der Konversion des 1,48-MeV-Übergangs). Unter Verwendung des Intensitätsverhältnisses (8) ergibt sich die Anzahl der Zerfallsprozesse:

$$\begin{aligned} N^I &= 1,8 \cdot 10^7 \text{ min}^{-1} \\ N^{II} &= 0,8 \cdot 10^7 \text{ min}^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Zur Bestimmung der Konversion des 0,328-MeV- und des 0,291-MeV-Übergangs wurden e^- - γ -Koinzidenzen gemessen, wobei durch 15 mm Pb vor dem Bi-Zählrohr erreicht wurde, dass nur Koinzidenzen zwischen der 1,48-MeV- γ -Strahlung und den Konversions-elektronen des 0,328-MeV- bzw. des 0,291-MeV-Übergangs gemessen wurden. Koinzidenzen mit Augerelektronen brauchen nicht berücksichtigt zu werden, da diese in der Luft und im Fenster des β -Zählrohrs absorbiert werden.

$$K^I(\gamma; e^-) = N^I \omega_\beta (\bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}} + \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}}) \cdot \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} e^{-\mu_{1,48} \text{ MeV dPb}}$$

Aus dem experimentellen Wert von $K^I(\gamma; e^-)$ und den übrigen nun bekannten Daten, kann die Summe der totalen Konversionsverhältnisse bestimmt werden:

$$\bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}} + \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}} = \frac{K^I(\gamma; e^-)}{N^I \omega_\beta \cdot \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} e^{-\mu_{1,48} \text{ MeV dPb}}} = 0,21 \pm 0,02$$

Aus den mit dem Spektrographen bestimmten relativen Intensitätsverhältnissen der Konversionslinien (Tabelle 1) ergeben sich die Konversionsverhältnisse der einzelnen γ -Übergänge:

Übergang Ib: 1,48 MeV	$\bar{\alpha}_K = 0,0026 \pm 0,0003$
Übergang Ic: 0,328 MeV	$\bar{\alpha}_K = 0,10 \pm 0,01$
	$\bar{\alpha}_L = 0,057 \pm 0,01$
	$\bar{\alpha}_M = 0,008 \pm 0,004$
Übergang Id: 0,291 MeV	$\bar{\alpha}_K = 0,034 \pm 0,005$
	$\bar{\alpha}_L = 0,017 \pm 0,007$

Mit der Kenntnis der Konversionsverhältnisse ist es möglich, aus den Intensitäten der Augerelektronen-Linien (vergl. Tabelle 1) die Konversionskoeffizienten der K -Röntgenstrahlung des Pt zu bestimmen. Wird dem Anteil der K -Einfangsprozesse N^{II} , als deren Folge keine Konversionselektronen emittiert werden und ebenso der Ionisierung der K -Schale durch K -Konversion Rechnung getragen, so

erhält man für die Konversionswahrscheinlichkeit der Pt-K-Röntgenstrahlung:

$$\begin{aligned} \text{Auger-Übergang } LL &\rightarrow K \infty \quad \bar{a}_{LL} = 0,026 \pm 0,005 \\ \text{Auger-Übergang } LM &\rightarrow K \infty \quad \bar{a}_{LM} = 0,018 \pm 0,006 \\ \text{Auger-Übergang } LN &\rightarrow K \infty \quad \bar{a}_{LN} = 0,0065 \pm 0,003 \\ \text{Auger-Übergang } MN &\rightarrow K \infty \quad \bar{a}_{MN} = 0,0065 \pm 0,003 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Fluoreszenzausbeute der K-Schale des Pt:

$$W_K = 1 - \sum \bar{a} = 0,94 \pm 0,015 \quad (14)$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem nach Gleichung (4) erhaltenen Wert für Pt ($Z = 78$).

Mit diesem Wert von W_K wird die Intensität der Pt-K-Strahlung beim Zerfall des Au¹⁹⁴ (Nachweis durch ein Au-Zählrohr):

$$Z_K^{I+II} = (N^I + N^{II} + N^{II} \bar{\alpha}_K^{Ic} + N^{II} \bar{\alpha}_K^{Id}) W_K \cdot \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_K = 13500 \text{ min}^{-1}$$

in Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert:

$$Z_K = (13000 \pm 1000) \text{ min}^{-1}. \quad (15)$$

Die mit einem Bi-Zählrohr zu erwartende Stosszahl der beim Zerfall des Au¹⁹⁴ emittierten γ -Strahlung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} Z_\gamma^{I+II} = N^I \cdot \omega_\gamma [(1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} + (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ic}} + (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Id}}] \\ + N^{II} \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{IIb}} = 33800 \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

während

$$Z = (35000 \pm 1000) \text{ min}^{-1} \quad (16)$$

gemessen wurde, was in Anbetracht der immer etwas schwankenden Zählrohr-Sensibilität befriedigend ist. Die Anzahl der gemessenen γ - γ -Koinzidenzen weist eindeutig daraufhin, dass die drei γ -Komponenten Ib, Ic und Id in Kaskade emittiert werden. Mit zwei in Koinzidenz geschalteten Bi-Zählrohren, welche zur Absorption der Pt-K-Strahlung von je 1,5 mm Sn umgeben sind, werden:

$$K(\gamma, \gamma) = (16,0 \pm 0,5) \text{ min}^{-1} \quad (17)$$

Koinzidenzen gemessen, während man unter Annahme des Term-schemas der Fig. 14 den folgenden Wert berechnet:

$$\begin{aligned} K^I(\gamma; \gamma) = 2 N^I \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}}) \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ic}} e^{-\mu_{0,328} \text{ MeV dSn}} \\ + 2 N^I \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}}) \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Id}} e^{-\mu_{0,291} \text{ MeV dSn}} \\ + 2 N^I (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}}) \omega_\gamma \cdot \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ic}} e^{-\mu_{0,328} \text{ MeV dSn}} \\ \cdot (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}}) \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Id}} e^{-\mu_{0,291} \text{ MeV dSn}} \end{aligned}$$

Mit den oben bestimmten Werten von N^I und $\bar{\alpha}$ erhält man:

$$K^I(\gamma; \gamma) = 15,4 \text{ min}^{-1} \quad (18)$$

Auf diese Weise kann die Anzahl der γ - γ -Koinzidenzen für verschiedene Pb-Absorber vor den Bi-Zählrohren berechnet und mit den tatsächlich gemessenen Werten verglichen werden (Tabelle 2).

Tabelle 2.

Berechnete und gemessene γ - γ -Koinzidenzen beim Zerfall des Au^{194} .

Absorber vor ZRI ZRI: Bi-ZR	Absorber von ZR II ZR II: Bi-ZR	$K^I(\gamma; \gamma)$ berechnete Werte min^{-1}	$K^I(\gamma; \gamma)$ gemessene Werte min^{-1}
1,134 g/cm ² Sn	1,134 g/cm ² Sn	15,4	$16,0 \pm 0,5$
1,134 g/cm ² Sn	5 mm Pb	6,23	$6,5 \pm 0,3$
1,134 g/cm ² Sn	10 mm Pb	3,80	$3,6 \pm 0,2$
1,134 g/cm ² Sn	16 mm Pb	2,53	$2,5 \pm 0,2$
5 mm Pb	5 mm Pb	2,3	$2,5 \pm 0,2$
10 mm Pb	10 mm Pb	0,35	$0,5 \pm 0,1$
Absorber vor ZRI ZRI : Au-ZR	Absorber vor ZR II ZR II : Bi-ZR	$K_{I+II}(K; \gamma)$ berechnete Werte min^{-1}	$K^{I+II}(K; \gamma)$ aus Differenzmes- sungen bestimmte Werte min^{-1}
0 (bzw. 1,5 mm Sn)	0	12,0	$11,5 \pm 1,0$
0 (bzw. 1,5 mm Sn)	16 mm Pb	3,33	$3,4 \pm 0,2$

Die Berechnung der Koinzidenzen zwischen der Pt- K -Strahlung (Au-Zählrohr) und der γ -Strahlung (Bi-Zählrohr mit 1,5 mm Sn) ist etwas komplizierter, weil die als Folge der K -Konversion auftretenden K -Übergänge berücksichtigt werden müssen:

$$\begin{aligned}
 K^{I+II}(K; \gamma) = & N^I W_K \omega_K \bar{\epsilon}_K \omega_\gamma [\bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} + (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ic}} e^{-\mu_{0,328 \text{ MeV}} \text{ dSn}} \\
 & + (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Id}} e^{-\mu_{0,291 \text{ MeV}} \text{ dSn}}] \\
 & + N^I \omega_\gamma W_K \omega_K \bar{\epsilon}_K [\bar{\alpha}_K^{\text{Id}} \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} + \bar{\alpha}_K^{\text{Id}} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ic}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ic}} e^{-\mu_{0,328 \text{ MeV}} \text{ dSn}} \\
 & + \bar{\alpha}_K^{\text{Ic}} \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}} + \bar{\alpha}_K^{\text{Ic}} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Id}}) \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Id}} e^{-\mu_{0,291 \text{ MeV}} \text{ dSn}}] \\
 & + N^{II} W_K \omega_K \bar{\epsilon}_K \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma^{\text{Ib}}
 \end{aligned}$$

Die für 0 und 16 mm Pb vor dem Bi-Zählrohr berechneten Werte von $K^{I+II}(K; \gamma)$ sind in Tabelle 2 eingetragen. Die experimentelle

Bestimmung der K - γ -Koinzidenzen erforderte die Messung der Differenz der γ - γ -Koinzidenzen ohne Sn-Absorber und mit 1,5 mm Sn vor dem Au-Zählrohr, denn durch 1,5 Sn wird die Pt- K -Strahlung praktisch vollständig absorbiert, während die geringe Absorption der γ -Strahlung in Rechnung gezogen werden kann.

Die Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Koinzidenzen in Tabelle 2 bestätigt das angenommene Zerfallsschema des Au^{194} (Fig. 14).

2. Untersuchung des 65-h- Au^{198} .

a) Bisherige Untersuchungen des Au^{198} .

Der Zerfall des Au^{198} war der Gegenstand schon sehr vieler Untersuchungen, jedoch widersprechen sich die Resultate einiger Autoren. Nach den Messungen von SIEGBAHN³²⁾ und PEACOCK-WILKINSON³³⁾ wird beim Zerfall des Au^{198} ein einfaches Elektronenspektrum ($E_{\text{max}} = 0,97$ MeV) emittiert mit nachfolgender Emission einer einzigen γ -Strahlung von 0,41 MeV. Diesem einfachen Zerfallsschema stehen die Messungen von LEVY und GREULING³⁴⁾ gegenüber; diese Autoren messen ein komplexes β -Spektrum und finden ausser der 0,41-MeV- γ -Strahlung noch zwei schwache konvertierte γ -Linien von 0,208 MeV und 0,157 MeV-Quantenenergie, die in Kaskade emittiert werden sollen. Auf einen ähnlichen Zerfallsmodus scheinen die von CLARK³⁵⁾, WIEDENBECK-CHU³⁶⁾ und MANDEVILLE-SCHERB³⁷⁾ gemessenen γ - γ -Koinzidenzen hinzuweisen; hingegen konnten JURNÉY und KECK³⁸⁾ bei chemisch abgetrenntem Au^{198} keine Anzeichen von γ - γ -Koinzidenzen feststellen.

Da das Au^{198} zwei stabile Isobare: Hg^{198} und Pt^{198} , besitzt, ist die Möglichkeit gegeben, dass das Au^{198} sich nicht nur durch β -Zerfall, sondern auch durch K -Einfang umwandelt. Diese Möglichkeit wurde schon von Sizoo und EJKMANN³⁹⁾, allerdings auf Grund falscher Messresultate, diskutiert und von INANANANDA⁴⁰⁾ wieder aufgegriffen, nachdem dieser letztere Autor eine von ihm gefundene schwache, etwas breite Elektronenlinie von 0,058-MeV-Energie als L -Konversionslinie der Pt- und Hg- K -Röntgenstrahlung interpretierte.

b) Die Elektronen- und γ -Strahlung des 65-h- Au^{198} .

Die Elektronenstrahlung des durch die Pt (p, n) Au-Reaktion hergestellten Au^{198} ist aus Fig. 6 ersichtlich. Da das β -Spektrum des Au^{198} teilweise durch die Elektronenstrahlung der andern Au-Isotope stark überdeckt wurde, ist die Ungenauigkeit der Messpunkte unterhalb des Hg -Wertes 2300 Oersted·cm beträchtlich. Die K -, L -

und M -Konversionselektronen der 0,41-MeV- γ -Strahlung konnten gut gemessen werden und dienen zur Eichung des Linsenspektrometers, da die Energie dieser beim Zerfall des Au^{198} emittierten γ -Linie von DUMOND, LIND und WATSON⁴¹⁾ mit einem Quarz-Kristall-Spektrometer sehr genau zu $(0,41118 \pm 0,00005)$ MeV bestimmt wurde. Die von LEVY und GREULING angegebenen Konversionslinien konnten nicht festgestellt werden; ebenso lässt das

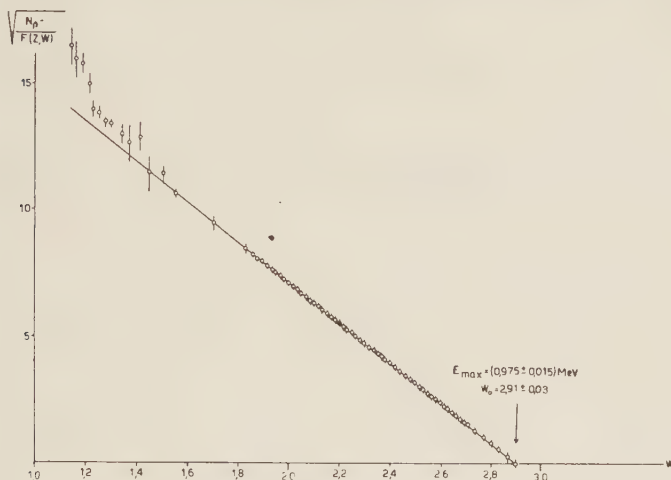


Fig. 15.

Fermi-Diagramm des Elektronenspektrums des Au^{198} .

Fermi-Diagramm (Fig. 15) auf ein einfaches β^- -Spektrum schliessen; die Anwesenheit eines Partialspektrums mit $E_{\text{max}} = 0,605$ MeV, wie es LEVY und GREULING gemessen haben, scheint nach unseren Messungen sehr unwahrscheinlich. Aus der Fermi-Geraden ergibt sich die obere Grenze des β^- -Kontinuums zu

$$E_{\text{max}} = (0,975 \pm 0,015) \text{ MeV.}$$

Um festzustellen, ob neben der 0,411-MeV- γ -Strahlung noch weichere γ -Komponenten auftreten, wurde die Absorption der γ -Strahlung sehr reiner Au^{198} -Strahlungsquellen in Sn mit einem Au-Zählrohr als Detektor sehr sorgfältig gemessen. Die Au^{198} -Präparate wurden durch den (n, γ) -Prozess aus dem stabilen Reinelement Au^{197} hergestellt, indem spektroskopisch reines Au-Blech (0,1 mm dick) mit langsamen Neutronen bestrahlt wurde. Die mehrmals gemessene Sn-Absorptionskurve (Fig. 16) zeigt deutlich die Anwesenheit einer

elektromagnetischen Strahlung mit einer Quantenenergie von 0,07 MeV. Bei Berücksichtigung der Eigenabsorption im Au-Blech und der effektiven Zählrohr-Sensibilität ergibt sich für die Intensität dieser 0,07-MeV-Strahlung

$$I_{0,07 \text{ MeV}} = 0,26 I_{0,41 \text{ MeV}} \quad (19)$$

c) Koinzidenzmessungen und Konversion der 0,411-MeV- γ -Strahlung.

Die Messung von β - γ -Koinzidenzen in Funktion der Dicke eines Al-Absorbers vor dem β -Zählrohr bestätigt, dass das β -Spektrum einfach ist; denn der Quotient $K(\beta; \gamma)/Z_{\beta}$ ist unabhängig von der Absorberdicke (Fig. 17).

Ebenso zeigt der Verlauf der β - γ -Koinzidenzen bei Absorption der γ -Strahlung mit Pb-Absorbern vor den γ -Zählrohren, dass das

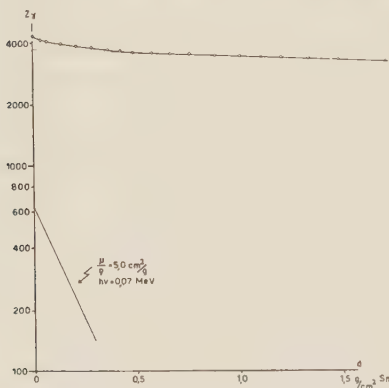


Fig. 16.

Absorption der elektro-magnetischen Strahlung des Au^{198} (Sn-Absorber).

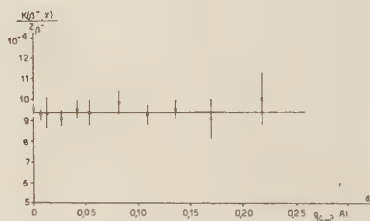


Fig. 17.

Absorption d. β - γ -Koinzidenzen des Au^{198} (Al-Absorber vor dem Fensterzählrohr).

β -Spektrum nur mit der 0,411-MeV- γ -Strahlung koinzidiert und keine weicheren koinzidenzfähigen γ -Komponenten mit über 10%-Intensität vorhanden sein können (Fig. 18). Zur Messung von γ - γ -Koinzidenzen wurden zwei Messing-Zählrohre mit Au-Kathode verwendet um auch weiche γ -Strahlung (bis zirka 0,05 MeV) erfassen zu können. Bei einer mittleren Einzelstosszahl von

$$Z_{\gamma} = (4800 \pm 100) \text{ min}^{-1} \quad (20)$$

wurden mit der γ - γ -Koinzidenzstandardanordnung

$$K(\gamma; \gamma) = (0,05 \pm 0,02) \text{ min}^{-1} \quad (21)$$

Koinzidenzen gemessen. Der von den Au-Zählrohren erfasste Raumwinkel betrug bei dieser Messung $\omega_\gamma = (0,071 \pm 0,005)$. Mit einem 1 mm dicken Sn-Absorber vor einem Au-Zählrohr konnten keine γ - γ -Koinzidenzen mehr festgestellt werden. Es scheint demnach, dass ein Koinzidenzpartner mit der 0,070-MeV- γ - oder -Röntgenstrahlung identisch ist.

Aus dem relativen Intensitätsverhältnis der Konversionselektronen des 0,411-MeV- γ -Überganges und des β -Spektrums (vergl.

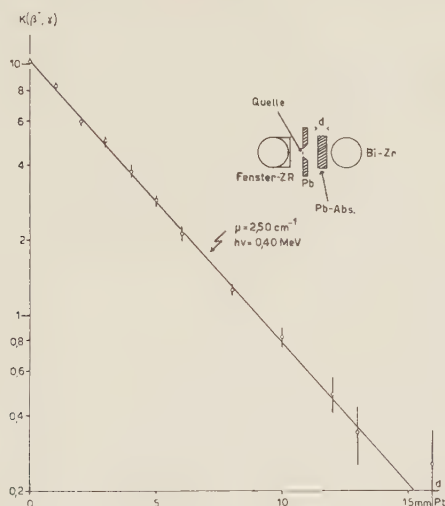


Fig. 18.

Absorption des β - γ -Koinzidenzen des Au^{198} (Pb-Absorber vor γ -Zählrohr)

Tabelle 1) ergibt sich für die Konversionsverhältnisse der 0,411-MeV- γ -Strahlung:

$$\begin{aligned} \text{Übergang Ib: } 0,411 \text{ MeV. } \quad & \bar{\alpha}_K = 0,028 \pm 0,007 \\ & \bar{\alpha}_L = 0,0125 \pm 0,003 \\ & \bar{\alpha}_M = 0,003 \pm 0,002 \end{aligned}$$

Den gleichen Wert der Konversionsverhältnisse ergibt die Auswertung der β - γ -Koinzidenzen:

Da ausser dem β -Spektrum und den Konversionselektronen der 0,411-MeV- γ -Strahlung keine andere Elektronenstrahlung emittiert wird, gilt:

$$K^I(\beta^-; e^-) = 2 N^I \cdot \omega_\beta \cdot \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}} \omega_\beta$$

und

$$Z_\beta^I = N^I \omega_\beta (1 + \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}})$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man $\bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}}$:

$$\bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}} = \frac{K^{\text{I}}(\beta^-; e^-)}{2 \omega_{\beta} Z_{\beta} - K^{\text{I}}(\beta^-; e^-)} \quad (22)$$

Die Messung von $K^{\text{I}}(\beta^-; e^-)$ und Z_{β} führt auf:

$$\bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}} = \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} + \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} + \bar{\alpha}_M^{\text{Ib}} = 0,040 \pm 0,005$$

d) Schema des dualen Zerfalls des Au^{198} .

Da der 0,411-MeV- γ -Übergang nur zu 2,8% in der K -Schale konvertiert ist, kann die 0,07-MeV-Strahlung nicht als Hg- K -Strahlung interpretiert werden, die bei der Auffüllung der durch die Konversion entstandenen Lücken in der K -Schale emittiert wird. Die einzige mit den vorliegenden experimentellen Daten verträgliche Interpretation ist, dass diese Strahlung als Pt- K -Röntgenstrahlung

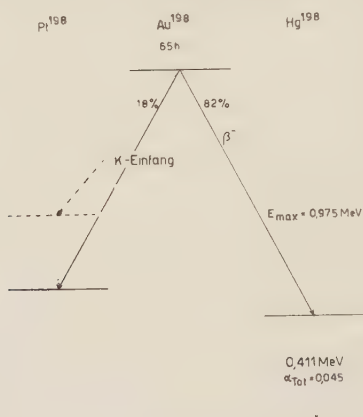


Fig. 19.

Termschema der Au^{198} -Umwandlung.

anzusehen ist, was zur Annahme zwingt, dass ein Teil der Au^{198} -Kerne sich durch K -Einfang umwandelt. Aus der relativen Intensität dieser Pt- K -Strahlung (Gl. 19) ergibt sich bei Berücksichtigung der Fluoreszenzausbeute W_K und der bei der Konversion emittierten Hg- K -Röntgenstrahlung, dass $(18 \pm 7)\%$ der Au^{198} -Kerne durch K -Einfang zerfallen, so dass also beim Au^{198} ein dualer Zerfall vorliegt, gemäss Fig. 19. Es ist möglich, dass zirka 10% der K -Einfangprozesse auf ein angeregtes Niveau des Pt^{198} Kerns führen, wodurch die geringe Anzahl der γ - γ -Koinzidenzen (Gl. 21) die nun als

K - γ -Koinzidenzen zu interpretieren wären, erklärt würde. Die Tatsache, dass mehrere Autoren keine K - γ -Koinzidenzen feststellen konnten, mag dadurch verständlich werden, dass in den Pb- oder Pt-Wandungen der üblichen γ -Zählrohre die Pt- K -Strahlung fast vollständig absorbiert wird.

Eine genauere Untersuchung der Anregungsniveaus des Pt^{198} -Kerns erforderte wesentlich stärkere Au^{198} -Strahlungsquellen als hier zur Verfügung standen.

3. Untersuchung des 5,6-d- Au^{196} .

a) Bisherige Untersuchung des 5,6-d-Au und Zuordnung zur Massenzahl 196.

Bei der Bestrahlung von reinem Gold mit schnellen Neutronen stellten Mc MILLAN, KAMEN und RUBEN⁴²⁾ eine Aktivität von zirka 5 Tagen Halbwertszeit fest, welche sie einem isomeren Zustand des Au^{196} oder Au^{197} zuordneten. Die weiteren Untersuchungen dieser Periode durch CORK-HALPERN⁴³⁾, LAWSON und CORK⁴⁴⁾ und KRISHNAN-NAHUM⁴⁵⁾ zeigten, dass sehr wahrscheinlich die Zuordnung zur Massenzahl 196 richtig ist.

Um diese Zuordnung zu verifizieren, wurde reines Au-Blech mit den 17,2-MeV- γ -Strahlen der $\text{Li}^7(p, \gamma)\text{Be}^8$ -Reaktion*) und mit den schnellen Neutronen der $\text{Li}(d, n)\text{Be}$ -Reaktion**) bestrahlt, um das Au^{196} durch den (γ, n) - bzw. $(n, 2n)$ -Prozess aus dem stabilen Au^{197} herzustellen. Die beobachtete Halbwertszeit der entstandenen Aktivität betrug in beiden Fällen

$$T_{1/2} = (5,60 \pm 0,05) \text{ d}$$

womit die Zuordnung der 5,6-d-Periode zum Isotop Au^{196} sichergestellt ist. LAWSON und CORK stellten mit dem β -Spektrographen eine teilweise konvertierte γ -Linie von $h\nu = (0,356 \pm 0,004) \text{ MeV}$ Quantenenergie fest, die sie wegen ihrer Halbwertszeit (zirka 3 bis 4 Tage) dem Au^{196} zuschrieben. KRISHNAN und NAHUM diskutierten die Möglichkeit der Umwandlung des Au^{196} zum stabilen Pt^{196} durch K -Einfang. Da das Au^{196} ebenfalls zwei stabile Isobare: Pt^{196} bzw. Hg^{196} besitzt, ist auch hier ein dualer Zerfall, ähnlich wie beim Au^{198} , nicht ausgeschlossen.

*) Herrn Dr. H. WÄFFLER und seinen Mitarbeitern sei an dieser Stelle für die Bestrahlung des Au mit der Li- γ -Strahlung gedankt.

**) Die Bestrahlung des Au mit schnellen Neutronen erfolgte mit dem Tensator des physikalischen Instituts, wofür wir Herrn Dr. W. ZÜNTI unsern besten Dank aussprechen möchten.

b) Die Elektronen- und γ -Strahlung des 5,6-d-Au¹⁹⁶.

Die Messung des Elektronenspektrums mit dem Linsenspektrometer (Fig. 7) zeigt, dass beim Zerfall des Au¹⁹⁶ ein β -Kontinuum relativ kleiner Intensität und Elektronenlinien von 3 in der *K*- und *L*-Schale konvertierten γ -Übergängen (Tabelle 1) emittiert werden. Aus den Energiewerten der Konversionselektronen erhält man für die Quantenenergie der γ -Übergänge

$$h\nu_1 = (0,330 \pm 0,03) \text{ MeV}$$

$$h\nu_2 = (0,358 \pm 0,02) \text{ MeV}$$

$$h\nu_3 = (0,175 \pm 0,03) \text{ MeV}$$

Die Energiedifferenzen der *K*- und *L*-Konversionslinien der 0,330-MeV- und 0,358-MeV- γ -Strahlung entsprechen der *K-L*-Energiedifferenz der Pt-Elektronenschalen, während die *K*- und *L*-Konversionselektronen der 0,175-MeV- γ -Strahlung auf einen γ -Übergang im Hg hinweisen. Ausserdem werden wesentlich mehr Konversionselektronen der 0,358-MeV- γ -Strahlung emittiert als β -Teilchen, so dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass dieser Übergang durch den β -Zerfall angeregt wird; es muss deshalb angenommen werden, dass die 0,330-MeV- und 0,358-MeV- γ -Übergänge als Folge von *K*-Einfangprozessen im Pt¹⁹⁶-Kern stattfinden. Dem entspricht auch der relativ grosse Anteil von Augerelektronen. Die radioaktive Umwandlung des Au¹⁹⁶ erfolgt also ebenso durch *K*-Einfang wie durch β -Zerfall; es liegt demnach auch hier ein dualer Zerfall vor.

Da die obere Grenze des β -Spektrums durch Konversionslinien verdeckt ist, kann die Maximalenergie nicht genau bestimmt werden, sondern muss indirekt aus dem Verlauf des β -Kontinuums extrapoliert werden:

$$\underline{E_{\max}^- = (0,30 \pm 0,05) \text{ MeV.}}$$

Zur Analyse der γ -Strahlung wurde in der Standardanordnung die Absorptionskurve mit Pb-Absorbern gemessen. Da keine sehr harte γ -Komponente beim Zerfall des Au¹⁹⁶ emittiert wird, wurde als Detektor ein Zählrohr mit einer 0,080 g/cm² dicken Au-Kathode verwendet. Die γ -Absorptionskurve kann in zwei Komponenten entsprechend $h\nu = (0,07 \pm 0,01) \text{ MeV}$ und $h\nu = (0,36 \pm 0,04) \text{ MeV}$ zerlegt werden (Fig. 20). Die weiche Komponente muss als *K*-Strahlung des Pt interpretiert werden; die 0,36-MeV- γ -Strahlung entspricht den aus der Konversion bestimmten 0,330-MeV- und 0,358-MeV- γ -Übergängen. Die 0,175-MeV- γ -Strahlung tritt in der

Absorptionskurve wegen ihrer geringen Intensität nicht hervor. Zur genauen Bestimmung des Verhältnisses der Zählrohr-Stosszahlen bezüglich der K -Röntgenquanten und der γ -Quanten wurde die

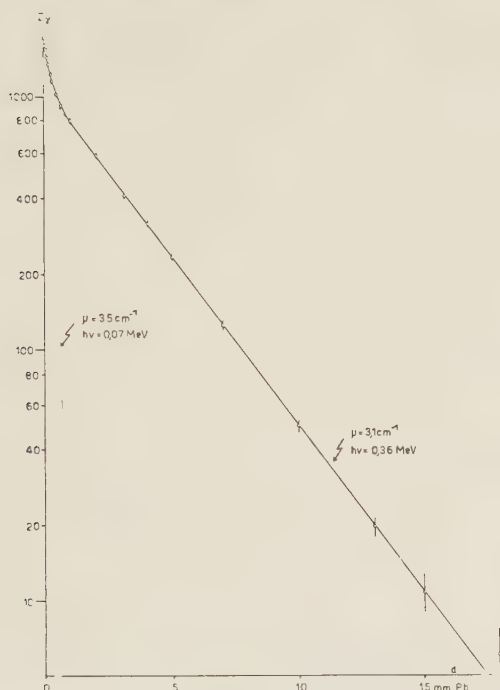


Fig. 20.

Absorption der γ -Strahlung des Au^{196} (Pb-Absorber).

elektromagnetische Strahlung des Au^{196} noch mit Sn absorbiert (Fig. 21). Beide Absorptionskurven ergeben übereinstimmend:

$$\frac{Z_{0,330 \text{ MeV} + 0,358 \text{ MeV}}}{Z_{K\text{-Strahlung}}} = 1,60 \pm 0,05 \quad (23)$$

Unter Berücksichtigung der effektiven Zählrohrsensibilitäten und der Fluoreszenzausbeute W_K (Gl. 4) wird damit das Verhältnis der γ -Quanten zu den K -Übergängen

$$\frac{I_{0,330 \text{ MeV} + 0,358 \text{ MeV}}}{I_K} = 1,15 \pm 0,06 \quad (24)$$

Vernachlässigt man den intensitätsschwachen 0,175-MeV- γ -Über-

gang, so folgt bei Einführung eines mittleren Konversionsverhältnisses $\bar{\alpha}_{\text{Mittel}}$ der γ -Strahlung:

$$\text{Anzahl der } K\text{-Einfangprozesse: } N^K = \frac{I_K}{1 + \bar{\alpha}_{K\text{Mittel}}}$$

$$\text{Anzahl der } 0,030\text{-MeV- und } 0,358\text{-MeV-}\gamma\text{-Übergänge: } N^\gamma = \frac{I_\gamma}{1 - \bar{\alpha}_{\text{Mittel}}}$$

Nach Gleichung (24)

$$\frac{N^\gamma}{N^K} = \frac{1 - \bar{\alpha}_{K\text{Mittel}}}{1 + \bar{\alpha}_{\text{Mittel}}} \frac{I_\gamma}{I_K} = \frac{1 - \bar{\alpha}_{K\text{Mittel}}}{1 + \bar{\alpha}_{\text{Mittel}}} \cdot 1,15 > 1 \quad (25)$$

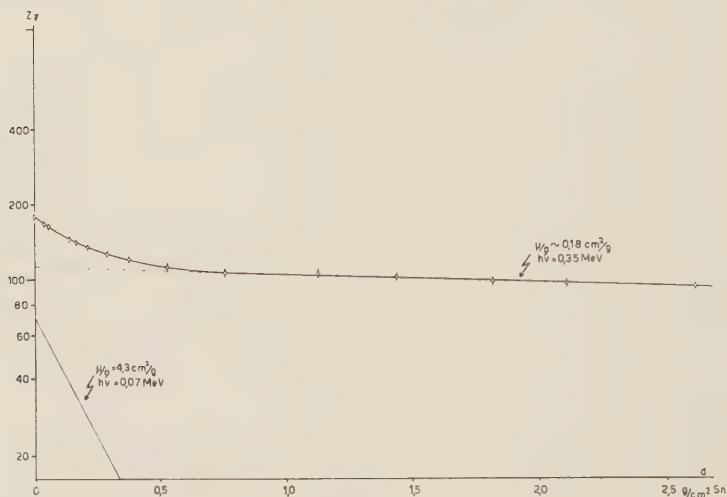


Fig. 21.

Absorption der γ -Strahlung des Au^{196} (Sn-Absorber).

Da N^γ grösser als N^K ist, folgt daraus unmittelbar, dass die beiden γ -Übergänge der Quantenenergie $h\nu_1 = 0,330$ MeV und $h\nu_2 = 0,358$ MeV nicht parallel ($N^\gamma/N^K \neq 1$) erfolgen können, sondern die Emission in Kaskade erfolgen muss.

c) Koinzidenzabsorptionsmessungen und Termschema der Au^{196} -Umwandlung.

Durch die Messung von $\gamma\gamma$ -Koinzidenzen wurde die Kaskadenemission der 0,330-MeV- und 0,358-MeV- γ -Strahlen evident. Die Verwendung zweier in Koinzidenz geschalteter Au-Zählrohre ermöglichte es, auch $K\gamma$ -Koinzidenzen zu registrieren. In Fig. 22 ist die Absorption der $\gamma\gamma$ - bzw. $K\gamma$ -Koinzidenzen mit Sn eingezeichnet. Die ausgezogene Kurve zeigt die Abhängigkeit der Koin-

zidenzzahl bei Sn-Absorbern vor beiden γ -Zählrohren, die strichpunktuierte Kurve bezieht sich auf einen Sn-Absorber vor einem Zählrohr. Die Registrierung von γ - γ -Koinzidenzen mit 2,5 mm Sn ($2,11 \text{ g/cm}^2$) vor beiden Zählrohren zeigt, dass die beiden γ -Komponenten in Kaskade emittiert werden, denn durch 2,5 mm Sn wird die K-Strahlung des Pt vollständig, die 0,35-MeV- γ -Strahlung jedoch wenig absorbiert. Die Absorptionskurve der Fig. 22 weist weiter

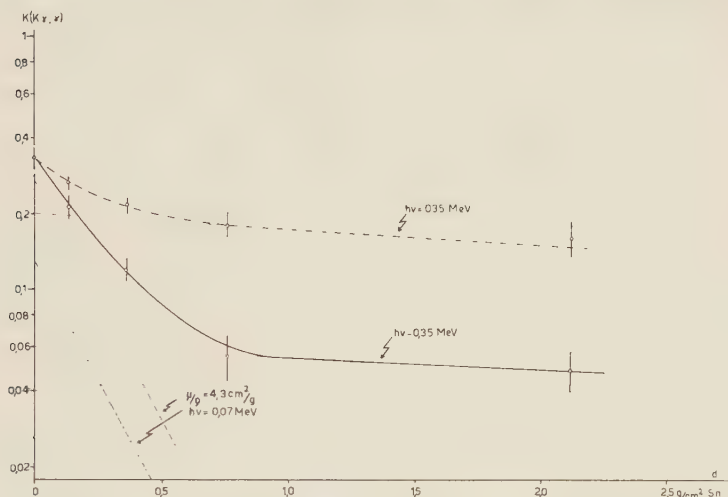


Fig. 22.

Absorption der γ - γ -Koinzidenzen des Au^{196} (Sn-Absorber vor einem γ -Zählrohr (strichpunktuierte Kurve) und Sn-Absorber vor beiden γ -Zählrohren (ausgezogene Kurve)).

daraufhin, dass wesentlich mehr K- γ -Koinzidenzen als γ - γ -Koinzidenzen gemessen werden.

Der Verlauf der Absorption der β - β -Koinzidenzen bei einem Al-Absorber vor einem Fensterzählrohr (Fig. 24), und bei je einem Al-Absorber vor beiden Fensterzählrohren (Fig. 23) ist sehr ähnlich; ebenso ergeben beide Absorptionskurven ungefähr die gleiche Reichweite der Elektronenstrahlung von $R = (0,10 \pm 0,01) \text{ g/cm}^2$ Al bzw. $R = (0,08 \pm 0,005) \text{ g/cm}^2$ Al. Das lässt darauf schließen, dass die beiden koinzidierenden Elektronenstrahlungen im wesentlichen ein ähnliches Spektrum und eine Maximal-Energie von zirka 0,35 MeV bzw. zirka 0,30 MeV besitzen. Die Konversionselektronen der konvertierten, in Kaskade emittierten 0,330-MeV- und 0,358-MeV- γ -Linien bilden demnach den Hauptanteil der β - β -Koinzidenzen. Andererseits sind auch Koinzidenzen des β -Spektrums mit den Konversionselektronen des 0,175-MeV- γ -Übergangs zu erwarten,

aber wie schon aus dem Spektrogramm (Fig. 7) hervorgeht, ist der β^- -Zerfall wenig intensiv und ausserdem ist die Absorption der weichen K -Konversionselektronen der 0,175-MeV- γ -Strahlung (0,092 MeV) gross.

Die Absorption der γ -Strahlung bei der Messung von β - γ -Koinzidenzen (Fig. 25) ergibt neben dem Anteil der K - e^- - und γ - e^- -

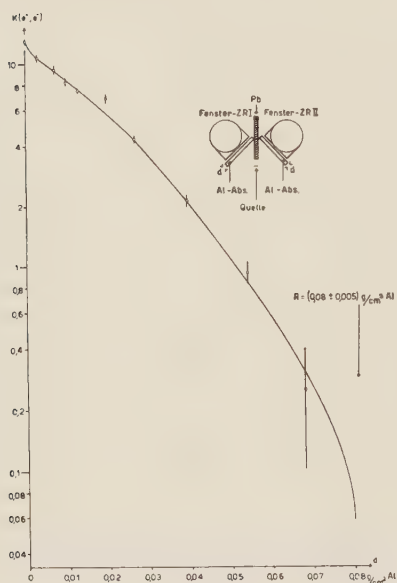


Fig. 23.

Absorption d. β - β -Koinzidenzen des Au^{196} (Al-Absorber vor beiden Fensterzählr.).

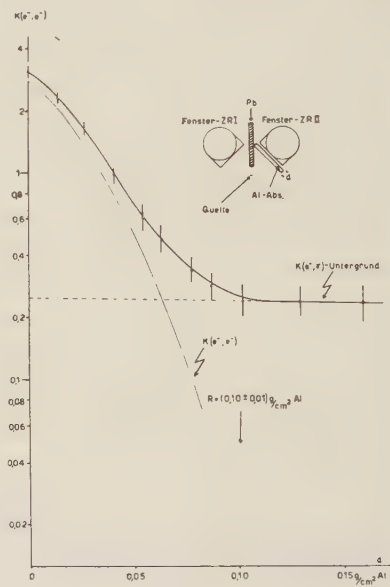


Fig. 24.

Absorption der β - β -Koinzidenzen des Au^{196} (Al-Absorber vor einem Zählrohr).

Koinzidenzen noch einen kleineren Anteil von Koinzidenzen der β^- -Strahlung mit der 0,175-MeV- γ -Strahlung. Auch hier weisen die Koinzidenzen zwischen Elektronen und der γ -Strahlung von zirka 0,35 MeV darauf hin, dass die Konversionselektronen des einen γ -Übergangs mit der γ -Strahlung des andern koinzidieren, d. h. dass die 0,330-MeV- und die 0,358-MeV- γ -Strahlung in Kaskade emittiert werden.

Wird die Elektronenstrahlung bei den β - γ -Koinzidenzmessungen absorbiert (Fig. 26), so zeigt sich, dass genau der gleiche Verlauf der β - γ -Absorptionskurve mit und ohne Sn-Absorber vor dem γ -Zählrohr gemessen wird; wodurch bewiesen wird, dass die β - γ -Koinzidenzen im wesentlichen als Folgeerscheinung der K -Einfangprozesse

gemessen werden, da mit 1 mm Sn Absorber vor dem γ -Zählrohr keine K - e^- -Koinzidenzen registriert werden können.

Die Koinzidenzabsorptionsmessungen können also nur durch die Annahme des Au^{196} -Zerfallsschemas der Fig. 27 widerspruchsfrei interpretiert werden. Nach dem Verhältnis von K - γ - zu γ - γ -Koinzidenzen muss angenommen werden, dass ein Teil der K -Einfangprozesse nicht zu γ - γ -Koinzidenzen Anlass gibt; das untere Niveau des Pt^{196} also direkt durch K -Einfang (N^{II}) angeregt wird.

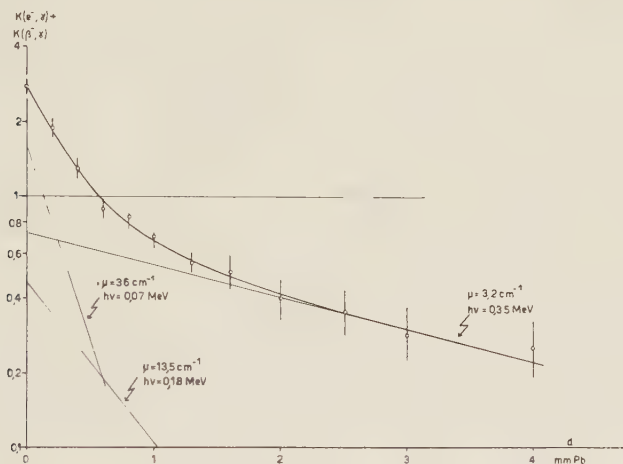


Fig. 25.

Absorption der β - γ -Koinzidenzen des Au^{196} (Pb-Absorber vor γ -Zählrohr).

d) Verifikation des Au^{196} -Umwandlungsschemas durch Koinzidenzmessungen und Bestimmung der K - β^- -Verzweigung und der Konversionsverhältnisse.

Aus den Spektrometermessungen folgt, dass für die beiden γ -Übergänge im Pt^{196} das Verhältnis $\bar{\alpha}_K \alpha_L$ genau gleich gross ist (vergl. Tabelle 1):

$$\text{Übergang Ib} : h\nu_1 = 0,330 \text{ MeV} \quad \frac{\bar{\alpha}_K^{\text{Ib}}}{\alpha_L^{\text{Ib}}} = 1,72 \pm 0,05$$

$$\text{Übergang Ic+IIb} : h\nu_2 = 0,358 \text{ MeV} \quad \frac{\bar{\alpha}_K^{\text{Ic+IIb}}}{\alpha_L^{\text{Ic+IIb}}} = 1,72 \pm 0,05$$

Da das Verhältnis $\bar{\alpha}_K \alpha_L$ stark vom Multipolcharakter des γ -Übergangs abhängt und die Quantenenergien der beiden γ -Übergänge wenig voneinander abweichen, kann aus der Gleichheit des Quotienten $\bar{\alpha}_K \alpha_L$ auf den gleichen Multipolcharakter der beiden γ -Über-

gänge geschlossen werden. Daraus folgt weiter, dass die Konversionskoeffizienten für beide γ -Übergänge praktisch gleich gross sind:

$$\bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} = \bar{\alpha}_K^{\text{Ic}} + \text{IIb} = \bar{\alpha}_K^{\text{Ic}} \quad (26)$$

$$\bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} = \bar{\alpha}_L^{\text{Ic}} + \text{IIb} = \bar{\alpha}_L \quad (27)$$

$$\bar{\alpha}_{\text{Tot}} = \bar{\alpha}_K + \bar{\alpha}_L = \bar{\alpha}_K \left(1 + \frac{\bar{\alpha}_L}{\bar{\alpha}_K} \right) = \bar{\alpha}_K \left(1 + \frac{1}{1,72} \right) = 1,58 \bar{\alpha}_K \quad (28)$$

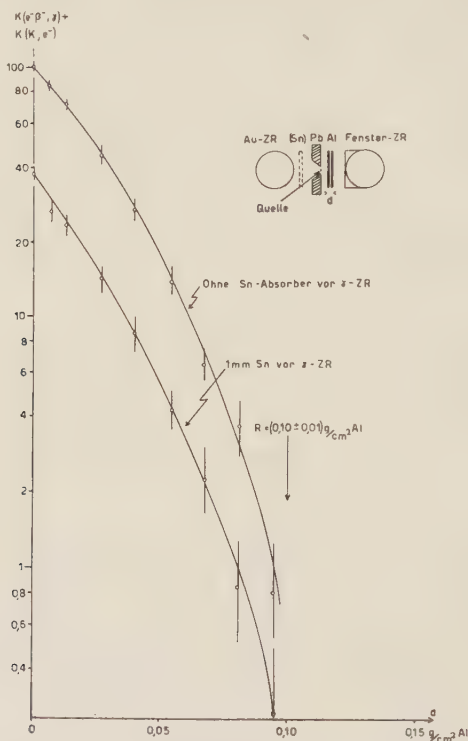


Fig. 26.

Absorption der β - γ -Koinzidenzen des Au^{196} (Al-Absorber vor Fensterzählrohr).

Das Verhältnis der Intensitäten der Konversionslinien (vergl. Tabelle 1) gibt daher direkt das Intensitätsverhältnis der beiden γ -Übergänge (Zerfallsmöglichkeit I: K-Einfang auf 0,688-MeV-Niveau des Pt^{196} ; Zerfallsmöglichkeit II: K-Einfang auf 0,358-MeV-Niveau des Pt^{196}):

$$\frac{N^{\text{I}}}{N^{\text{I}} + N^{\text{II}}} = \frac{I_{eK}^{\text{Ib}}}{I_{eK}^{\text{Ic}} + I_{eK}^{\text{IIb}}} = 0,38 \pm 0,03 \quad (29)$$

$$\underline{N^{\text{I}} = 0,61 N^{\text{II}}} \quad (30)$$

d. h. der 0,358-MeV-Übergang ist fast doppelt so intensiv wie der 0,330-MeV-Übergang, wodurch ebenfalls eine teilweise direkte Anregung des 0,330-MeV-Niveaus durch K -Einfang angenommen werden muss. Aus der relativ zur γ -Strahlung geringen Intensität der K -Strahlung folgt, dass K -Einfangprozesse in den Grundzustand des Pt^{196} wenig wahrscheinlich sind.

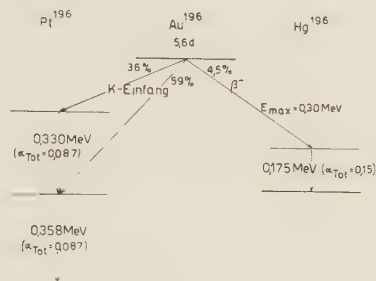


Fig. 27.

Termschema der dualen Umwandlung des Au^{196} .

Die als Folge der K -Konversion der 0,175-MeV- γ -Strahlung emittierte Hg- K -Strahlung kann wegen ihrer äusserst geringen Intensität vernachlässigt werden; die Anzahl der mit einem Au-Zählrohr registrierten K -Röntgenquanten wird damit:

K -Einfang:

$$Z_K^{\text{Ia} + \text{IIa}} = (N^{\text{I}} + N^{\text{II}}) W_K \omega_\gamma \bar{\epsilon}_K = 1,61 N^{\text{II}} W_K \omega_\gamma \bar{\epsilon}_K$$

K -Konversion:

$$Z_K^{\text{Ib} + \text{Ic} + \text{IIb}} = (2 N^{\text{I}} + N^{\text{II}}) \bar{\alpha}_K W_K \omega_\gamma \bar{\epsilon}_K = 2,22 N^{\text{II}} \cdot \bar{\alpha}_K W_K \omega_\gamma \bar{\epsilon}_K$$

Insgesamt:

$$Z_K = N^{\text{II}} (1,61 + 2,22 \bar{\alpha}_K) W_K \omega_\gamma \bar{\epsilon}_K \quad (33)$$

Für die mit einem Zählrohr gemessene Intensität der γ -Strahlung gilt (bei Vernachlässigung der kaum messbaren 0,175-MeV- γ -Strahlung):

$$Z_\gamma = (2 N^{\text{I}} + N^{\text{II}}) (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}) \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma = 2,22 N^{\text{II}} (1 - 1,58 \bar{\alpha}_K) \omega_\gamma \bar{\epsilon}_\gamma \quad (34)$$

Bei Bildung des Quotienten Z_K/Z_γ kürzt sich N^{II} weg:

$$\frac{Z_K}{Z_\gamma} = \frac{(1,61 + 2,22 \bar{\alpha}_K) W_K \bar{\epsilon}_K}{2,22 \cdot (1 - 1,58 \bar{\alpha}_K) \bar{\epsilon}_\gamma} = 1,60 \pm 0,05 \quad (35)$$

nach Gleichung (23). Aus (35) kann $\bar{\alpha}_K$ ohne weiteres berechnet werden:

$$\bar{\alpha}_K = 0,050 \pm 0,006 \quad (36)$$

Mit (28) sind jetzt die Konversionsverhältnisse bekannt:

$$\text{Übergang Ib:} \quad h\nu_1 = 0,330 \text{ MeV} \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}_K &= 0,050 \pm 0,006 \\ \bar{\alpha}_L &= 0,030 \pm 0,004 \end{aligned}$$

$$\text{Übergang Ic + IIb: } h\nu_2 = 0,0358 \text{ MeV} \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}_K &= 0,050 \pm 0,006 \\ \bar{\alpha}_L &= 0,030 \pm 0,004 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Zerfallsprozesse des zur Messung verwendeten Au^{196} -Präparates ist jetzt nach (35) oder (34) mit den gemessenen Zählrohr-Stosszahlen leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned} N^{\text{II}} &= 3,9 \cdot 10^5 \text{ min}^{-1} \\ N^{\text{I}} &= 2,4 \cdot 10^5 \text{ min}^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

Mit einem Fensterzählrohr wird die gemessene Stosszahl der Konversionselektronen (die Augerelektronen wurden durch die Luft und die Fensterfolie des Zählrohrs absorbiert!):

$$Z_e^{\text{I+II}} = (2 N^{\text{I}} + N^{\text{II}}) (\bar{\alpha}_K + \bar{\alpha}_L) = (3200 \pm 500) \text{ min}^{-1} \quad (38)$$

Während tatsächlich $Z_{\text{Elektron}} = (4300 \pm 100) \text{ min}^{-1}$ gemessen wird. Die Differenz ergibt den Anteil der β^- -Teilchen

$$Z_{\beta^-}^{\text{IIIa}} = N^{\text{III}} A_{\beta^-} \cdot \omega_{\beta} = (1100 \pm 600) \text{ min}^{-1} \quad (39)$$

Wegen der kleinen Maximalenergie des β^- -Kontinuums, muss der Absorptionsfaktor A_{β^-} berücksichtigt werden (Berechnung von A_{β^-} nach BLEULER und ZUENTI³¹).

Nach (39) wird die Anzahl der β^- -Zerfallsprozesse N^{III} :

$$N^{\text{III}} = 0,21 \cdot 10^5 \text{ min}^{-1} \quad (40)$$

N^{III} lässt sich auch aus dem mit dem Spektrometer gemessenen Intensitätsverhältnis des β^- -Kontinuums und der Konversionslinien bestimmen (vergl. Tabelle 1).

$$\frac{N^{\text{III}}}{N^{\text{I}} + N^{\text{II}}} = \frac{I_{\beta}^{\text{IIIa}}}{I_{eK}^{\text{Ic+IIb}}} \bar{\alpha}_K = 5,3 \cdot 10^{-2} \quad (41)$$

$$N^{\text{III}} = 0,34 \cdot 10^5 \text{ min}^{-1}$$

Die Übereinstimmung der auf verschiedene Weise erhaltenen Ergebnisse ist in Anbetracht der relativ grossen Fehlerquellen gut.

Die Konversion des durch den β^- -Zerfall angeregten 0,175-MeV- γ -Überganges wird aus dem Intensitätsverhältnis der K - und L -Konversionslinien und dem β^- -Spektrum bestimmt (Tabelle 1):

$$\begin{aligned} \text{Übergang IIIb: } h\nu_3 &= 0,175 \text{ MeV, } \bar{\alpha}_K^{\text{IIIb}} = 0,10 \pm 0,03 \\ \bar{\alpha}_L^{\text{IIIb}} &= 0,03 \pm 0,01 \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhält man aus der Intensität der Augerelektronen (Tabelle 1) die Konversion der K -Röntgenstrahlung des Pt:

$$\begin{array}{llll} \text{Auger-Übergang} & LL \rightarrow K \infty & \bar{\alpha}_{LL} = 0,028 \pm 0,006 \\ \text{Auger-Übergang} & LM \rightarrow K \infty & \bar{\alpha}_{LM} = 0,017 \pm 0,006 \\ \text{Auger-Übergang} & LN \rightarrow K \infty & \bar{\alpha}_{LN} = 0,006 \pm 0,003 \\ \text{Auger-Übergang} & MN \rightarrow K \infty & \bar{\alpha}_{MN} = 0,007 \pm 0,003 \end{array}$$

Die charakteristischen Zerfallsgrößen für die Umwandlung des vermessenen Au¹⁹⁶-Präparates sind nun bekannt, und das Zerfallschema des Au¹⁹⁶ soll nun durch einen Vergleich der berechneten und den mit diesem Präparat gemessenen Koinzidenzen verifiziert werden:

γ - γ -Koinzidenzen. (Vor beiden Au-Zählrohren 1 mm Sn)

$$K^{\text{I}}(\gamma; \gamma) = 2 N^{\text{I}} \cdot (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}})^2 \omega_{\gamma}^2 \bar{\epsilon}_{\gamma}^2 \cdot e^{-2\mu_{\gamma} d_{\text{Sn}}} = 0,070 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K(\gamma; \gamma) = (0,065 \pm 0,01) \text{ min}^{-1}$$

K - γ -Koinzidenzen. (Vor beiden Au-Zählrohren kein Absorber.)

$$K^{\text{I}+\text{II}}(K; \gamma) = 2(2N^{\text{I}} + N^{\text{II}}) W_K \omega_{\gamma} \bar{\epsilon}_K (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}) \omega_{\gamma} \cdot \bar{\epsilon}_{\gamma} = 0,23 \text{ min}^{-1}$$

Zu gleicher Zeit wurden auch die γ - γ -Koinzidenzen registriert:

$$K^{\text{I}}(\gamma; \gamma) = 2 N^{\text{I}} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}})^2 \omega_{\gamma}^2 \bar{\epsilon}_{\gamma}^2 = 0,09 \text{ min}^{-1}$$

Die Anzahl der gemessenen Koinzidenzen ist also:

$$K^{\text{I}+\text{II}}(K; \gamma) = K^{\text{I}+\text{II}}(K; \gamma) + K^{\text{I}}(\gamma; \gamma) = 0,32 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{\text{I}+\text{II}}(K; \gamma) = (0,32 \pm 0,03) \text{ min}^{-1}$$

e^- β^- - γ -Koinzidenzen. (1 mm Sn vor Au-Zählrohr.)

$$K^{\text{I}}(e^-; \gamma) = 2 N^{\text{I}} \cdot \bar{\alpha}_{\text{Tot}} \omega_{\beta} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}) \omega_{\gamma} \bar{\epsilon}_{\gamma} e^{-\mu_{0,35 \text{ MeV}} d_{\text{Sn}}} = 0,64 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{\text{III}}(\beta^-; \gamma) = N^{\text{III}} A_{L^-} \omega_{\beta} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{IIIb}}) \omega_{\gamma} \bar{\epsilon}_{\gamma} e^{-\mu_{0,175 \text{ MeV}} d_{\text{Sn}}} = 0,33 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{\text{I}+\text{III}}(e^- \beta^-; \gamma) = 0,97 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{\text{I}+\text{III}}(e^- \beta^-; \gamma) = (1,06 \pm 0,08) \text{ min}^{-1}.$$

$e^- \beta^- K \gamma$ -Koinzidenzen (ohne Absorber vor Au-Zählrohr).

$$K^{I+II} (K; e^-) = (2 N^I + N^{II}) \cdot W_K \cdot \omega_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_K (\bar{\alpha}_{\text{Tot}} + \bar{\alpha}_K) \omega_\beta = 1,60 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{III} (\beta^-; K) = 0,04 \text{ min}^{-1}$$

$$K^I (\gamma; e^-) = 0,73 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{III} (\beta^-; \gamma) = 0,44 \text{ min}^{-1}$$

Die Anzahl der $e^- \beta^- K \gamma$ -Koinzidenzen wird daher:

$$K^{I+II+III} (\beta^- e^-; K \gamma) = 2,81 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II+III} (\beta^- e^-; K \gamma) = (2,70 \pm 0,1) \text{ min}^{-1}$$

$e^- \beta^- e^-$ -Koinzidenzen (ohne Absorber vor den beiden Fensterzählrohren).

$$K^I (e^-; e^-) = 2 N^I \bar{\alpha}_{\text{Tot}} \omega_\beta \bar{\alpha}_{\text{Tot}} \omega_\beta = 3,7 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{III} (\beta^-; e^-) = 2 N^{III} A_{\beta^-} \omega_\beta^2 (\bar{\alpha}_K^{IIIb} A_{e_K^-} + \bar{\alpha}_L^{IIIb} A_{e_L^-}):$$

$$K^{I+III} (e^- \beta^-; e^-) = 7,3 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+III} (e^- \beta^-; e^-) = (7,5 \pm 0,2) \text{ min}^{-1}$$

Da nach Gleichung (7) das Produkt der Fluoreszenzausbeute W_L und der Ansprechwahrscheinlichkeit der Pt-L-Strahlung für die hier verwendeten Fensterzählrohre bekannt ist, können auch die Zählrohrmessungen mit der Pt-L-Strahlung berechnet werden. Die Anzahl der mit einem Fensterzählrohr gemessenen L-Röntgenquanten wird bei 1 mm C vor dem Zählrohr (zur Absorption der Elektronenstrahlung) zu

$$Z_L^{Ia+IIa} = (N^I + N^{II}) 0,75 \cdot W_L \bar{\varepsilon}_L \omega_\beta e^{-\mu_L \cdot d_c} = 129 \text{ min}^{-1}$$

berechnet (vergl. Abschnitt II, 4). Dazu kommen noch die von der Konversion herrührenden L-Quanten:

$$\begin{aligned} Z_L^{Ib+Ic+IIb+IIIb} &= (2 N^I + N^{II}) (\bar{\alpha}_L + 0,75 \bar{\alpha}_K) W_L \bar{\varepsilon}_L \omega_\beta e^{-\mu_L \cdot d_c} \\ &+ N^{III} (\bar{\alpha}_L^{IIIb} + 0,75 \bar{\alpha}_K^{IIIb}) W_L \bar{\varepsilon}_L \omega_\beta e^{-\mu_L \cdot d_c} = 15 \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

Zusammen also:

$$Z_L^{I+II+III} = 144 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } Z_L^{I+II+III} = (160 \pm 20) \text{ min}^{-1}$$

L- γ -Koinzidenzen (1 mm C vor Fensterzählrohr, 1 mm Sn vor Au-Zählrohr).

$$K^{I+II}(L; \gamma) = (2 N^I + N^{II}) \cdot 0,75 W_L \omega_\beta \bar{\varepsilon}_L e^{-\mu_L d_c} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}) \cdot \omega_\gamma \cdot \varepsilon_\gamma e^{-\mu_{0,35 \text{ MeV}} d_{\text{Sn}}} = 0,07 \text{ min}^{-1}$$

$$K^I(L; \gamma) = 2 N^I \bar{\alpha}_L W_L \omega_\beta \bar{\varepsilon}_L e^{-\mu_L d_c} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}) \cdot \omega_\gamma \bar{\varepsilon}_\gamma e^{-\mu_{0,35 \text{ MeV}} d_{\text{Sn}}} \sim 10^{-3} \text{ min}^{-1}$$

$$K^{I+II}(L; \gamma) = 0,07 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II}(L; \gamma) = (0,05 \pm 0,03) \text{ min}^{-1}$$

L-K γ -Koinzidenzen (1 mm C vor Fensterzählrohr, kein Absorber vor Au-Zählrohr).

$$K^{I+II}(K; L) = (N^I + N^{II}) W_K \omega_\gamma \bar{\varepsilon}_K 0,75 \cdot W_L \bar{\varepsilon}_L \omega_\beta e^{-\mu_L d_c} = 0,045 \text{ min}^{-1}$$

Gleichzeitig werden $K^{I+II}(L; \gamma)$ registriert

$$K^{I+II}(L; \gamma) = 0,08 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Zusammen: } K^{I+II}(L; K \gamma) = 0,125 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II}(L; K \gamma) = (0,14 \pm 0,04) \text{ min}^{-1}$$

β -L-Koinzidenzen (1 mm C vor einem Fensterzählrohr; ein anderes Zählrohr ohne Absorber).

$$K^{I+II}(L_K; e^-) = (2 N^I + N^{II}) 0,75 W_L \omega_\beta \bar{\varepsilon}_L e^{-\mu_L d_c} \bar{\alpha}_{\text{Tot}} \omega_\beta = 0,285 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{I+II}(L_{e^-}; e^-) = (2 N^I + N^{II}) \bar{\alpha}_L W_L \omega_\beta \bar{\varepsilon}_L e^{-\mu_L d_c} \omega_\beta = 0,130 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{III}(\beta^-; L_{e^-}) = N^{III} A_{\beta^-} \omega_\beta \bar{\alpha}_L^{IIIb} W_L \omega_\beta \bar{\varepsilon}_L e^{-\mu_L d_c} = 0,004 \text{ min}^{-1}$$

$$K^{I+II+III}(L; e^- \beta^-) = 0,42 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II+III}(L; e^- \beta^-) = (0,55 \pm 0,1) \text{ min}^{-1}$$

Die befriedigende Übereinstimmung der berechneten und experimentell bestimmten Werte beweist die Richtigkeit des dualen Zerfalls des Au^{196} , entsprechend dem Termschema der Fig. 27.

4. Untersuchung des 180 d-Au¹⁹⁵.

a) Bestimmung der Halbwertszeit und bisherige Untersuchungen des Au^{195} .

Die zeitliche Abfallskurve der bei der Reaktion $\text{Pt}(p, n)\text{Au}$ entstehenden radioaktiven Au-Isotope weist auf die Existenz eines sehr langsam zerfallenden Au-Isotops hin. Die während der Zeitdauer

von zirka 14 Monaten durchgeführte Bestimmung der Halbwertszeit dieses Isotops führt auf den Wert (vergl. Fig. 28):

$$T_{1/2} = (180 \pm 15) d$$

In einer im Verlauf unserer Messungen publizierten Untersuchung von WILKINSON¹⁸⁾ wird diese Periode dem Isotop Au^{195} zugeordnet. Die Möglichkeit der Herstellung dieser Periode aus Pt durch die (p, n) -Reaktion bestätigt diese Zuordnung.

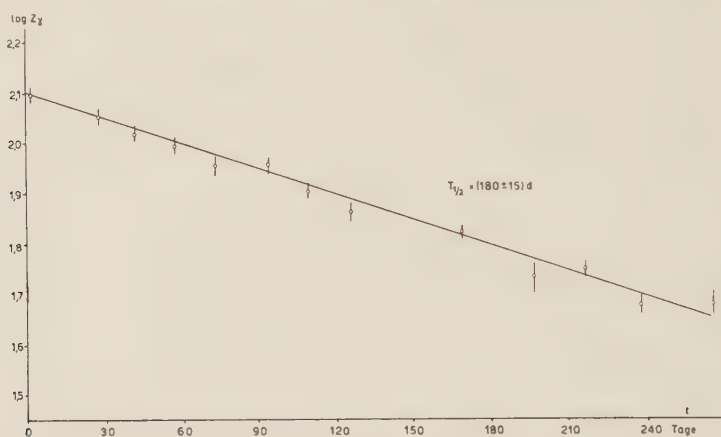


Fig. 28.
Bestimmung der Halbwertszeit des Au^{195} .

b) Die Elektronen- und γ -Strahlung des 180-d- Au^{195} .

Schon die Absorption der Elektronenstrahlung in Al zeigt, dass die beim Zerfall des Au^{195} emittierten Elektronen eine sehr geringe Energie besitzen (vergl. Fig. 30). In Bestätigung dieses Ergebnisses zeigt das Spektrogramm (Fig. 8) das Auftreten von 5 Elektronenlinien, die auf Grund ihrer Energiewerte als K -, L -, und M -Konversionselektronen zweier γ -Übergänge im Pt^{195} mit den Energien

$$h\nu_1 = (0,096 \pm 0,002) \text{ MeV}$$

$$h\nu_2 = (0,129 \pm 0,002) \text{ MeV}$$

identifiziert werden müssen (vergl. Tabelle 1). Die Konversion der 0,096-MeV- γ -Strahlung ist in der K -Schale des Pt energetisch möglich, jedoch entziehen sich die entsprechenden Konversionselektronen, ihrer geringen Energie (0,018 MeV) wegen, der Messung im Spektrographen. Aus den Energiedifferenzen der K -, L -, M -Konversionslinien und aus dem Fehlen eines β -Spektrums folgt, dass

die radioaktive Umwandlung des Au^{195} durch K -Einfang ins stabile Pt^{195} erfolgt. Der relativ grosse Anteil der Pt - K -Strahlung an der gesamten beim Zerfall des Au^{195} emittierten elektromagnetischen Strahlung (Fig. 29) bildet ebenfalls eine Bestätigung des K -Einfangs des Au^{195} .

Zur Bestimmung der relativen Intensität der Pt - K -Strahlung, der 0,096-MeV- und der 0,129-MeV- γ -Strahlung diente die mit einem Au -Zählrohr gemessene Absorption in Sn (Fig. 29). Um eine eindeutige Zerlegung der Sn -Absorptionskurve in ihre Komponenten

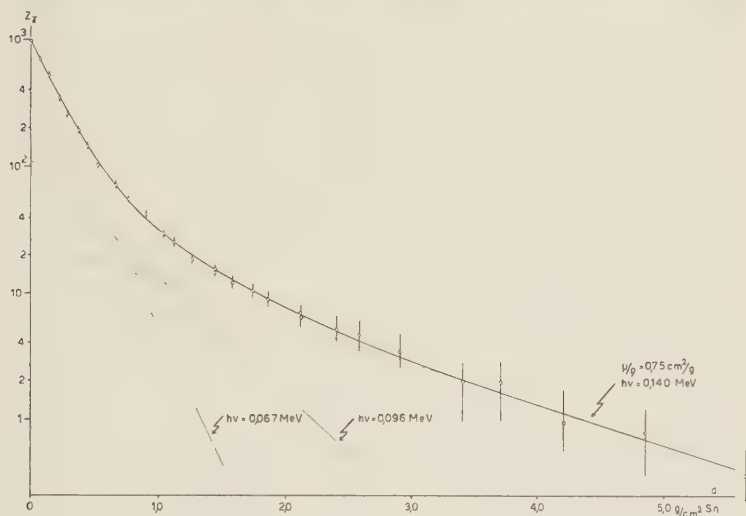


Fig. 29.

Absorption der γ -Strahlung des Au^{195} (Sn -Absorber).

zu ermöglichen, wurde mit derselben Anordnung der Sn -Absorptionskoeffizient der 0,093-MeV- γ -Strahlung des Ag^{107} -Isomers⁴⁶⁾ experimentell bestimmt und daraus die Absorption der Pt - K -Strahlung und der 0,096- und der 0,129-MeV- γ -Strahlung in Sn durch Extrapolation erhalten. Mit Berücksichtigung der effektiven Zählrohrsensibilitäten wird das Intensitätsverhältnis:

$$I_K : I_{0,096 \text{ MeV}} : I_{0,129 \text{ MeV}} = 100 : 14,4 : 3,7. \quad (42)$$

Im Gegensatz zu den Wilkinson'schen Messungen zeigt die Absorption der γ -Strahlung mit Pb , dass beim Zerfall des Au^{195} praktisch keine energiereiche γ -Quanten emittiert werden (weniger als 1% der Pt - K -Strahlung).

Die mit einem Fensterzählrohr gemessene Al-Absorptionskurve (Fig. 30) kann nach Abzug des γ -Untergrundes in zwei Komponenten zerlegt werden, die der Absorption der weichen Elektronenstrahlung und der L -Strahlung des Pt (zirka 0,01 MeV) entsprechen. Die mit C-Absorbern gemessene Absorptionskurve zeigt das gleiche Resultat. Die Intensität der beim Zerfall des Au^{195} emittierten Pt- L -Strahlung weist ebenfalls auf einen Zerfall dieses Isotops durch K -Einfang hin.

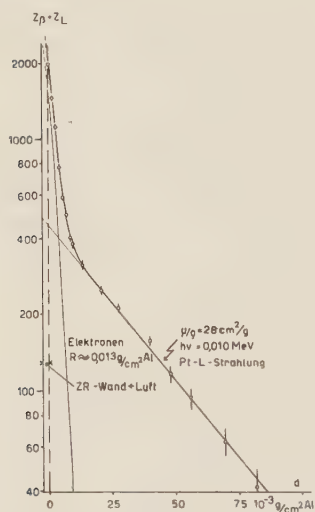


Fig. 30.

Absorption der Elektronen- und L -Röntgenstrahlung des Au^{195} (Al-Absorber).



Fig. 31.

Absorption der β - γ -Koinzidenzen des Au^{195} . (Al-Absorber vor dem Fensterzählrohr).

c) Koinzidenzabsorptionsmessungen und Termschema der Au^{195} - Pt^{195} -Umwandlung.

Die Anregung der beiden konvertierten γ -Übergänge durch K -Einfang wird durch die Absorption der elektromagnetischen Strahlung bei β - γ -Koinzidenzen (Fig. 32) und γ - γ -Koinzidenzen (Fig. 33) sichergestellt. Das Absorptionsvermögen in Sn der durch das Au-Zählrohr nachgewiesenen Strahlung bei den e^- - γ - und L - γ -Koinzidenzmessungen (C-Absorber vor Fensterzählrohr!) (Fig. 32) entspricht einer Strahlung von 0,065 MeV Quantenenergie, d. h. der Pt- K -Strahlung: Sowohl die Elektronenstrahlung als auch die Pt- L -Strahlung koinzidieren mit der Pt- K -Strahlung. Weiterhin koinziiert die γ -Strahlung mit einer elektromagnetischen Strahlung, deren Absorption in Sn der Pt- K -Strahlung entspricht (Fig. 33).

Entscheidend zur Bestimmung des Termschemas der Au^{195} -Umwandlung ist die Frage, ob die beiden konvertierten γ -Übergänge kaskadenartig aufeinander folgen.

Mit zwei in Koinzidenz geschalteten Fensterzählrohren wurde die Al-Absorptionskurve der mit dieser Anordnung registrierten Koinzidenzen gemessen, wobei sich nur vor einem der beiden Zählrohre ein Al-Absorber befand (Fig. 31). Diese Absorptionskurve zeigt deutlich, dass der eine Koinzidenzpartner die Pt-L-Strahlung, der

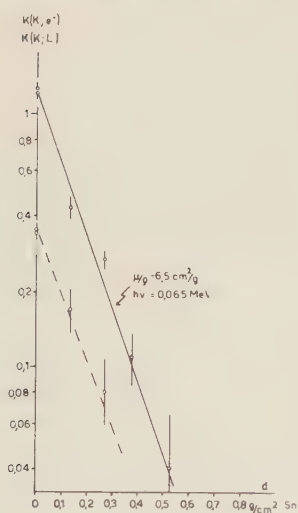


Fig. 32.

Absorption der K - β -Koinzidenzen (ausgezogene Kurve) und der K - L -Koinzidenzen (strichpunktierte Kurve) des Au^{195} (Sn-Absorber vor γ -Zählrohr).

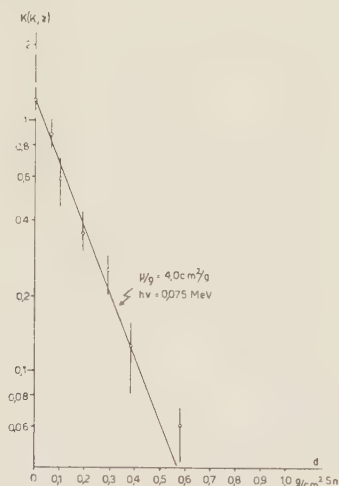


Fig. 33.

Absorption der K - γ -Koinzidenzen des Au^{195} (Sn-Absorber vor einem γ -Zählrohr).

andere die weiche Elektronenstrahlung ist. Es sind keine Anzeichen von e^-e^- -Koinzidenzen vorhanden. (Durch Absorption der Elektronenstrahlung vor einem Zählrohr wird die Anzahl der registrierten Koinzidenzen genau auf die Hälfte vermindert. (Vergl. Fig. 34.)) Die Absorption der Elektronenstrahlung durch Papier und die Absorption der Pt-L-Strahlung durch sehr dünne Au-Folien (2 mg cm^{-2}) zeigt ebenfalls, dass praktisch nur e^-L -Koinzidenzen auftreten.

Die kaskadenartige Aufeinanderfolge des 0,096-MeV- und des 0,129-MeV- γ -Überganges würde bedingen, dass mit dem verwendeten Präparat zirka 10 e^-e^- -Koinzidenzen gemessen würden (rohe Abschätzung auf Grund des Intensitätsverhältnisses der Kon-

versionslinien der beiden Übergänge). Die Messung ergibt den folgenden Wert

$$K(e^-; e^-) = (0,04 \pm 0,02) \text{ min}^{-1}$$

der wahrscheinlich den Koinzidenzen der beim K -Einfang emittierten Augerelektronen und den Konversionselektronen zuzuschreiben ist.

Die Reichweite der Elektronenstrahlung in Al, die sich aus der Absorption der e^-L -Koinzidenzen mit Al-Absorbern ergibt, entspricht der Energie der Konversionslinien von zirka 0,1 MeV

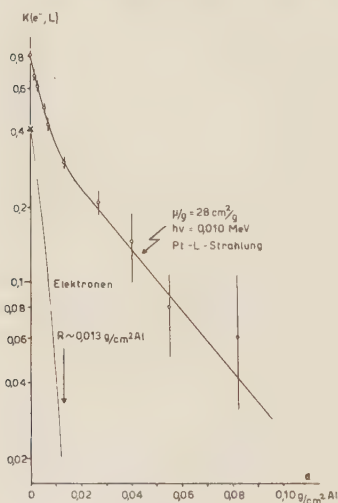


Fig. 34.

Absorption der β - L -Koinzidenzen des Au^{195} (Al-Absorber vor einem Fensterzählrohr).

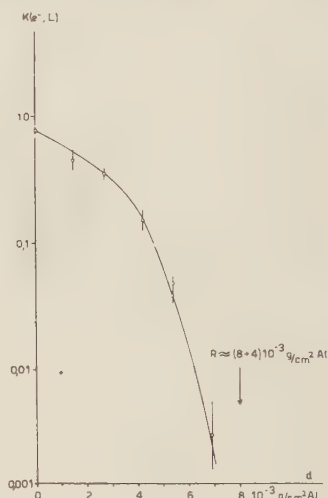


Fig. 35.

Absorption der β - L -Koinzidenzen des Au^{195} (Al-Absorber vor beiden Fensterzählrohren).

Auf Grund dieser Koinzidenz- und Absorptionsmessungen muss der radioaktive Zerfall des Au^{195} nach dem Schema der Fig. 36 erfolgen.

d) Verifikation des Au^{195} -Umwandlungsschemas und Bestimmung der Konversionsverhältnisse.

Die Berechnung der Koinzidenzen, die auf Grund des angenommenen Termschemas der Fig. 36 zu erwarten sind, erfordert die Kenntnis der charakteristischen Zerfallsgrößen. Da die weichen Konversionselektronen in der Luft und in den Zählrohrfolien in nicht genau berechenbarer Weise absorbiert werden, soll ausser den Spektrometermessungen zur Berechnung der charakteristischen Zerfallsgrößen nur die Messung der K - und γ -Strahlung dienen.

Der Index I bezeichnet die Möglichkeit des Zerfalls auf das 0,096-MeV-Niveau, die Umwandlung über das 0,129-MeV-Niveau wird mit II bezeichnet. Aus der relativen Intensität der Konversionslinien folgt (vergl. Tabelle 1):

$$\bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} = ? \quad (43)$$

$$\bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} = 0,86 (\bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} + \bar{\alpha}_M^{\text{Ib}}) \quad (44)$$

$$\bar{\alpha}_K^{\text{IIb}} = 0,82 \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{IIb}} \quad (45)$$

$$\bar{\alpha}_L^{\text{IIb}} = 0,15 \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{IIb}} \quad (46)$$

$$\frac{N^{\text{I}} \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}}}{N^{\text{II}} \bar{\alpha}_L^{\text{IIb}}} = 13,7 \pm 1,0 \quad (47)$$

Die mit einem Au-Zählrohr gemessenen Stosszahlen der Pt-K- und γ -Strahlung berechnen sich zu:

$$K\text{-Strahlung: } Z_K^{\text{I} + \text{II}} = [N^{\text{I}}(1 + \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}}) + N^{\text{II}}(1 + \bar{\alpha}_K^{\text{IIb}})] W_K \omega_\gamma \bar{\varepsilon}_K \quad (48)$$

$$0,96 \text{ MeV-}\gamma\text{-Strahlung: } Z_\gamma^{\text{Ib}} = N^{\text{I}}(1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}}) \omega_\gamma \bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{Ib}} \quad (49)$$

$$0,129 \text{ MeV-}\gamma\text{-Strahlung: } Z_\gamma^{\text{IIb}} = N^{\text{II}}(1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{IIb}}) \omega_\gamma \bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{IIb}} \quad (50)$$

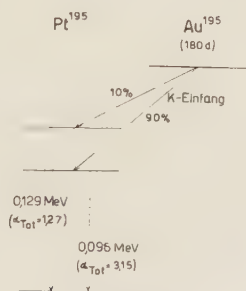


Fig. 36.

Termschema der Umwandlung des Au^{195} .

Die unter Verwendung des Intensitätsverhältnisses (42) erhaltenen experimentellen Werte sind:

$$Z_K^{\text{I} + \text{II}} = (1090 \pm 20) \text{ min}^{-1} \quad (51)$$

$$Z_\gamma^{\text{Ib}} = (157 \pm 10) \text{ min}^{-1} \quad (52)$$

$$Z_\gamma^{\text{IIb}} = (40 \pm 6) \text{ min}^{-1} \quad (53)$$

Mit zwei in Koinzidenz geschalteten Au-Zählrohren werden die folgenden Koinzidenzen gemessen:

$$\left. \begin{aligned} K^I(K; \gamma) &= 2 N^I W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{Ib}}) \bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{Ib}} \omega_\gamma \\ K^{\text{II}}(K; \gamma) &= 2 N^{\text{II}} W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{IIb}}) \bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{IIb}} \omega_\gamma \\ K^I(K; K) &= 2 N^I W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma \\ K^{\text{II}}(K; K) &= 2 N^{\text{II}} W_K \omega_\gamma \bar{\varepsilon}_K \bar{\alpha}_K^{\text{IIb}} \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

deren Summe:

$$\begin{aligned} K^{I+\text{II}}(K; K\gamma) &= 2 N^I W_K \omega_\gamma^2 [\bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{Ib}} (1 - \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} - \bar{\alpha}_{\text{LM}}^{\text{Ib}}) + W_K \bar{\varepsilon}_K \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}}] \\ &+ 2 N^{\text{II}} W_K \omega_\gamma^2 [\bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{IIb}} (1 - \bar{\alpha}_{\text{Tot}}^{\text{IIb}}) + W_K \bar{\varepsilon}_K \bar{\alpha}_K^{\text{IIb}}] \end{aligned} \quad (55)$$

für das vermessene Au¹⁹⁵-Präparat sehr sorgfältig experimentell bestimmt wurde:

$$K^{I+\text{II}}(K; K\gamma) = (0,36 \pm 0,02) \text{ min}^{-1} \quad (56)$$

Die Gleichungen (44)–(56) können im folgenden Gleichungssystem zusammengefasst werden:

$$Z_K^{I+\text{II}} = 1090 = W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma \left[N^I (1 + \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}}) + N^{\text{II}} \left(1 + 0,40 \frac{N^I}{N^{\text{II}}} \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} \right) \right] \quad (57)$$

$$Z_\gamma^{\text{Ib}} = 157 = N^I (1 - \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} - 1,16 \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}}) \bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{Ib}} \omega_\gamma \quad (58)$$

$$Z_\gamma^{\text{IIb}} = 40 = N^{\text{II}} \left(1 + 0,49 \frac{N^I}{N^{\text{II}}} \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} \right) \bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{IIb}} \omega_\gamma \quad (59)$$

$$\begin{aligned} K^{I+\text{II}}(K; K\gamma) &= 0,36 = 2 N^I W_K \omega_\gamma^2 [\bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{Ib}} (1 - \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} - 1,16 \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}}) + W_K \bar{\varepsilon}_K \bar{\alpha}_K^{\text{Ib}}] \\ &+ 2 N^{\text{II}} W_K \omega_\gamma^2 \left[\bar{\varepsilon}_\gamma^{\text{IIb}} \left(1 + 0,49 \frac{N^I}{N^{\text{II}}} \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} \right) + W_K \bar{\varepsilon}_K 0,40 \frac{N^I}{N^{\text{II}}} \bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

Durch diese vier Gleichungen werden die 4 Unbekannten N^I , N^{II} , $\bar{\alpha}_K^{\text{Ib}}$, $\bar{\alpha}_L^{\text{Ib}}$ bestimmt. Die etwas langwierigen Rechnungen ergeben die folgenden Werte:

$$N^I = (1,9 \pm 0,2) 10^6 \text{ min}^{-1} \quad (61)$$

$$N^{\text{II}} = (0,22 \pm 0,03) 10^6 \text{ min}^{-1} \quad (62)$$

$$\bar{\alpha}_K^{\text{Ib}} = (0,6 \pm 0,1) \quad (63)$$

$$\bar{\alpha}_L^{\text{Ib}} = 0,13 \pm 0,01 \quad (64)$$

Die Werte von N^I und N^{II} ergeben also, dass 90% aller Zerfallsprozesse über das 0,096-MeV-Niveau des Pt^{195} führen, während das 0,129-MeV-Niveau nur in 10% aller Zerfallsprozesse angeregt wird.

Die Konversionsverhältnisse der beiden γ -Übergänge werden damit:

$$\begin{array}{ll} \text{Übergang Ib, } h\nu_1 = 0,096 \text{ MeV} & \begin{array}{l} \bar{\alpha}_K^{Ib} = 0,61 \pm 0,1 \\ \bar{\alpha}_L^{Ib} = 0,13 \pm 0,01 \\ \bar{\alpha}_M^{Ib} = 0,02 \pm 0,005 \end{array} \\ \text{Übergang IIb, } h\nu_2 = 0,129 \text{ MeV} & \begin{array}{l} \bar{\alpha}_K^{IIb} = 0,46 \pm 0,05 \\ \bar{\alpha}_L^{IIb} = 0,084 \pm 0,01 \\ \bar{\alpha}_M^{IIb} = 0,017 \pm 0,006 \end{array} \end{array}$$

Die Kenntnis dieser Größen erlaubt uns die Berechnung der Koinzidenzmessungen:

$K-e^-$ -Koinzidenzen. (Au-Zählrohr ohne Absorber; Fensterzählrohr ohne Absorber.)

$$\begin{aligned} K^{I+II}(K; e^-) &= N^I W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma A_{e_{LM}}^{Ib} (\bar{\alpha}_L^{Ib} + \bar{\alpha}_M^{Ib}) \omega_\beta + N^{II} W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma \cdot \\ &\cdot \left(A_{e_K}^{IIb} \cdot 2 \bar{\alpha}_K^{IIb} + A_{e_{LM}}^{IIb} (\bar{\alpha}_L^{IIb} + \bar{\alpha}_M^{IIb}) \right) \omega_\beta \end{aligned}$$

Die Faktoren A_{e-} für die Absorption der weichen Elektronenstrahlung im Präparat, in der Luft und in der Zählrohrfolie wurden nach den Angaben von KOHLRAUSCH⁴⁷⁾ und auf Grund eigener Messungen abgeschätzt:

$$K^{I+II}(K; e^-) = 2,8 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II}(K; e^-) = (3,1 \pm 0,2) \text{ min}^{-1}$$

Mit dem Fensterzählrohr in der Standardanordnung wird die Anzahl der registrierten Elektronen zu:

$$\begin{aligned} Z_e^{I+II} - N^I \left[A_{e_{LM}}^{Ib} \cdot (\bar{\alpha}_L^{Ib} + \bar{\alpha}_M^{Ib}) \right] \omega_\beta + N^{II} \left(A_{e_K}^{IIb} \bar{\alpha}_K^{IIb} + A_{e_{LM}}^{IIb} (\bar{\alpha}_L^{IIb} + \bar{\alpha}_M^{IIb}) \right) \omega_\beta \\ = 10800 \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

berechnet.

$$\text{Gemessen: } Z_e^{I+II} = (10100 \pm 100) \text{ min}^{-1}$$

L - K γ -Koinzidenzen: (Au-Zählrohr ohne Absorber; 0,02 g cm² Papier vor Fensterzählrohr)

$$\begin{aligned} K^{I+II}(L; \gamma K) &= 2(N^I + N^{II}) W_K \bar{\varepsilon}_K \omega_\gamma 0,75 W_L \varepsilon_L \omega_\beta e^{-\mu_L d_{\text{Pap}}} \\ &= 0,56 \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II}(L; \gamma K) = (0,6 \pm 0,05) \text{ min}^{-1}$$

Die Anzahl der mit einem Fensterzählrohr gemessenen Pt-*L*-Röntgenquanten wird:

$$Z_L^{I+II} = [0,75 (N^I + N^{II}) + 0,75 (N^I \bar{\alpha}_K^{Ib} + N^{II} \bar{\alpha}_K^{IIb}) + N^I \bar{\alpha}_L^{Ib} + N^{II} \bar{\alpha}_L^{IIb}] \bar{\varepsilon}_L \cdot \omega_\beta e^{-\mu_L d}$$

$$Z_L^{I+II} = 1050 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } Z_L^{I+II} = (1100 \pm 30) \text{ min}^{-1}$$

e-L-Koinzidenzen: (Fensterzählrohr I ohne Absorber; Fensterzählrohr II 0,02 g/cm² Papier)

$$\begin{aligned} K^{I+II}(e^-; L) &= N^I [0,75 (\bar{\alpha}_L^{Ib} + \bar{\alpha}_M^{Ib}) + \bar{\alpha}_L^{Ib}] A_{e_{LM}}^{Ib} \omega_\beta W_L e^{-\mu_L d} \bar{\varepsilon}_L \omega_\beta \\ &+ N^{II} [0,75 (A_{e_K}^{IIb} \bar{\alpha}_K^{IIb} + A_{e_M}^{IIb} \bar{\alpha}_M^{IIb}) + 1,75 A_{e_L} \alpha_L^{IIb}] W_L e^{-\mu_L d} \bar{\varepsilon}_L \omega_\beta^2 \\ &= 2,4 \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II}(e^-; L) = (2,2 \pm 0,2) \text{ min}^{-1}$$

L-L-Koinzidenzen: (Vor beiden Fensterzählrohren 0,02 g/cm² Papier)

$$K^{I+II}(L; L) = [N^I (0,75 \bar{\alpha}_K^{Ib} + \bar{\alpha}_L^{Ib}) + N^{II} (0,75 \bar{\alpha}_K^{IIb} + \bar{\alpha}_L^{IIb})] W_L^2 \bar{\varepsilon}_L^2 \omega_\beta^2 e^{-2\mu_L d} = 0,09 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Gemessen: } K^{I+II}(L; L) = (0,1 \pm 0,03) \text{ min}^{-1}$$

Die berechneten und experimentell bestimmten Koinzidenzwerte stimmen befriedigend überein, was dem Umwandlungsschema des Au¹⁹⁵ nach Fig. 36 einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit verleiht.

IV. Vergleich der gemessenen Konversionskoeffizienten mit der Theorie.

1. *K-Einfang und Konversionswahrscheinlichkeit bei Kern- γ -Übergängen.*

Die *K*-Konversionswahrscheinlichkeit eines γ -Übergangs, der durch *K*-Einfang angeregt wurde, wird davon abhängen, ob der γ -Übergang der Auffüllung der *K*-Schale zuvorkommt, oder ob die γ -Quanten zeitlich nach der *K*-Strahlung emittiert werden. Das Verhältnis der Lebensdauern bzw. der Niveaubreiten des *K*-Niveaus des Pt-Atoms $\Gamma_X^K + \Gamma_A^K$ und der γ -Niveaubreiten $\Gamma_\gamma + \Gamma_e$ ist also dafür massgebend, ob die übliche Theorie der Konversion, die sich natürlich auf eine zum Zeitpunkt des γ -Überganges vollständige

Elektronenhülle des Atoms bezieht, im Falle der Anregung durch K -Einfang anwendbar ist.

Nach der (unrelativistischen) Theorie der Röntgenniveaubreiten von RAMBERG und RICHTMYER¹³⁾ und der relativistischen Theorie von MASSEY und BURHOP¹⁴⁾ ist die Strahlungs- und Augerbreite für Übergänge in die K -Schale des Au:

$$\Gamma_X^K = 66,38 \text{ eV}$$

$$\Gamma_A^K \cong 4,0 \text{ eV}$$

Die mittlere Lebensdauer des in der K -Schale ionisierten Au- bzw. Pt-Atoms wird damit

$$\tau_K = \frac{h}{\Gamma_X^K + \Gamma_A^K} \cong 10^{-17} \text{ sec.}$$

Dieselbe mittlere Lebensdauer ergibt sich auch aus den beobachteten Halbwertsbreiten der K -Röntgenlinien.

Nach einer Abschätzung von BETHE⁵⁴⁾ ist die Größenordnung der Strahlungsbreiten angeregter Kernniveaus bei schweren Kernen

$$\Gamma \sim 0,001 \text{ eV}$$

Dies gilt für Anregungsenergien von zirka 1 MeV. Für kleinere γ -Energien und höhere Multipolübergänge sind die Niveaubreiten noch kleiner.

Die mittlere Lebensdauer eines solchen Anregungsniveaus wird somit

$$\tau_\gamma = \frac{h}{\Gamma_\gamma} \sim 5 \cdot 10^{-13} \text{ sec} \gg \tau_K$$

Damit ist gezeigt, dass in den vorliegenden Zerfallsprozessen die Anregung eines Kernniveaus durch K -Einfang praktisch keinen Einfluss auf die Konversionswahrscheinlichkeit der nachfolgenden γ -Übergänge ausübt.

2. Konversion und Multipolcharakter der γ -Übergänge.

In Tabelle 3 sind die experimentell bestimmten K - und L -Konversionskoeffizienten der beim Zerfall der vier Au-Isotope auftretenden γ -Übergänge zusammengestellt.

In Fig. 37 sind die gemessenen Konversionskoeffizienten α_K für die K -Schale in Funktion der Energie $h\nu$ der einzelnen γ -Übergänge eingezeichnet. Der theoretisch berechnete Verlauf von $\alpha_K(h\nu)$ für $Z = 78$ (Pt) ist für die verschiedenen Multipolübergänge aus den eingezeichneten Kurven ersichtlich. Die Werte α_K für elektrische Dipolstrahlung wurden nach den von HULME³⁾⁴⁾ angegebenen Formeln für $Z = 78$ berechnet⁸⁾. Die Theorie der Konversionskoeffizienten α_K für elektrische Quadrupolübergänge wurde von TAYLOR

und MOTT⁵⁾ entwickelt und numerische Angaben von HULME, MOTT, OPPENHEIMER und TAYLOR⁹⁾ gemacht. Die Konversion magnetischer Dipolstrahlung wurde nach FISK und TAYLOR⁸⁾ berechnet.

Tabelle 3.
Konversion und Multipolcharakter der γ -Übergänge.

Energie des γ - Übergangs	Kern	Kon- ver- sion	Konversions- verhältnis $\bar{\alpha} = \frac{\Gamma_{e^-}}{\Gamma_{\gamma} + \Gamma_{e^-}^{\text{Tot}}}$	Konversions- koeffizient $\alpha = \frac{\Gamma_{e^-}}{\Gamma_{\gamma}}$	Multipolcharak- ter des γ -Über- gangs
0,096 MeV	Pt ¹⁹⁵	K	$\bar{\alpha}_K = 0,61$	$\alpha_K = 2,5 \pm 1,0$	el. Quadrupol + mag. Dipol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,13$	$\alpha_L = 0,54 \pm 0,10$	
		M	$\bar{\alpha}_M = 0,02$	$\alpha_M = 0,08 \pm 0,03$	
0,129 MeV	Pt ¹⁹⁵	K	$\bar{\alpha}_K = 0,46$	$\alpha_K = 1,05 \pm 0,3$	el. Quadrupol + mag. Dipol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,084$	$\alpha_L = 0,19 \pm 0,05$	
		M	$\bar{\alpha}_M = 0,017$	$\alpha_M = 0,039 \pm 0,008$	
0,175 MeV	Hg ¹⁹⁶	K	$\bar{\alpha}_K = 0,10$	$\alpha_K = 0,115 \pm 0,03$	el. Dipol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,03$	$\alpha_L = 0,034 \pm 0,01$	
0,291 MeV	Pt ¹⁹⁴	K	$\bar{\alpha}_K = 0,034$	$\alpha_K = 0,036 \pm 0,005$	el. Dipol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,017$	$\alpha_L = 0,018 \pm 0,007$	
0,328 MeV	Pt ¹⁹⁴	K	$\bar{\alpha}_K = 0,010$	$\alpha_K = 0,12 \pm 0,01$	el. Quadrupol + mag. Dipol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,057$	$\alpha_L = 0,068 \pm 0,01$	
		M	$\bar{\alpha}_M = 0,008$	$\alpha_M = 0,009 \pm 0,004$	
0,330 MeV	Pt ¹⁹⁶	K	$\bar{\alpha}_K = 0,050$	$\alpha_K = 0,054 \pm 0,006$	el. Quadrupol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,030$	$\alpha_L = 0,033 \pm 0,004$	
0,358 MeV	Pt ¹⁹⁶	K	$\bar{\alpha}_K = 0,050$	$\alpha_K = 0,054 \pm 0,006$	el. Quadrupol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,030$	$\alpha_L = 0,033 \pm 0,004$	
0,411 MeV	Hg ¹⁹⁸	K	$\bar{\alpha}_K = 0,028$	$\alpha_K = 0,029 \pm 0,007$	el. Quadrupol
		L	$\bar{\alpha}_L = 0,0125$	$\alpha_L = 0,013 \pm 0,003$	
		M	$\bar{\alpha}_M = 0,003$	$\alpha_M = 0,003 \pm 0,002$	
1,48 MeV	Pt ¹⁹⁴	K	$\bar{\alpha}_K = 0,0026$	$\alpha_K = 0,0026 \pm 0,0003$	el. Quadrupol

Die experimentell bestimmten Werte der Konversionskoeffizienten für die L-Schale sind in Fig. 38 eingetragen. Zum Vergleich sind die theoretisch berechneten Kurven von $\alpha_L(h\nu)$ für elektrische Dipol- und Quadrupolstrahlung angegeben.

Die Kurve für elektrische Dipolstrahlung wurde nach FISK⁷⁾ für $Z=78$ berechnet. Da die Theorie von FISK nur die Konversion im L_I -Niveaus berücksichtigt, wurde der geringe Anteil der Konversion in den übrigen L-Niveaus (13%) unter Verwendung des von HULME⁴⁾ für harte γ -Strahlung angegebenen Verhältnisses:

$$\alpha_{L_I} : \alpha_{L_{II}} : \alpha_{L_{III}} = 1 : 0,086 : 0,044$$

berücksichtigt.

Die L -Konversion elektrischer Quadrupolstrahlung wurde von FISK nur bis zu Gammaenergien von 0,1 MeV berechnet (ausgezo-
gener Teil der Kurve); der Verlauf von α_L für Quadrupolübergänge
grösserer Energie wurde entsprechend dem Verlauf der K -Konver-
sion bei Quadrupolstrahlung extrapoliert (gestrichelter Teil der
Kurve).

Aus dem Vergleich der gemessenen Konversionskoeffizienten mit
den theoretischen Kurven kann auf den Multipolcharakter der
 γ -Übergänge geschlossen werden (Vergl. letzte Kolonne Tabelle 3).

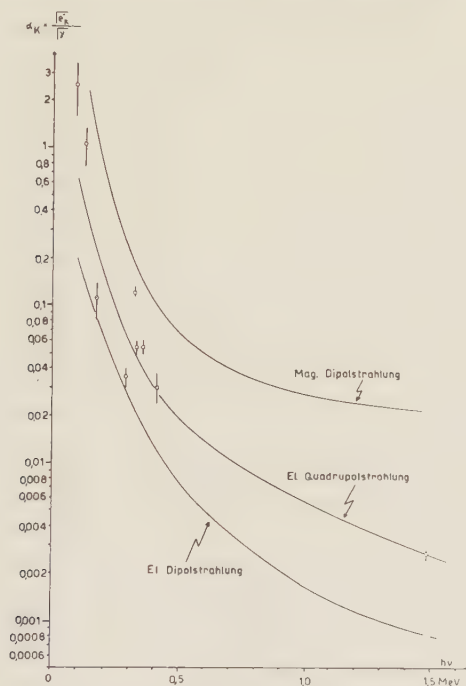


Fig. 37.

Koeffizient der inneren Konversion von γ -Strahlung in der K -Schale für $Z = 78$ (Pt).

Die Konversion sowohl in der K -Schale als auch in der L -Schale
bei den γ -Übergängen mit den Energiewerten $h\nu = 0,175$ MeV (Hg^{196})
und $h\nu = 0,291$ MeV (Pt^{194}) lässt darauf schliessen, dass bei diesen
beiden Übergängen im wesentlichen das Feld eines elektrischen
Dipols emittiert wird. Die experimentellen Werte sind etwa 20%
grösser als die theoretisch berechneten Werte; diese Diskrepanz
kann in Unzulänglichkeiten der Theorie ihre Ursache haben oder
aber eher dadurch bedingt sein, dass bei diesen Übergängen noch

höhere elektrische oder magnetische Multipolstrahlungen in geringer Intensität emittiert werden.

Die experimentell bestimmten K - und L -Konversionskoeffizienten der übrigen γ -Übergänge liegen zwischen den Kurven für elektrische Quadrupolstrahlung und magnetischer Dipolstrahlung; je nach dem relativen Anteil der Intensitäten dieser beiden Multipolstrahlungen näher bei der einen oder andern Kurve.

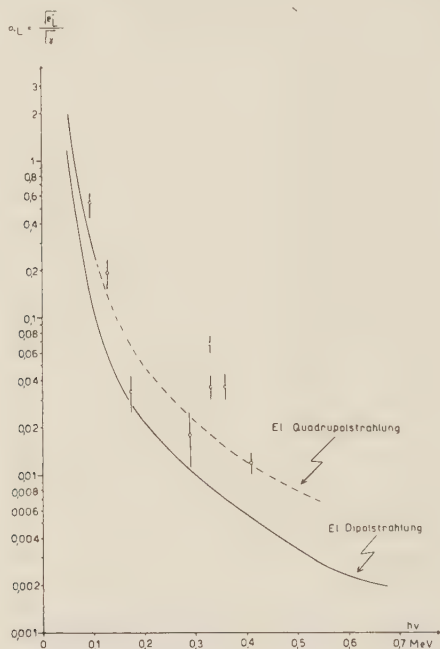


Fig. 38.

Koeffizient der inneren Konversion von γ -Strahlung in der L -Schale für $Z = 78$ (Pt).

Nach der Konversion wären demnach die Übergänge mit den γ -Energien $h\nu = 0,330$ MeV (Pt^{196}), $h\nu = 0,358$ MeV (Pt^{196}), $h\nu = 0,411$ MeV (Hg^{198}) und $h\nu = 1,48$ MeV (Pt^{194}) praktisch reine elektrische Quadrupolübergänge, während bei den γ -Übergängen mit den Energiewerten $h\nu = 0,096$ MeV (Pt^{195}), $h\nu = 0,129$ MeV (Pt^{195}) und $h\nu = 0,328$ MeV (Pt^{194}) die Anteile elektrischer Quadrupol- und magnetischer Dipolstrahlung von der gleichen Grössenordnung sind.

Der γ -Übergang zwischen zwei Kernniveaus ist dann vorwiegend ein elektrischer Dipolübergang, wenn die beiden Kernniveaus verschiedene Parität besitzen und wenn sich ihre Drehimpulsquanten-

zahlen J um $\Delta J = \pm 1$ oder $\Delta J = 0$ *) unterscheiden. Bei einem solchen Übergang ist im allgemeinen der Beitrag magnetischer oder höherer elektrischer Multipolübergänge gegenüber der elektrischen Dipolstrahlung vernachlässigbar klein, sofern der Kern nicht spezielle Symmetrieeigenschaften aufweist. Bei schwereren Kernen kann durch ein Zusammenfallen der Massen- und Ladungszentren eine Verkleinerung des Dipolmomentes auftreten, so dass elektrische Dipol- und Quadrupolstrahlung vergleichbare Intensitäten haben können. Es ist also zu erwarten, dass die Konversionskoeffizienten solcher Übergänge etwas grösser sind, als der Berechnung für reine Dipolstrahlung entspricht. Dies stimmt mit den vorliegenden Ergebnissen überein.

Die Emission elektrischer Quadrupolstrahlung ist mit keiner Paritätsänderung des Anfangs- und Endniveaus verbunden und tritt als Hauptübergang auf bei einem Drehimpulsunterschied der beiden Kernniveaus von $\Delta J = \pm 2$, $\Delta J = \pm 1$ und $\Delta J = 0$, wobei die folgenden Übergänge verboten sind: $0 \rightarrow 0$, $0 \leftarrow 1$, $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$. Bei den Übergängen ($\Delta J = 0, \pm 1$) kann ausser höheren elektrischen und magnetischen Multipolübergängen sehr geringer Intensität noch magnetische Dipolstrahlung emittiert werden. Da die magnetischen Multipole nicht nur von der Ladung und Bewegung der Kernpartikel abhängen, sondern auch durch die Spineigenschaften der Kernmaterie bedingt sind, ist keine Reduktion des magnetischen Dipolmomentes, analog wie beim elektrischen Dipolmoment zu erwarten. Bei solchen Übergängen ist daher im allgemeinen die Intensität der elektrischen Quadrupolstrahlung und der magnetischen Dipolstrahlung von der gleichen Grössenordnung.

Wie FISK und TAYLOR⁸⁾ gezeigt haben, ist die Konversionswahrscheinlichkeit magnetischer Multipolstrahlung bedeutend grösser, als die Konversion bei entsprechender elektrischer Multipolstrahlung: Für magnetische Dipolstrahlung ist der Konversionskoeffizient rund viermal grösser als für elektrische Quadrupolstrahlung (siehe Fig. 37). Bei Übergängen ohne Paritätsänderung mit $\Delta J = 0, \pm 1$ hängt der Konversionskoeffizient demnach ausser von der Energie noch stark vom Mischungsverhältnis der elektrischen Quadrupol- und der magnetischen Dipolstrahlung ab; der experimentell gemessene Konversionskoeffizient solcher Übergänge wird zwischen den beiden Extremen liegen.

HULME et al.⁹⁾, sowie TAYLOR⁵³⁾ kommen auf Grund der Annahme, dass das bei einem γ -Übergang emittierte Strahlungsfeld durch die Strahlung eines sich in einem Coulombfeld bewegenden

*) Übergänge $0 \rightarrow 0$ sind verboten.

Protons beschrieben werden kann, zum Schluss, dass bei Mischung von elektrischer Quadrupol- und magnetischer Dipolstrahlung ($\Delta J = 0, \pm 1$ -Übergänge!) der Anteil von magnetischer Dipolstrahlung bei kleinen γ -Energien sehr viel grösser ist als bei grossen γ -Energien. Die experimentell bestimmten K - und L -Konversionskoeffizienten für die beim Zerfall der Au-Isotope emittierten γ -Strahlen der Energie 0,096 MeV, 0,129 MeV, 0,328 MeV, 0,330 MeV, 0,358 MeV und 1,48 MeV scheinen dies zu bestätigen.

c) Innere Konversion der K -Röntgenstrahlung bei Pt.

Die beim Zerfall des Au¹⁹⁴ und Au¹⁹⁶ bestimmten Konversionskoeffizienten der Pt- K -Strahlung sind in Tabelle 4 eingetragen.

Tabelle 4.
Konversion der K -Röntgenstrahlung des Pt.

Elektronen- übergänge	Energie der emittierten Auger- elektronen	Messung beim Zer- fall des	Koeff. d. innern Konversion der K -Strahlung		
			$\bar{a}_{K_{\text{exp}}}$	$a_{K_{\text{exp}}} = \frac{\bar{a}_{K_{\text{exp}}}}{1 - \bar{a}_{K_{\text{exp}}}}$	$a_{K_{\text{theor}}}$
$LL \rightarrow K \infty$	0,051 MeV	Au ¹⁹⁴	0,026	0,028 \pm 0,005	0,0313
		Au ¹⁹⁶	0,028	0,030 \pm 0,006	
$LM \rightarrow K \infty$	0,061 MeV	Au ¹⁹⁴	0,019	0,029 \pm 0,006	0,0173
		Au ¹⁹⁶	0,017	0,018 \pm 0,006	
$LN \rightarrow K \infty$	0,063 MeV	Au ¹⁹⁴	0,0065	0,0070 \pm 0,005	0,004
		Au ¹⁹⁶	0,006	0,0065 \pm 0,005	
$MM \rightarrow K \infty$	0,071 MeV	Au ¹⁹⁴	0,0065	0,0070 \pm 0,004	0,003
		Au ¹⁹⁶	0,007	0,0075 \pm 0,005	

Die Berechnung von $a_{K_{\text{theor}}}$ erfolgte auf Grund der relativistischen Theorie des Augereffektes, die von MASSEY und BURHOP für das Au-Atom durchgeführt wurde. Da die Z -Abhängigkeit von $a_{K_{\text{theor}}}$ bei grossen Z -Werten nicht ausgeprägt ist, können die für Au ($Z = 79$) gültigen Resultate ohne weiteres auf den hier vorliegenden Fall des Pt ($Z = 78$) übertragen werden.

Die relativistische Theorie von MASSEY und BURHOP erfasst die folgenden von den L -Niveaus ins K -Niveaus bzw. ins kontinuierliche Spektrum führenden, strahlungslosen Elektronenübergänge: $L_I L_{III} \rightarrow K \infty$, $L_I L_{II} \rightarrow K \infty$ und $L_I L_I \rightarrow K \infty$; ebenso wurden die Breiten der erlaubten optischen Übergänge $L_{III} \rightarrow K$ und $L_{II} \rightarrow K$ berechnet.

Um den Anteil der Elektronenübergänge $LM \rightarrow K \infty$, $LN \rightarrow K \infty$ und $MM \rightarrow K \infty$ zu ermitteln, ist die Kenntnis der relativen

Verhältnisse der Augerbreiten und der Strahlungsbreiten des K -Niveaus auch in bezug auf die andern möglichen Übergänge erforderlich. Eine vollständige, allerdings unrelativistische Berechnung der Auger- und Strahlungsbreiten des Au - K -Niveaus in bezug auf sämtliche möglichen Übergänge wurde von PINCHERLE¹²⁾ durchgeführt; in ähnlicher Weise wurden die Breiten der Au -Röntgenniveaus auch von RAMBERG und RICHTMYER berechnet¹³⁾.

Die für das Au -Atom berechneten Konversionskoeffizienten $a = (\Gamma_A^K / \Gamma_X^K)$ der verschiedenen Röntgenübergänge sind in der letzten Kolonne der Tabelle 4 eingetragen.

Der Vergleich der experimentellen und theoretischen Werte zeigt gute Übereinstimmung der Konversion für die Elektronenübergänge $LL \rightarrow K \infty$ und $LM \rightarrow K \infty$. Die Anwendung der relativistischen Mollerschen Methode für Zweielektronenübergänge auf die strahlungslosen Augerübergänge beim Au -Atom gibt also mit dem Experiment übereinstimmende Resultate.

Die experimentell gefundenen Konversionsverhältnisse für die Übergänge $LN \rightarrow K \infty$ und $MN \rightarrow K \infty$ sind wesentlich grösser als die theoretisch berechneten Werte. Obwohl die Abweichungen vom theoretischen Wert innerhalb der Fehlergrenzen liegen, scheint sie doch systematischen Ursprungs zu sein.

Diese Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie bei den Augerübergängen $LN \rightarrow K \infty$ und $MM \rightarrow K \infty$ wird darin ihren Grund haben, dass zur Berechnung des theoretischen Wertes dieser Konversionskoeffizienten die unrelativistische Theorie von PINCHERLE verwendet wurde, deren Anwendung auf schwere Atome problematisch ist.

Unserm verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER möchten wir für seine wertvolle Unterstützung und sein Interesse an dieser Arbeit besonders danken.

Literaturverzeichnis.

- 1) S. M. DANCOFF und P. MORRISON, Phys. Rev. **55**, 122 (1939).
- 2) M. H. HEBB und E. NELSON, Phys. Rev. **58**, 486 (1940).
- 3) H. R. HULME, Proc. Roy. Soc. A, **133**, 381 (1931).
- 4) H. R. HULME, Proc. Roy. Soc. A, **138**, 643 (1932).
- 5) H. M. TAYLOR und N. F. MOTT, Proc. Roy. Soc. A, **138**, 665 (1932).
- 6) H. M. TAYLOR und N. F. MOTT, Proc. Roy. Soc. A, **142**, 215 (1933).
- 7) J. B. FISK, Proc. Roy. Soc. A, **143**, 674 (1933).
- 8) J. B. FISK, H. M. TAYLOR, Proc. Roy. Soc. A, **146**, 178 (1934).
- 9) H. R. HULME, N. F. MOTT, J. R. OPPENHEIMER und H. M. TAYLOR, Proc. Roy. Soc. A, **155**, 315 (1936).
- 10) G. WENTZEL, Zeitschr. f. Physik **43**, 524 (1927).

- 11) M. HAAS, Ann. d. Physik (5), **16**, 473 (1933).
- 12) L. PINCHERLE, Nuovo Cimento **12**, 81 (1935).
- 13) E. G. RAMBERG und F. K. RICHTMYER, Phys. Rev. **51**, 913 (1937).
- 14) H. S. W. MASSEY und E. H. S. BURHOP, Proc. Roy. Soc. A. **153**, 661 (1936).
- 15) V. WEISSKOPF und E. WIGNER, Zeitschr. f. Physik, **65**, 18 (1930).
- 16) C. MÖLLER, Ann. d. Physik **14**, 531 (1932).
- 17) C. MÖLLER, Phys. Z. S. der S. U. **11**, 9 (1937).
- 18) G. WILKINSON, Phys. Rev. **73**, 252 (1948).
- 19) W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **21**, 179 (1948).
- 20) O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK und R. STEFFEN, Helv. Phys. Acta **20**, 594 (1947).
- 21) H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **19**, 77 (1946).
- 22) O. HUBER, R. STEFFEN und F. HUMBEL, Helv. Phys. Acta **21**, 192 (1948).
- 23) O. HUBER, R. STEFFEN und F. HUMBEL (erscheint demnächst in den Helv. Phys. Acta).
- 24) A. H. COMPTON und S. K. ALLISON, X-Rays in Theory and Experiment, London, 1935.
- 25) M. SIEGBAHN, Spektroskopie der Röntgenstrahlen, Berlin, 1931.
- 26) A. E. LINDH, Hdb. d. Exp. Physik XXIV₂, Leipzig 1930, p. 275.
- 27) J. V. DUNWORTH, Nature **144**, 152 (1939).
- 28) H. BRADT und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 251, (1943).
- 29) H. DEN HARTOG, F. A. MÜLLER und N. F. VERSTER, Physica **13**, 251 (1947).
- 30) J. ROTBLAT, Proc. Roy. Soc. A, **177**, 260 (1941).
- 31) E. BLEULER und W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **19**, 375 (1946).
- 32) K. SIEGBAHN, Proc. Roy. Soc. A, **189**, 527 (1947).
- 33) C. L. PEACOCK und R. G. WILKINSON, Phys. Rev. **74**, 297 (1948).
- 34) P. W. LEVY und E. GREULING, Phys. Rev. **73**, 83 (1948).
- 35) F. A. CLARK, Phys. Rev. **61**, 242 (1942).
- 36) M. L. WIENENBECK und K. Y. CHU, Phys. Rev. **72**, 1171 (1947).
- 37) C. E. MANDEVILLE und M. V. SCHERB, Phys. Rev. **73**, 90 und 634 (1948).
- 38) E. T. JURNEY und M. R. KECK, Bulletin of the American Phys. Soc. Vol. **22**, Nr. 6 (1947).
- 39) G. J. SIZOO und C. EJKMAN, Physica **6**, 332 (1939).
- 40) S. INANANANDA, Phys. Rev. **70**, 812 (1946).
- 41) J. W. M. DUMOND, P. A. LIND und B. B. WATSON, Phys. Rev. **73**, 1392 (1948).
- 42) E. McMILLAN, M. KAMEN und S. RUBEN, Phys. Rev. **52**, 375 (1937).
- 43) J. M. CORK und J. HALPERN, Phys. Rev. **58**, 201 (1940).
- 44) J. L. LAWSON und J. M. CORK, Phys. Rev. **58**, 580 (1940).
- 45) R. S. KRISHNAN und E. A. NAHUM, Proc. Cambr. Soc. **37**, 422 (1941).
- 46) H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK, P. SCHERRER und R. STEFFEN, Helv. Phys. Acta **20**, 153 (1947).
- 47) F. KOHLRAUSCH, Praktische Physik, Leipzig und Berlin 1943.
- 48) P. AUGER, C. R. Acad. Sci. Paris, **180**, 65 (1925); J. Phys. Rad. **6**, 205 (1925); Ann. Phys. **6**, 183 (1926).
- 49) L. H. MARTIN, Proc. Roy. Soc. A, **115**, 420 (1927).
- 50) F. HARMS, Ann. Chim. Phys. **82**, 87 (1926).
- 51) A. H. COMPTON, Phil. Mag. **8**, 961 (1929).
- 52) L. H. MARTIN, J. C. BOWER und T. H. LABY, Proc. Roy. Soc. A, **148**, 40 (1935).
- 53) H. M. TAYLOR, Proc. Cambr. Phil. Soc. **32**, 291 (1936).
- 54) H. A. BETHE, Rev. of Mod. Physics **9**, 69 (1937).

Eine Bildzerlegerröhre ohne Speicherung nach Farnsworth

von N. Schaetti.

(5. IV. 1949.)

Im Institut für Technische Physik der E. T. H. ist ein Fernseh-Filmbild-Abtaster für 729-Zeilen-Bilder mit einer Bildzerlegerröhre ohne Speicherung nach Farnsworth entwickelt worden.

Die Realisierung dieser Bildzerlegerröhre hat verschiedene Probleme mit sich gebracht, in erster Linie dasjenige der Herstellung der Photokathode. Um für die Projektion des Filmbildes auf die Photokathode lichtstarke Objektive verwenden zu können, ist diese als Durchsichtskathode auszubilden. Hierzu eignen sich die Legierungskathoden, wie sie von P. GÖRLICH¹⁾ entwickelt worden sind. Als Legierungskomponenten werden Antimon und Cäsium verwendet. Diese Photokathode besitzt ihre Höchstepfindlichkeit im blauen Spektralbereich. Ihre langwellige Grenze liegt bei $700\text{ m}\mu$.

Die Vorteile der Legierungskathoden sind die folgenden:

1. Möglichkeit der Herstellung sehr dünner, gut durchlässiger Kathoden.

2. Höhere Empfindlichkeit der Zelle bei ihrer Verwendung als Durchsichtskathode, das heisst bei Belichtung der Zelle von hinten, als bei Verwendung derselben als Aufsichtskathode.

3. Unabhängigkeit der spektralen Empfindlichkeitsverteilung von der Schichtdicke der Kathode.

Neben dem grossen Vorteil einer hohen lichtelektrischen Ausbeute besitzt die Sb-Cs-Legierungskathode allerdings den Nachteil eines hohen Oberflächenwiderstandes dieser Schicht. Nach Messungen, die wir an solchen Zellen durchgeführt haben, liegt der Oberflächenwiderstand einer Sb-Cs-Schicht in der Grössenordnung von 5000 Ohm. Bei Verwendung einer Kohlenbogenlampe verunmöglicht dies die Projektion des ganzen Filmbildes im Grössenverhältnis 1:1 auf die Photokathode. Bei dieser ausserordentlich intensiven Belichtung der Zelle würde sich das Potential der Kathodenoberfläche mit wechselnder Lichtintensität stark verändern und dadurch die elektronenoptische Abbildung der Photokathode in die Zerle-

¹⁾ P. GÖRLICH, Zeitschr. f. Phys. **101**, S. 335 (1936), Zeitschr. f. techn. Phys. **18**, S. 460 (1937).

gungsebene wesentlich stören. Daher ist die Kathode als Einzeilen-Photokathode auszubilden. Der wirksame Teil der Photokathode ist strichförmig, und die Strichbreite entspricht der Zeilenbreite des zu übertragenden Bildes. In der von uns hergestellten Röhre beträgt die Strichbreite 0,03 mm bei einer Länge von 30 mm.

Die Photokathode erzeugt somit unmittelbar die Zeile des zu übertragenden Bildes. Dieses wird mechanisch durch die gleichförmige Bewegung des Filmes zusammengesetzt. Ein Abtaster mit einer Einzeilen-Bildzerlegerröhre arbeitet somit in Bildrichtung mechanisch und nur in Zeilenrichtung elektronisch.

Eine der Hauptschwierigkeiten bei der Herstellung dieser Bildzerlegerröhre liegt in der Realisierung einer vollkommen homogenen Strichkathode. Ist diese nicht homogen, so tritt im Bilde eine Streifenstruktur in Bildrichtung auf, die stark störend wirkt. Dieses Problem ist heute weitgehend gelöst. Die Kathoden sind homogen bis auf eine Anzahl schwacher, feiner Streifen, deren Ursache heute aber noch nicht abgeklärt ist.

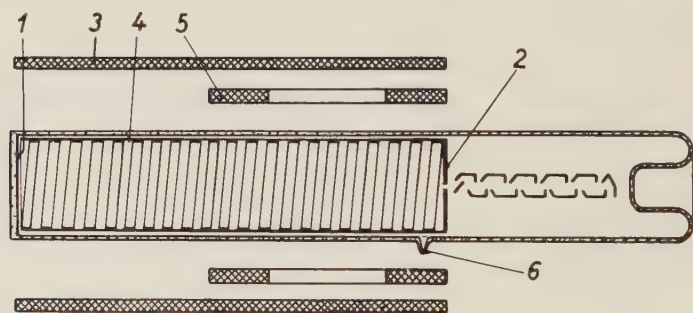


Fig. 1a.

Wichtig ist die Untersuchung der Lebensdauer einer hochempfindlichen Photokathode bei einer solch intensiven Belichtung. Versuche haben gezeigt, dass die Empfindlichkeit der Kathoden nicht abnimmt. Ein Exemplar einer Bildzerlegerröhre ist bereits einige hundert Stunden in Betrieb, ohne dass eine Abnahme der photoelektrischen Empfindlichkeit zu konstatieren ist.

In einer ersten Lösung wurde für die Abbildung der Photokathode in die Zerlegungsebene die bekannte Bildwandler-Elektronenoptik mit kombiniertem elektrischem und magnetischem Feld verwendet. Fig. 1a zeigt schematisch den Aufbau dieser Röhre.

Auf der im Glasrohr eingeschmolzenen planparallelen Platte 1 ist im Inneren eine undurchsichtige Silberschicht mit einem Spalt von $0,03 \times 30$ mm aufgedampft. Darauf wird die Photokathode herge-

stellt. Die bei Belichtung austretenden Photoelektronen werden in die Ebene 2 elektronenoptisch abgebildet. Dies geschieht durch die Kombination eines homogenen elektrischen Feldes ($V = 6-8000$ Volt) und dem magnetischen Feld der Spule 3.

Die Erzeugung des homogenen elektrischen Feldes ist auf 2 Arten versucht worden:

a) Auf einem in die Röhre eingeschmolzenen Glasrohr 4 wurde eine Spirale aus Aquadag hergestellt. Zu diesem Zwecke wurde dieses Rohr innen mit einem Aquadagbelag versehen und aus diesem nach dem Trocknen auf einer Drehbank eine Spirale ausgedreht. Nach dem Einbrennen des Belages erhielt man auf diese Weise einen Widerstand von $1-2 \times 10^6$ Ohm. Der Widerstand war über die ganze Rohrlänge genügend konstant.

b) In einer Glasröhre wurden in gleichmässigen Abständen 25 Platindurchführungen eingeschmolzen. Darauf wurden auf der Innenseite dieses Rohres 25 Platinringe auf chemischem Wege aufgebracht. Die Verbindung der einzelnen Ringe geschah über in Glasröhrchen eingeschmolzenen Widerständen von je 100000 Ohm. Damit war eine Annäherung an die Aquadagspirale erreicht.

In der Ebene 2, der Zerlegungsebene, befindet sich eine Blende mit zentraler Öffnung. Über diese Öffnung ist ein Platinplättchen mit einem Spalt von $0,04 \times 1,2$ mm aufgeschweisst. Dieser Spalt steht senkrecht zur Photozellenzeile. Durch ihn wird aus der Bildzeile der Bildpunkt ausgeblendet. Durch Hin- und Herführen des Elektronenbildes der Zeile über diesen Spalt mit Hilfe der Zeilenspule 5 wird diese in die einzelnen Bildpunkte zerlegt.

Hinter der Blende 2 ist ein 12stufiger Sekundär-Elektronenvervielfacher angeordnet für die Verstärkung des Elektronenstromes der einzelnen Bildpunkte. Die Verstärkung beträgt je nach der Grösse der angelegten Spannung 10^5-10^6 .

Im Verlaufe der Arbeiten an dieser Röhre hat es sich erwiesen, dass die Herstellung sehr grosse Schwierigkeiten bietet und zwar hauptsächlich die folgenden:

a) Das Antimon der Photokathode muss vor dem Einbau des Vervielfachers in die Röhre aufgedampft werden, was jeweils in einer speziellen Apparatur geschah. Das Aufdampfen des dünnen Antimonbelages vor dem Zusammenbau der Röhre hat zur Folge, dass diese nicht höher als auf 250°C aufgeheizt werden darf, damit das Antimon nicht abdampft. Dadurch wird die Röhre nicht genügend entgast. Im Betrieb haben alle Röhren sehr rasch eine Verschlechterung des Vakuums gezeigt, verbunden mit einer Zerstörung der Photokathode. Versuche an einfachen Photozellen haben zudem

gezeigt, dass Photokathoden, für welche das Antimon vor dem Zusammenbau der Zelle aufgedampft worden war, stets weniger empfindlich waren als bei normal hergestellten Zellen.

b) Der Spannungsteiler gab im Betrieb sehr rasch Gas ab.

c) Der Ansatz 6 für die Caesiumpillen musste zuweit von der Zelle weg angebracht werden, was grosse Schwierigkeiten verursachte um das Caesium auf die Kathode zu bringen. Es lagerte sich stets eine grössere Menge von Cs in den Spannungsteiler ein und veränderte seine Daten.

Auf Grund dieser Erfahrungen ist zur elektrostatischen Lösung der Bildwandlerabbildung übergegangen worden. Fig. 1b zeigt diese Variante des Bildzerlegers.

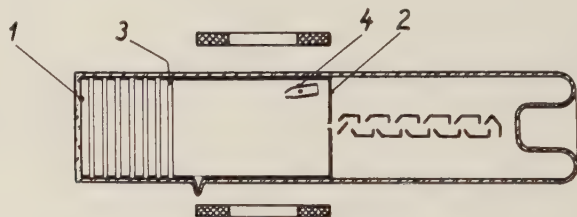


Fig. 1b.

Die Abbildung der Photokathode 1 auf die Blende 2 erfolgt mit der elektrostatischen Linse 3. Die Linsenspannung beträgt 4–5000 Volt. Die sechs Ringe zwischen Linse und Photozelle dienen der Korrektur der Bildfeldwölbungsfehler. Photozelle und Vervielfacher sind gleich wie bei der ersten Lösung.

Die Vorteile dieser Röhre sind die folgenden: Der Bildwandlerteil wird wesentlich verkürzt, was die Möglichkeit ergibt, das Antimon in der Röhre selbst aufzudampfen, nachdem diese ausgeheizt worden ist. Dazu ist auf der Blende 2 die Antimonverdampfungsquelle 4 angeordnet. Die Röhre wird nach dem Zusammenbau zunächst bei 400° C ausgeheizt, und erst nach diesem Prozess wird die Photokathode hergestellt. Dadurch ist die Entgasung der Röhre wesentlich verbessert und die Empfindlichkeit der Zelle gesteigert. Abbildung 2 zeigt die Bildzerlegerröhre in ihrer endgültigen Form.

Die Bildzerlegerröhre nach Farnsworth benötigt im Gegensatz zu anderen Systemen einen sehr bescheidenen Aufwand an elektrischen Zusatzgeräten. Auch Mechanik und Optik gestalten sich einfach, wenn, wie in unserem Falle, nicht nach dem Zwischenzeilenverfahren gearbeitet wird, sondern 25 volle Bilder pro Sekunde übertragen werden. Abbildung 3 vermittelt ein Gesamtbild des Abtasters.

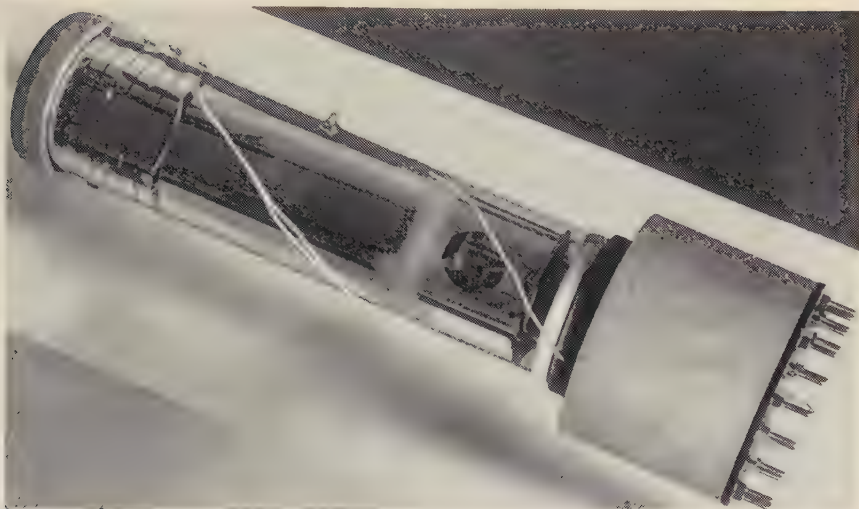


Fig. 2. Bildzerlegerröhre.

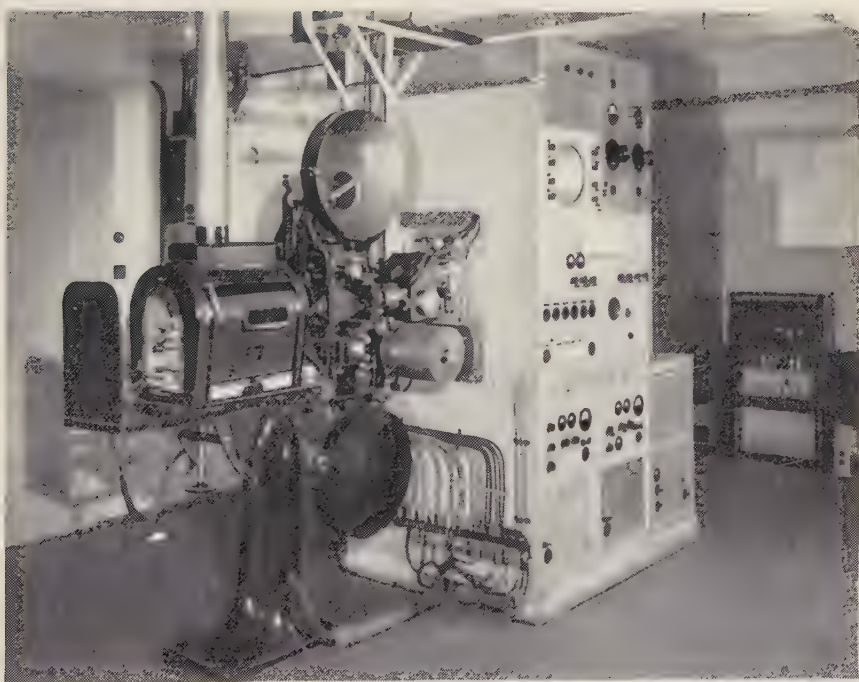


Fig. 3. Filmabtaster.

Es wird ein normaler 35 mm-Filmprojektor verwendet. Das Filmband wird kontinuierlich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 25 Bildern pro Sekunde durch das Fenster bewegt. Als Antrieb dient ein vom Netz gespeister Synchronmotor. Dadurch, dass der zentrale Impulsgeber, welcher für die gesamte Fernseh-anlage die Zeilen- und Bildsynchronisierungsimpulse liefert, ebenfalls genau auf das Netz synchronisiert ist, wird Gleichlauf gewährleistet.

In der Ebene der Photokathode der Bildzerlegerröhre ist ein lichtstarkes Bild des Filmes zu entwerfen. Als Lichtquelle dient die Kohlenbogenlampe mittlerer Stärke des Projektors. Durch den Hohlspiegel der Lampe wird deren Krater in die Filmebene abgebildet. Ein erstes Objektiv erzeugt ein reelles Bild im Unendlichen, ein zweites bildet letzteres auf die Photokathode ab, mit einer Vergrößerung von 1:1,06. Im telezentrischen Strahlengange zwischen den beiden Objektiven ist ein über eine Nockenwelle synchron zur Bildfrequenz betätigter Kippspiegel angeordnet, womit der Bildstrich relativ zur Bildhöhe je nach Wunsch vergrößert oder verkleinert werden kann.

Über die generelle Anordnung der elektrischen Zusatzgeräte orientiert das Blockschema in Figur 4.

Für den Betrieb der Bildzerlegerröhre werden Netzgeräte für die Elektronenoptik sowie für die Speisung des Sekundärelektronen-vervielfachers benötigt. Bild- und Zeilenshiftgerät bringen das elektronenoptische Bild der Zeile in die richtige Lage zum Austastspalt. Eine zweite Gerätegruppe bilden Fokussierkorrekturgerät, Gerät zur Erzeugung der Austastimpulse, sodann Entkopplungs- und Anpassungsstufe und zuletzt der Kontrollempfänger.

Das Fokussierkorrekturgerät reduziert die Bildfeldwölbungsfehler. Durch das Zeilenkippperät wird das elektronenoptische Bild der Zeile mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung am Eintrittsspalt des Vervielfachers vorbeigeführt, wodurch die Zeile in einzelne Bildpunkte zerlegt wird.

Der Bezugswert für «schwarz» wird durch Sperrung des Elektronenvervielfachers während des Zeilenrücklaufes geliefert. Man erreicht dies dadurch, dass eine einzelne Prallplatte des Elektronenvervielfachers über diese Zeit an ein relativ hohes, negatives Potential gelegt wird. Die Grösse dieses «Austastimpulses» beträgt 200 Volt. Dieses Verfahren gestattet die Einhaltung des Schwarzpegels unabhängig von der mittleren Helligkeit des Bildes, was insbesondere bei speichernden Bildzerlegerröhren ein schwieriges Problem darstellt.

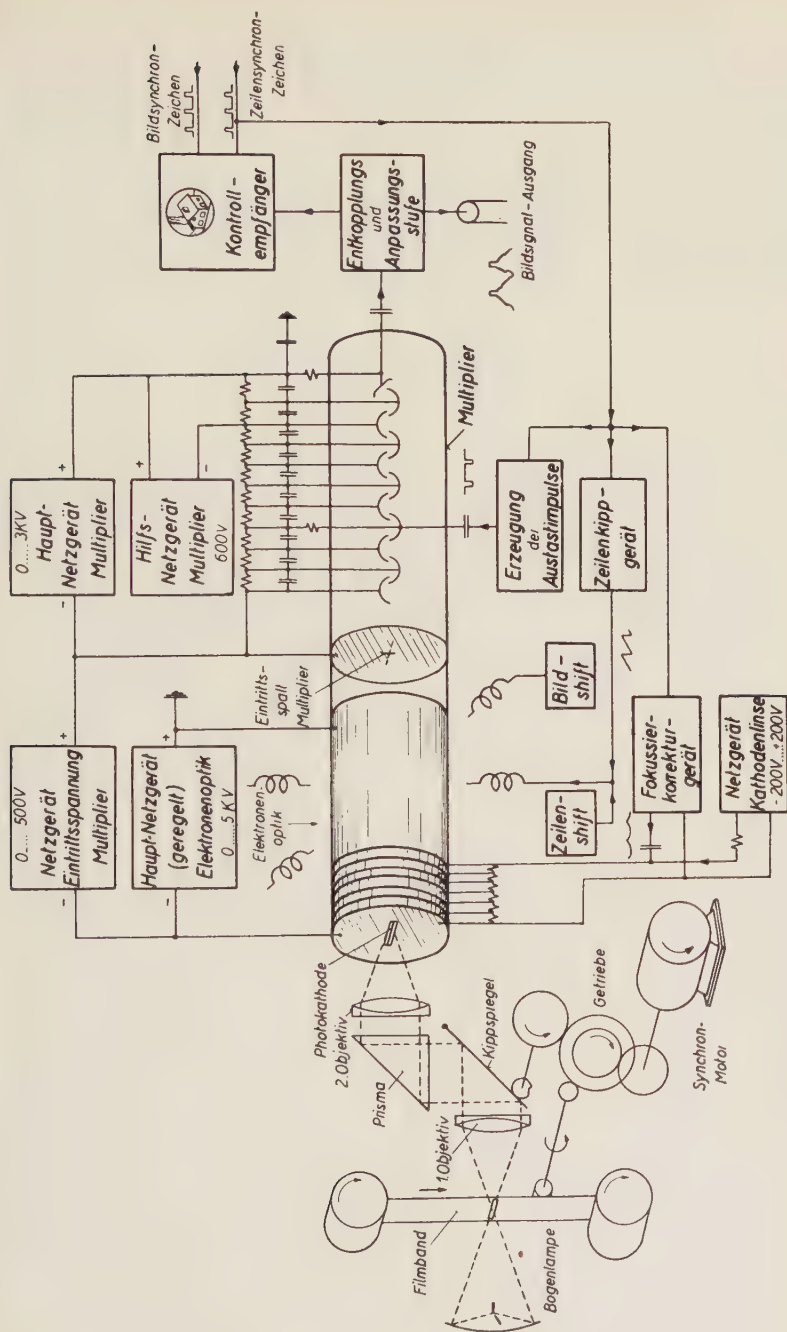


Fig. 4. Blockschema des Farnsworth-Filmabtasters.

Die Röhre liefert für ein weisses Bild einen Signalstrom von 1 mA, der an einem Arbeitswiderstand von 1000 Ohm eine Spannung von 1 Volt erzeugt. Es kann daher auf eine unmittelbare Spannungsverstärkung verzichtet werden. Es ist lediglich eine Stufe notwendig, die den Arbeitswiderstand der Bildzerlegerröhre an den Wellenwiderstand des Ausgangskabels anpasst.

Die Röhren zeigen praktisch kein Rauschen. Die mit der 3/100 mm breiten Photokathode und einem Zerlegungsspalt von 4,5/100 mm Breite erreichte Auflösung ist mit einem Testbild untersucht worden. Theoretisch ist folgende Auflösung zu erwarten:

In Bildrichtung: 1600 Bildpunkte

In Zeilenrichtung: 1000 Bildpunkte

wobei beide Bildpunktzahlen auf die Zeilenbreite bezogen sind. Da die wirkliche Zeilenzahl aber in unserem Falle 729 beträgt, ist die Auflösung in Bildrichtung in erster Linie durch die Zeilenzahl bestimmt. Mit dem 729-Zeilenraster beträgt die theoretische Auflösungsgrenze in Bildrichtung 810 Bildpunkte.

Die Messungen ergaben in Bildrichtung eine Auflösungsgrenze bei 700 Bildpunkten. In Zeilenrichtung wurde diese Grenze zu 600 Bildpunkten für das Zentrum des Bildes und zu 500 Bildpunkten für die Randpartien ermittelt. Diese Werte sind insbesondere in Zeilenrichtung bedeutend kleiner als die theoretischen. Dabei wurde festgestellt, dass weder die Optik noch die Elektrik die Auflösung begrenzen. Die ungenügende Auflösung ist daher auf Abbildungsfehler der Elektronenoptik zurückzuführen. Versuche zur Verbesserung der Elektronenoptik sind im Gange. Sie umfassen:

1. Ersatz der ebenen Photokathode durch eine Hohlkathode.
2. Verkleinerung des optischen Bildes auf der Photokathode, damit nur die zentralen Partien der elektrostatischen Linse zur Verwendung gelangen.

Institut für technische Physik der E.T.H.

Die Entwicklung des linearen Accelerators

von **W. Graffunder** (Fribourg).

(16. XII. 1948.)

I. Einleitung.

Ein linearer Teilchenbeschleuniger wurde bereits im Jahre 1925 von G. ISING¹⁾ vorgeschlagen. In etwas anderer Form wurde er dann von R. WIDEROE²⁾ mit zwei Beschleunigungsstrecken verwirklicht, später in der von WIDEROE entwickelten Form, jedoch mit zahlreichen Stufen von J. THIBAUD³⁾ in Frankreich und von SLOAN und LAWRENCE⁴⁾ in Amerika ausgeführt. Ein 30-stufiges Modell dieser Forscher ergab bei Hg-Ionen bereits Beschleunigungsenergien von $1,2 \times 10^6$ e-Volt. SLOAN und LAWRENCE erkannten aber auch die grundsätzlichen Schwierigkeiten, die sich einer erheblichen Vergrößerung dieser Energie, besonders bei Anwendung auf leichte Ionen und Elektronen, entgegenstellen mussten (grosse Baulänge, grosser Leistungsbedarf, Fokussierungsschwierigkeiten). In der Folgezeit wandte sich die Aufmerksamkeit daher vorwiegend jenen Formen der Teilchenbeschleuniger zu, die mit magnetisch aufgewickelter Teilchenbahn arbeiten, dem Cyclotron, Betatron und neuerdings dem Synchrotron. Erst in der Nachkriegszeit kam wieder Interesse für die Linearbeschleuniger auf, begründet durch die grosse Entwicklung der Technik der Dezimeter- und Centimeterwellen und der Impulstechnik, so wie durch das Vorhandensein grosser Mengen von war-surplus-material. Für den Linearbeschleuniger sprach vor allem dass die Möglichkeit, nunmehr sehr grosse Hochfrequenzleistungen bei sehr viel kürzeren Wellenlängen zu erzeugen, gegenüber der Vorkriegszeit zu einer erheblichen Verkürzung der Baulänge führen konnte. Hinzu kam, dass Verluste durch Strahlung vernachlässigbar gering waren und keine Schwierigkeiten beim Ein- und Ausschleusen der Teilchen bestanden. Als Vorteil des Linearbeschleunigers wurde ferner angeführt⁵⁾, dass hierbei die Kosten annähernd linear mit der zu erzielenden Teilchenenergie wachsen, während, zum mindesten bei dem Betatron, die Kosten etwa proportional mit der 3. Potenz der Teilchenenergie zunehmen. Besonders bei

sehr grossen Energien musste sich daher die Überlegenheit des Linearbeschleunigers bemerkbar machen. .

Vor allem in den Jahren 1946 und 1947 ist in den Vereinigten Staaten eine grosse Zahl von Arbeiten erschienen, die sich mit linearen Acceleratoren für Elektronen und Ionen beschäftigen. Es scheinen im wesentlichen 6 Stellen zu sein, an denen hieran gearbeitet wird. In alphabetischer Reihenfolge sind dies:

1. Die California-University (ALVAREZ, BAKKER, BRADNER, CRAWFORD, FRANCK, GORDON, GOW, JOHNSTON, MARTINELLI, MILLAN, OPPENHEIMER, PANOFSKY, RICHMAN, SERBER, TOULIS, WOODYARD), bei der es sich um den Bau eines Ionen-Beschleunigers handelt (15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22).

2. Das Laboratorium der General Electric Company (HAIN, LAWTON) (23, 31, 32).

3. Das Massachusetts Institute of Technologie (EVERHART, HALPERN, RAPUANO, SLATER) (24, 25).

4. Die Purdue-University (AKELEY, GINZBARY, HANBY, SMITH, WELCH, WHALEY, WOODYARD) (7, 26).

5. Die Stanford-University (GINZTON, HANSON, KENNEDY, POST) (6, 27).

6. Die Yale-University (BERINGER, CLARKE, Mc.CARTHY, LOCKWOOD, MONTGOMERY, RICE, SCHULTZ, WATSON) (28),

die sich sämtlich mit Elektronenacceleratoren beschäftigen. Hinzu kommen noch zahlreiche Einzelveröffentlichungen, bei denen es sich ebenfalls um Hochfrequenzbeschleuniger für Elektronen handelt. An den meisten dieser Stellen ist im Laufe des Jahres 1946 mit dem Bau grösserer Geräte begonnen worden. Auf der internationalen Physikertagung in Zürich hat ALVAREZ über die Fertigstellung seines Ionenbeschleunigers berichtet. Ferner ist von HANSEN, GINZTON und KENNEDY⁶⁾ über die Fortschritte der Arbeiten an der Stanford-University ausführlicher berichtet worden. Von den anderen Stellen liegen noch keine endgültigen Berichte vor.

Trotz der grundsätzlichen Einfachheit des Beschleunigungsprinzips ergeben sich bei der Konstruktion grösserer und vielstufiger Elektronenbeschleuniger eine Reihe von Problemen, die die praktische Ausführung eines derartigen Gerätes erschweren: zu den elektrotechnischen Fragen der Beschaffung, Zuleitung und Verteilung der HIF-Energie, Abstimmungs- und Kopplungsproblemen kommen elektronen-optische Probleme, die Fragen der Fokussierung und Bündelung des Elektronenstrahles und die thermischen Probleme der Abführung der Wärmeleistung unter Vermeidung einer unzulässigen thermischen Deformation der Resonatoren.

Die Ausführungen auf den folgenden Seiten beschäftigen sich in erster Linie mit der grundsätzlichen Frage des notwendigen Leistungsbedarfes. GINZTON, HANSEN und KENNEDY⁶⁾ behandeln in der erwähnten Arbeit auch diese Probleme und kommen, wenn auch auf anderem Wege, zu denselben Ergebnissen.

Es gibt für die Konstruktion eines Linearbeschleunigers zahlreiche Möglichkeiten, die sich auf die verschiedenen Schwingungsformen der sich in einem Wellenleiter bewegenden elektromagnetischen Welle zurückführen lassen.

Der Beschleuniger besteht im Prinzip aus einer Reihe hintereinander angeordneter Resonatoren, durch die der Elektronenstrahl hindurchtritt. Die einzelnen Resonatoren sind durch leitende, die elektrische Welle reflektierende Wände voneinander getrennt, in denen sich eine mehr oder weniger grosse Öffnung zum Durchtritt des Elektronenstrahls befindet. Wir können nun 2 Grenzfälle unterscheiden:

a) Die Öffnung in den Trennwänden ist verschwindend klein. In diesem Fall ist die Kopplung zwischen den Resonatoren zu vernachlässigen, jeder Einzelresonator schwingt unabhängig von den anderen, die Phase der Schwingung kann so eingestellt werden, dass ein die Reihe dieser Resonatoren durchlaufendes Elektron stets die für seine Beschleunigung optimale Phase des elektrischen Feldes antrifft (Abschnitt II).

b) Die Öffnung in den Trennwänden ist extrem gross, so dass sie bis an den Rand der Trennwände heranreicht, d. h. diese sind praktisch verschwunden. Wir haben dann nicht mehr Einzelresonatoren, sondern einen Wellenleiter vor uns, in dem sich die elektrische Welle fortpflanzt. Je nach dem, ob der Wellenleiter am Ende reflektierend abgeschlossen ist oder nicht, kann es zur Ausbildung einer stehenden oder einer fortschreitenden Welle kommen. Die Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle ist stets grösser als Lichtgeschwindigkeit. Das in dem Wellenleiter wandernde Elektron bleibt daher sehr bald hinter der Welle zurück, es kommt an Stellen geringerer und schliesslich verzögernder Feldstärke. Der Wellenleiter darf daher nicht sehr lang sein, um so weniger, je grösser die Differenz zwischen den Wanderungsgeschwindigkeiten der Welle und des Elektrons ist (Abschnitt III).

Zwischen diesen beiden Extremfällen: a) völlig gegeneinander abgeschlossene Einzelresonatoren, b) einem glatt durchlaufenden Wellenleiter ohne Belastung durch Trennwände gibt es nun kontinuierliche Übergänge, indem man die Öffnung in den Trennwänden grösser und grösser werden lässt. Wir haben dann einen mit irisför-

migen Blenden belasteten Wellenleiter vor uns. Es zeigt sich, dass die Phasengeschwindigkeit in einem derartig belasteten Wellenleiter von der Grösse der Öffnungen in den Blenden und ihrem gegenseitigen Abstand abhängt, und man kann es so einrichten, dass die Phasengeschwindigkeit in dem Wellenleiter und die Wanderungsgeschwindigkeit des Elektrons übereinstimmen. Dann kommt das Elektron niemals «ausser Tritt», und es ist möglich, beliebig lange Wellenleiter zu verwenden. Besonders an dem inneren Rand der Irisblenden herrscht aber eine beträchtliche elektrische Stromdichte, so dass die

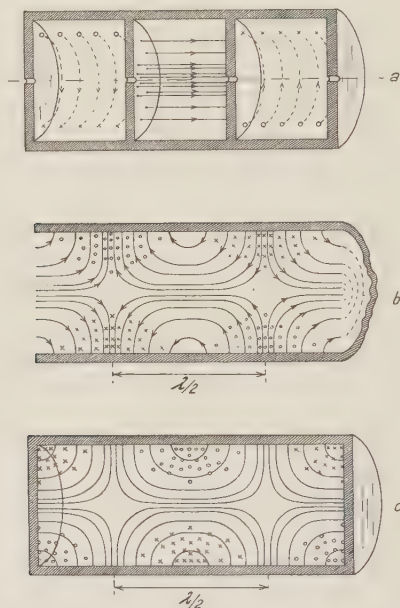


Fig. 1.

- a) Feldlinienverlauf einer E_{010} -Welle.
- b) Feldlinienverlauf einer fortschreitenden E_{01} -Welle.
- c) Feldlinienverlauf einer stehenden E_{012} -Welle.

Dämpfung des Wellenleiters durch die Blenden nicht unerheblich vergrössert wird.

Dieser Fall des belasteten Wellenleiters soll hier nicht besprochen werden, zumal die rechnerische Behandlung nicht so einfach ist, wie bei den Grenzfällen a und b und dieser Fall auch mehrfach behandelt worden ist (z. B. ^{7, 8}). Es soll übrigens erwähnt werden, dass auch der belastete Wellenleiter entweder reflektierend abgeschlossen werden kann (stehende Welle), oder dass man in ihm eine fortschreitende Welle erzeugen kann.

Der Übergang aus dem Grenzfall a in den Grenzfall b zeigt sich physikalisch in der Änderung des Feldlinienverlaufes.

Ein Augenblicksbild des Feldlinienverlaufes dieser beiden Fälle ist in Fig. 1a und 1b gegeben. In Bild a ist die Energie in dem mittleren Resonator gerade in dem elektrischen Feld, in den beiden andern Resonatoren im magnetischen Feld konzentriert. In Bild b ist der Feldverlauf einer fortschreitenden E_{01} -Welle gezeichnet*).

Gehen wir von diesem Falle aus und denken wir uns kreisförmige Blenden mit abnehmender Öffnung in den Leiter eingesetzt, so werden die elektrischen Feldlinien, die ja praktisch stets senkrecht in die Leiterfläche einmünden, mehr und mehr achsenparallel werden und sich schliesslich der Form Bild 1a angleichen.

In Bild 1c ist noch der Feldverlauf einer *stehenden Welle* in einem solchen Augenblick dargestellt, in dem ihre Energie teilweise im elektrischen, teilweise im magnetischen Felde konzentriert ist.

Wir werden am Schlusse sehen, dass alle Methoden, auch die des belasteten Wellenleiters, die gleiche Grössenordnung der zu erreichenden Elektronenenergie ergeben.

II. Elektronenbeschleunigung in Einzelresonatoren.

In diesem Abschnitt soll nun zunächst für den Fall a untersucht werden, welche Beschleunigungsspannung bei vorgegebener Leistung und vorgegebener Länge des Beschleunigungssystems maximal erzielbar ist, und welche Bedingungen sich hierbei für die Form der Resonatoren ergeben.

1. Der zylindrische Dosenresonator.

Die in Fig. 1a dargestellte Schwingungsform in einer zylindrischen Dose ist in Fig. 2 nochmals dargestellt. Die elektrischen Feldlinien laufen hierbei achsenparallel, die magnetischen umschliessen sie kreisförmig. Das Maximum der elektrischen Feldstärke liegt in der Achse und nimmt längs des Radius r proportional der Besselschen Funktion nullter Ordnung ab. Dieser Verlauf der Feldstärke ist in Fig. 2 ebenfalls eingezeichnet. Die Stromlinien in der Mantelfläche des Zylinders verlaufen ebenfalls achsenparallel. Ihre Stromdichte ist auf der Mantelfläche überall gleich. Da die Jouleschen Verluste proportional dem Quadrat der Stromstärke sind, bedeutet jede Abweichung von der gleichmässigen Stromverteilung eine Zunahme

*) Die elektrischen Feldlinien sind durch ausgezogene, die magnetischen Feldlinien durch gestrichelte Linien bez. ihre Spuren beim Durchtritt durch die Zeichenebene dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind im Bild b und c nur die Feldlinien in der Schnittebene eingezeichnet.

der Dämpfung, und es ist daher eine Resonatorform mit kreisförmigem Querschnitt einer solchen mit quadratischem oder rechteckigem Querschnitt überlegen.

Für die H_{010} -Welle ist bei zylindrischer Dose der Parallel-Verlustwiderstand

$$R_p = 185 \frac{h}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{d}{2h}}. \quad (1)^*$$

Die Bedeutung der Grössen h und d ist aus der Fig. 2 ersichtlich, δ ist die Eindringtiefe des Skin-effektes. Es gilt für Kupfer

$$\delta_{cm} = 3,8 \cdot 10^{-5} \sqrt{\lambda_{cm}}$$

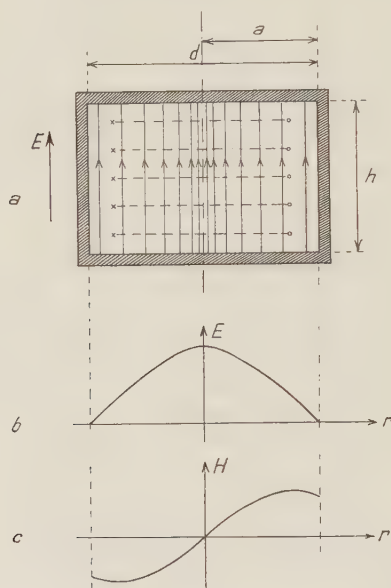


Fig. 2.

Dosenresonator mit H_{010} -Schwingung

- a) Feldlinienverlauf.
- b) Verlauf der elektrischen Feldstärke als Funktion des Radius.
- c) Verlauf der magnetischen Feldstärke als Funktion des Radius.

Durchmesser und Wellenlänge stehen bei Resonanz in der Beziehung

$$d = \frac{1}{1,31} \lambda$$

Ersetzt man schliesslich auch h unter Einführung des Formfaktors k durch die Beziehung

$$h = k \cdot \lambda$$

*) Über die Ableitung dieser Formel s. Fussnote zu S. 248.

so ergibt sich bei der Resonanzwellenlänge für den Parallelwiderstand

$$R_p = \frac{12,8 \cdot 10^6 \cdot k^2}{1 + 2,61 k} \sqrt{\lambda} \quad (2)$$

Mit Hilfe dieses Verlustwiderstandes R_p lässt sich sofort der Scheitelwert U_0 der «Spannung» angeben, die sich längs der Achse des Resonators bei Zuführung der Leistung N ausbildet. Es ist

$$U_0 = \sqrt{2 N R_p}$$

(Wir werden hier und im folgenden die Bezeichnung «Spannung» für das Wegintegral der Feldstärke aus Gründen der Bequemlichkeit auch dann anwenden, wenn kein Potential im quasi-stationären Sinn existiert.) Hieraus wird dann

$$U_0 = \frac{5,05 \cdot 10^3 \cdot k}{\sqrt{1 + 2,61 k}} \sqrt{N} \sqrt{\lambda} \quad (3)$$

Das schnelle Ansteigen dieses Wertes mit k legt es nahe, möglichst hohe Dosen mit grossem Wert k zu verwenden, um eine grössere Beschleunigungsspannung zu erzielen. Diese ist aber tatsächlich nicht ausnutzbar, da sich die Feldstärke während der Laufzeit des Partikels ändert und an die Stelle der maximalen Feldstärke E_0 ein Mittelwert \bar{E} tritt, dessen Betrag von der Phase der Feldstärke im Augenblick des Eintritts in den Resonator und dem Laufzeitwinkel φ abhängt. Für stark vorbeschleunigte Partikel, die sich bereits nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, also besonders für Elektronen, wird dieser Mittelwert für die günstigste Startphase

$$\bar{E} = E_0 \frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2} \quad (4)$$

Bis zu Laufzeitwinkeln von 90° nimmt dieser Ausdruck nur wenig, dann aber schneller ab.

Längs der Strecke $h = k \lambda$ wird für stark vorbeschleunigte Elektronen der Laufzeitwinkel

$$\varphi = 2 \pi k$$

und wir erhalten für die im Resonator auf das Elektron maximal übertragbare Energie in e -Volt*) unter Berücksichtigung des Laufzeiteinflusses:

$$\bar{U} = U_0 \frac{\sin \pi k}{\pi k} = 1,61 \cdot 10^3 \frac{\sin \pi k}{\sqrt{1 + 2,61 k}} \sqrt{N} \sqrt{\lambda} \quad (5)$$

*) Wir verwenden im folgenden das Symbol U sowohl zur Bezeichnung des Potentials als auch zur Kennzeichnung einer Energie in e -Volt, da hierdurch kaum Missverständnisse entstehen können.

Der Ausdruck

$$\frac{\sin \pi k}{\sqrt{1+2,61 k}}$$

wird ein Maximum für $k=0,44$, wobei er den Wert 0,67 annimmt. Dadurch ist also die optimale Resonatorform festgelegt. Höhe zu Durchmesser verhalten sich hierbei wie 0,58:1. Für diese Form gilt dann

$$\bar{U} = 1,08 \cdot 10^3 \sqrt[n]{N} \sqrt[4]{\lambda} \quad (6)$$

Diese Form wird man also wählen, wenn es sich darum handelt, in einem Resonator mit gegebener Leistung eine möglichst grosse maximale e-Volt-Energie auf ein Partikel zu übertragen. Das Verhältnis Höhe:Durchmesser verschiebt sich in Richtung zu flacheren Dosen für Teilchen, die noch nicht auf nahezu Lichtgeschwindigkeit vorbeschleunigt sind, wobei aber die maximal übertragbare Beschleunigungsenergie bei gegebener Leistung rasch abnimmt.

Um zu einer Vorstellung zu kommen, welcher Wert U erreichbar ist, wenn dem Resonator eine Leistung von beispielsweise 1 KW zugeführt wird, ist \bar{U} für 3 verschiedene Wellenlängen im folgenden zusammengestellt*). Es ergibt sich für

$$\lambda = 100 \text{ cm} \quad \bar{U} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ e-Volt}$$

$$\lambda = 10 \text{ cm} \quad \bar{U} = 0,61 \cdot 10^5 \text{ e-Volt}$$

$$\lambda = 1 \text{ cm} \quad \bar{U} = 0,34 \cdot 10^5 \text{ e-Volt}$$

Wird die zur Verfügung stehende Leistung auf n gleiche Resonatoren verteilt, so ergibt sich für die übertragbare Gesamtenergie

$$\bar{U}_{\text{ges}} = 1,08 \cdot 10^3 \sqrt[n]{n \cdot N} \sqrt[4]{\lambda} \quad (7)$$

Um diese Gesamtenergie zu erreichen, muss die Schwingungsphase in den aufeinander folgenden Resonatoren optimal eingestellt sein. Sie muss in jedem folgenden gegen den vorhergehenden Resonatortopf um $2\pi \cdot 0,44 = 0,88\pi$, $\sim 158^\circ$ zurückbleiben.

Formel (7) lässt sich dazu benützen, um die Minimalzahl n der Resonatoren zu berechnen, die nötig sind, um bei gegebener Wellenlänge und Leistung eine geforderte Gesamtenergie U_{ges} zu erreichen. Es wird

$$n_{\text{min}} = 0,86 \cdot 10^{-6} \frac{\bar{U}_{\text{ges}}^2}{N} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}$$

*) Es soll ausdrücklich erwähnt werden, dass sich alle Leistungsangaben hier und im folgenden stets auf die von dem Resonator *aufgenommene* Leistung, nicht auf die Generatorleistung beziehen.

Für die graphische Darstellung ist es bequemer

$$n_{\min} \cdot N = 0,86 \cdot 10^{-6} \bar{U}_{\text{ges}}^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

aufzutragen, was in Fig. 3 in doppelt logarithmischem Maßstab geschehen ist. Abszisse ist das Produkt $n_{\min} \cdot N$, Ordinate die übertragbare Spannung U . Parameter ist die Wellenlänge. Es sind 3 Kurven für $\lambda = 1$ cm, 10 cm und 100 cm gezeichnet. Man kann also

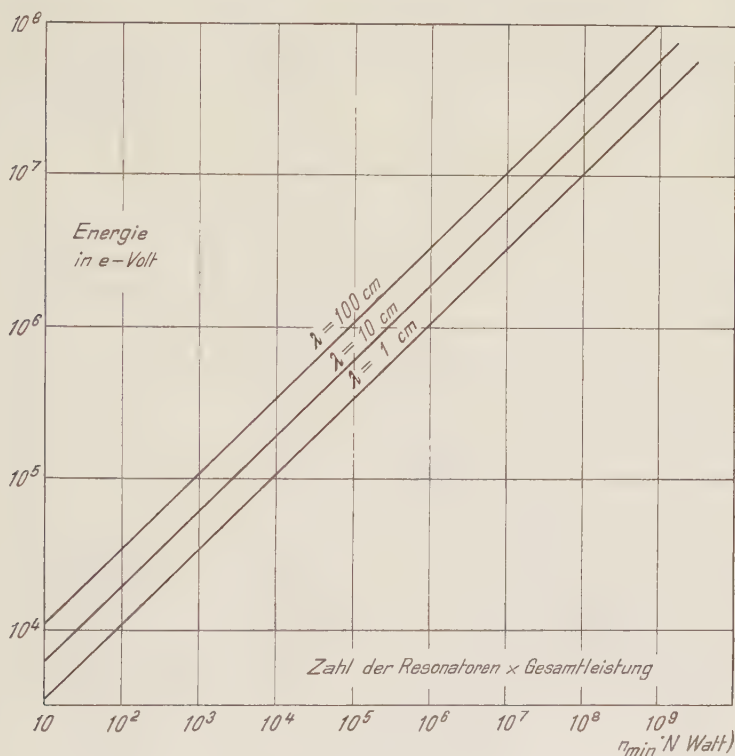


Fig. 3.

Energie-Übertragung in optimal dimensionierten Zylinder-Resonatoren ($k = 0,44$).

hieraus beispielsweise ersehen, dass zur Erzielung einer Gesamtenergie von 10^7 e-Volt bei einer Wellenlänge von 10 cm ein Produkt $n \cdot N$ von $3 \cdot 10^7$ Watt erforderlich ist. Steht also eine Leistung von 10^6 Watt zur Verfügung, so muss diese auf mindestens 30 optimal dimensionierte Resonatoren verteilt werden.

In der Regel ist es aber nicht so wichtig, die Zahl der Resonatoren als vielmehr die gesamte Länge des Beschleunigungssystems zu einem Minimum zu machen. Allgemein ist die Gesamtenergie

$$\bar{U}_{\text{ges}} = 1,61 \cdot 10^3 \frac{\sin \pi k}{\sqrt{1+2,61 k}} \sqrt{n N} \sqrt[4]{\lambda}$$

woraus sich für die Baulänge l ergibt

$$l = n \cdot k \cdot \lambda = \frac{1}{2,59 \cdot 10^6} \frac{k(1+2,61 k)}{\sin^2 \pi k} \frac{\bar{U}_{\text{ges}}^2}{N} \sqrt{\lambda} \quad (8)$$

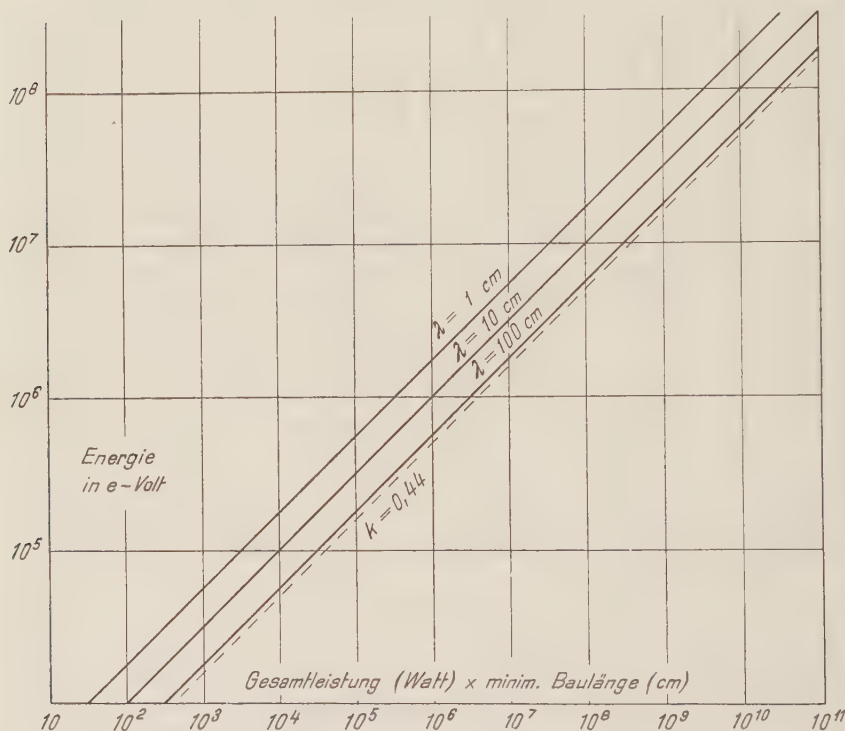


Fig. 4.

Energieübertragung in den auf minimale Baulänge ($k = 0,285$) dimensionierten Zylinder-Resonatoren.

Der Faktor

$$\frac{k(1+2,61 k)}{\sin^2 \pi k}$$

hat ein Minimum für $k \sim 0,285$, wobei er den Wert 0,817 annimmt.

Um also möglichst geringe Baulänge zu erzielen, müssen flachere Dosen verwendet werden mit einem Verhältnis

$$\text{Höhe:Durchmesser} = 0,372:1$$

Mit diesem Wert für k wird

$$l_{\min} = 0,315 \cdot 10^{-6} \frac{\bar{U}_{\text{ges}}^2}{N} \sqrt{\lambda} \quad (9)$$

In Fig. 4 ist wiederum das Produkt $N \cdot l_{\min}$ (Watt · cm) als Abszisse, die erzielte Gesamtenergie als Ordinate, beides in logarithmischem Maßstab für die 3 Wellenlängen aufgetragen. Es ergibt sich also beispielsweise, dass für 10^8 e-Volt bei $\lambda = 10$ cm ein Produkt $N \cdot l_{\min}$ von 10^{10} Watt · cm erforderlich ist. Bei einer verfügbaren Leistung von 10^6 Watt muss das Beschleunigungssystem also mindestens 10^4 cm = 100 m lang sein. In Fig. 4 ist ferner für $\lambda = 100$ cm noch die Kurve mit dem Formfaktor $k = 0,44$ eingezeichnet. Die Unterschiede sind nicht sehr erheblich. Auch hier beziehen sich alle Leistungsangaben auf die von den Resonatoren *aufgenommene* Leistung.

2. Andere Resonatorformen.

a) Dosenähnliche Resonatoren:

Die Betrachtung der Figuren 3 und 4 lässt den Wunsch entstehen, mit weniger Resonatoren, beziehungsweise mit einer geringeren Baulänge auszukommen. Ein naheliegendes Mittel, um die Wirksamkeit der Resonatoren zu erhöhen, besteht darin, Deckel und Boden der Dose einzudrücken, so dass der Laufzeiteinfluss herabgesetzt wird.

Dieses Eindrücken von Boden und Deckel kann in verschiedener Weise erfolgen. In Fig. 5 sind drei mögliche Querschnittformen dar-

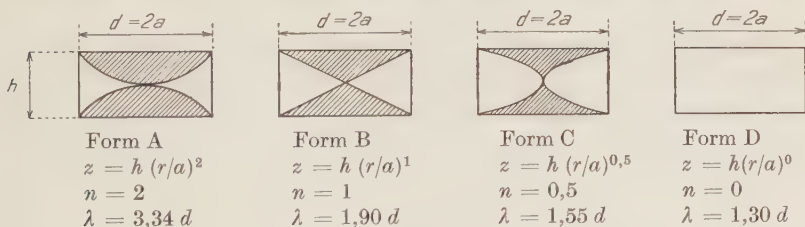


Fig. 5.

Verschiedene Formen dosenähnlicher Resonatoren.
(Schnitt längs eines Durchmessers.)

gestellt, die für flache Dosen alle durchgerechnet sind¹⁰⁾. Form A besitzt eine grosse, B und C geringere Kapazität. Diese Formen werden daher eine grössere Parallelimpedanz ergeben. Fig. 6 zeigt den ungefähren Verlauf der übertragbaren Energie mit zunehmender Dosenhöhe. D ist die Kurve des Zylinderresonators ohne, D'

mit Berücksichtigung der Elektronenlaufzeit. Alle Kurven liegen naturgemäss niedriger als Kurve *D* und erst bei beträchtlichen Dosenhöhen ist die Form *C* wirksamer als *D'*. Da der Einfluss des Laufzeitwinkels zunächst nur sehr gering ist, kann man bei der besten Form *C* noch eine weitere Verbesserung dadurch erwarten, dass die Spitzen der sich gegenüberstehenden Kegel gekürzt werden. Die Verringerung der Kapazität wird eine Erhöhung von R_p und nur einen unschädlichen Laufzeitwinkel zur Folge haben. Auch diese Kurve wird aber stets niedriger als Kurve *D* liegen.

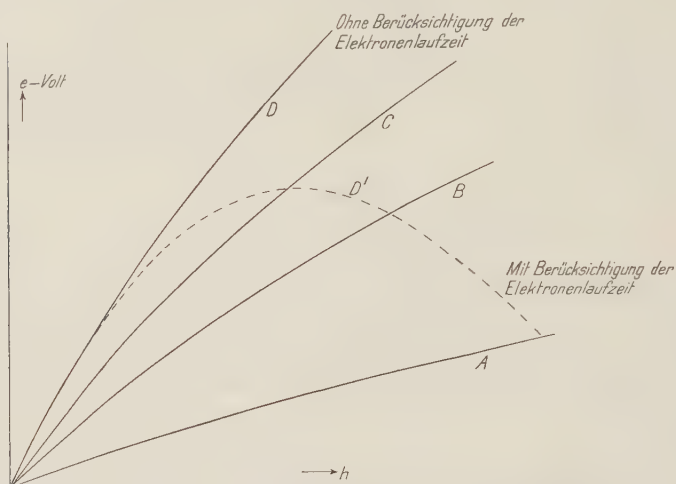


Fig. 6.

Pro Resonator übertragbare Energie für die Resonatorform *A* bis *D*.

HANSEN¹¹⁾ hat darauf hingewiesen, dass eine weitere Verbesserung durch Abrundung der äusseren Kanten des Zylinders erzielt werden könnte. Auf diese Weise würde aber nur eine unwesentliche Verbesserung auf Grund einer erheblichen konstruktiven Komplizierung erzielt werden können.

b) Der Kugelresonator:

Er besitzt eine sehr hohe Parallel-Impedanz. Da die Elektronen ihn parallel zu den Feldlinien längs eines Durchmessers durchdringen müssen, ist der Laufzeitwinkel aber sehr gross, und die Wirkung dieser Resonatorform als Beschleuniger ist schlecht.

c) Der Doppelkonusresonator:

Besser in dieser Hinsicht ist der Doppelkonusresonator, d. i. ein Kugelresonator mit 2 sich im Innern der Kugel gegenüberstehenden

Kegeln, deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel liegen und deren Mantellinien mit der Achse im optimalen Fall einen Winkel von 90° bilden.

In der folgenden Tabelle sind die Werte für die Parallelimpedanz R_p , die Wellenlänge λ als Funktion des Durchmessers d , der Laufzeitfaktor $\frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2}$ und schliesslich die übertragbare Energie für den optimalen Zylinderresonator, den Kugelresonator und den Doppelkonusresonator zusammengestellt.

	Zylinderresonator $k = 0,44$	Kugelresonator	Doppelkonus- resonator
Parallelimpedanz R_p in Ω	$13,2 \cdot 10^5 \sqrt{d_{cm}}$	$29,25 \cdot 10^5 \sqrt{d_{cm}}$	$11,9 \cdot 10^5 \sqrt{d_{cm}}$
Resonanzwellen- länge	$\lambda_{cm} = 1,31 \cdot d_{cm}$	$\lambda_{cm} = 1,14 \cdot d_{cm}$	$\lambda_{cm} = 2 d_{cm}$
Laufzeitfaktor $\frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2}$	0,71	0,13	1,0
Übertragbare Energie in e-Volt	$U = 1,16 \cdot 10^3 \sqrt{N} \sqrt[4]{d}$	$U = 0,32 \cdot 10^3 \sqrt{N} \sqrt[4]{d}$	$U = 3,26 \cdot 10^3 \sqrt{N} \sqrt[4]{d}$
desgl. für $N = 1$ Watt und $d = 20$ cm	$U = 2440$ e-Volt	$U = 675$ e-Volt	$U = 3260$ e-Volt

Alle diese Resonatorformen bringen also gegen den einfachen Zylinderresonator keine wesentlichen Vorteile. Man wird diesen daher in der Regel vorziehen. Jedoch muss noch ein anderer Gesichtspunkt erwähnt werden: bei der Form C des Zylinderresonators (Fig. 5) und bei dem Doppelkonusresonator sind die einzelnen Resonatoren durch ziemlich lange, feldfreie Räume getrennt, sie sind alle gegeneinander weitgehend entkoppelt, und es wird daher keine Schwierigkeiten machen, die Phase jedes Resonators ohne Zieherscheinungen optimal einzustellen. Auch lässt sich unter Umständen der feldfreie Raum zur Unterbringung magnetischer Fokussierungsspulen verwenden.

III. Die Elektronenbeschleunigung in einem Wellenleiter.

Wir legen diesem Abschnitt, der sich mit dem auf Seite 235 diskutierten Grenzfall b beschäftigt, eine allgemeinere Betrachtungsweise zu Grunde, die es uns ermöglicht, auch einige Ergebnisse des Abschnittes II als Spezialfall zu erhalten.

Der Feldverlauf einer fortschreitenden E_{01} -Welle in einem kreisförmigen Wellenleiter ist bereits in Fig. 1b wiedergegeben. Unter den E-Typen, d. h. Wellenformen mit longitudinalem elektrischen Feld besitzt die E_{01} -Welle die grösste Grenzwellenlänge und geringste Dämpfung. Sie ist dem vorliegenden Problem am besten angepasst. Wie wir jedoch ebenfalls auf Seite 235 erwähnten, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Rohrleitungswelle stets grösser als Lichtgeschwindigkeit. Ein mit der Welle längs der Achse des Rohrleiters wanderndes Elektron, bleibt also sehr bald gegen die Welle zurück, selbst dann, wenn das Elektron schon praktisch Lichtgeschwindigkeit besitzt.

Von den beiden Möglichkeiten, die E_{01} -Welle trotzdem zur Partikelbeschleunigung auszunutzen: erstens der «Belastung» durch eingesetzte Blenden und zweitens der Beschränkung auf kurze Stücke eines Wellenleiters soll hier nur der zweite Fall besprochen werden. Natürlich lassen sich beliebig viele derartige Wellenleiterstücke hintereinander anordnen, wobei sie voneinander durch Wände mit möglichst kleiner Öffnung zum Durchtritt des Elektronenstrahles abgetrennt sind. Da es sich nur um kurze Stücke der einzelnen Wellenleiter handeln wird, kommen nur stehende Wellen in Frage, deren Feldstärke, z. B. bei der E_{011} -Welle zirka 100mal so gross ist wie die der fortschreitenden Welle.

1. Die Feldgleichungen der E_{01} -Welle.

Unter Zugrundelegung der komplexen Schreibweise lassen sich die Feldgleichungen der stehenden E_{01} -Welle für die Resonanzfrequenz ω_r im internationalen elektrotechnischen Maßsystem (vergl. R. J. SARBACHER und W. A. EDSON¹²) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} E_x &= -j \cdot 2 A J_0 \left(r \frac{r_{01}}{a} \right) \sin \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{lx}{x_0} \right) \right\} e^{j\omega t} \\ E_r &= j \cdot 2 A \frac{\beta_{01} a}{r_{01}} J_1 \left(r \frac{r_{01}}{a} \right) \cos \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{lx}{x_0} \right) \right\} e^{j\omega t} \\ H_\phi &= 2 A \frac{\omega_r \epsilon_1}{r_{01}} a \cdot J_1 \left(r \frac{r_{01}}{a} \right) \sin \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{lx}{x_0} \right) \right\} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (10)$$

Dabei stellen E_x , E_r und H_ϕ die Komponenten des elektrischen bzw. magnetischen Feldes längs der Koordinaten x , r und Φ dar. A ist ein Zahlenfaktor, der die Amplitude des Feldes charakterisiert, J_0 bzw. J_1 sind die Besselschen Funktionen nullter bzw. erster Ordnung des Argumentes $(r \cdot (r_{01}/a))$ worin a den Radius des kreis-

förmigen Wellenleiters, r_{01} die erste Wurzel von J_0 bedeuten ($r_{01} = 2,405$). x_0 ist die Länge eines $\lambda/2$ -Stückes des Wellenleiters, l gibt die Zahl der $\lambda/2$ -Stücke des Wellenleiters an (l ist 1, 2, 3 usw.). Zur Abkürzung ist ferner gesetzt:

$$\beta_{01} = \sqrt{\omega_r^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2}$$

β_{01} wird bisweilen als Ausbreitungskonstante bezeichnet. Ferner sind

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \mu_1 = \mu \cdot \mu_0$$

mit der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ des Dielektrikums im Innern des Wellenleiters, so dass im Vakuum $\varepsilon = \mu = 1$ ist.

ε_0 und μ_0 sind die Influenz- und Induktionskonstanten, die in dem verwendeten internationalen Maßsystem die Zahlenwerte haben:

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Farad/meter}$$

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Henry/meter.}$$

Die im Abschnitt II besprochene Schwingungsform der E_{010} -Welle mit achsenparallelen, geradlinigen elektrischen Feldlinien kann aufgefasst werden als Grenzfall der E_{01} -Welle bei unendlich grosser Rohrleitungswellenlänge. Die Frequenz entspricht dabei der Grenzfrequenz der E_{01} -Welle und ist nur durch den Zylinderdurchmesser bestimmt. Für diese Grenzfrequenz gilt

$$\omega_0 = 2 \pi \nu_0 = c \cdot \frac{r_{01}}{a}$$

Die Höhe des Zylinders beeinflusst bei dieser Schwingungsform lediglich die Dämpfung. Bei der E_{01} -Welle ist die Frequenz stets grösser als diese Grenzfrequenz. Für die Resonanzfrequenzen muss die Höhe des Zylinders das l -fache eines $\lambda/2$ -Stückes betragen, so dass die Resonanzfrequenz bei dieser Schwingungsform nicht nur von dem Durchmesser, sondern auch von der Höhe des Zylinders abhängt.

Da für $r = 0$ die Besselsche Funktion $J_0 = 1$ wird, ergibt sich aus der ersten Gleichung (10) für die Amplitude der longitudinalen Feldstärke in der Achse des Wellenleiters

$$E_0 = 2 A \left(\frac{\text{Volt}}{\text{m}} \right).$$

2. Berechnung der axialen Feldstärke.

Zur Bestimmung des Zahlenwertes von A müssen die Verluste in der zylindrischen Mantelfläche und in den beiden Endflächen des Wellenleiters berechnet werden. Mit Hilfe des komplexen Poynting'schen Vektors lässt sich für die Verluste schreiben:

$$P = \frac{1}{2} \eta \iint (H_{0t})^2 dS \quad (11)$$

wobei H_{0t} die Amplitude der tangentiellen Komponente der magnetischen Feldstärke ist, die sich aus den Feldgleichungen ergibt.

Wir nehmen hierbei an, dass der Feldverlauf bei der praktisch vorkommenden Dämpfung nicht merklich von dem durch die Gleichungen (10) gegebenen abweicht. Ferner ist

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{\mu_2 \cdot \mu_0}{\sigma_2}}$$

Hierin ist μ_2 die Permeabilität, σ_2 die Leitfähigkeit des den Wellenleiter begrenzenden Metalles und μ_0 die Induktionskonstante. Das Integral ist über die ganze Oberfläche des Wellenleiters zu erstrecken*).

Für die E_{01i} -Wellen allgemein werden die Verluste in den beiden Endflächen des Wellenleiters zusammen:

$$P_x = \eta \cdot A^2 J_1^2(r_{01}) \left(\frac{a \omega \epsilon_0}{r_{c1}} \right)^2 \cdot \pi a^2 \quad (12)$$

und analog in der zylindrischen Mantelfläche

$$P_r = \eta \cdot A^2 \cdot J_1^2(r_{01}) \left(\frac{a \omega \epsilon_0}{r_{01}} \right) 2 \pi a l x_0 \quad (13)$$

Für die Länge x_0 eines $\lambda/2$ -Stückes gilt

$$x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2}} \quad (14)$$

Vernachlässigen wir zunächst die Energieübertragung auf die zu beschleunigenden Elektronen, so setzt sich die zugeführte Leistung N ausschliesslich in die Verluste ($P_x + P_r$) um. Bei gegebenen

*) Durch Anwendung der Formel (11) auf die in Abschnitt II besprochenen zylindrischen Hohlraumresonatoren lassen sich natürlich auch die Formeln (1) bez. (2) für die Grösse des Parallelwiderstandes R_p sehr einfach ableiten. Es ist dabei lediglich zu berücksichtigen, dass die Ausgangsgleichungen (10) mit der Längeneinheit m , die Gleichungen (1) und (2) dagegen mit der Längeneinheit cm geschrieben wurden.

Durchmesser und Materialkonstanten (μ_2, σ_2) des Wellenleiters kann damit zu jeder Frequenz ω der Amplitudenfaktor A berechnet werden. Die maximale Feldstärke in der Achse des Wellenleiters ergibt sich dann nach (10) zu $E_{\max} = 2A$. Für den Rohrdurchmesser $2a = 0,2$ m und Kupfer als Wandungsmaterial sind die Werte für E_{\max} bei einer zugeführten Leistung von 1 Watt für einige Frequenzen und $l = 1$ bis 6 in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

Maximale Feldstärke in Volt/m $\cdot 10^{-3}$ für $N = 1$ Watt						
$\omega = 2\pi\nu$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$
$72,2 \cdot 10^8$	12,5	9,1	7,4	6,5	5,8	5,3
$75 \cdot 10^8$	23	17,6	14,8	13,0	11,7	10,8
$80 \cdot 10^8$	25,0	19,9	17,1	15,2	14,0	12,7
$90 \cdot 10^8$	24,2	20,0	17,4	15,6	14,3	13,3
$100 \cdot 10^8$	22,4	18,9	16,7	15,0	13,8	12,9
$120 \cdot 10^8$	18,9	16,6	14,7	13,4	12,4	11,7
$150 \cdot 10^8$	15,0	13,4	12,1	11,2	10,5	10,0
$200 \cdot 10^8$	10,8	10,0	9,2	8,6	8,1	7,7

Die maximalen Werte jeder Kolonne sind unterstrichen. Der grösste mit 1 Watt Leistung erreichbare Wert der Feldstärke beträgt also zirka $25 \cdot 10^3$ Volt/m = 250 Volt/cm.

3. Die Energieübertragung auf die Elektronen.

Die auf die Elektronen übertragbare Energie ergibt sich, indem man in das Integral $\int_0^x E_x dx$ die jeweils am Ort des Elektrons bestehende Feldstärke einsetzt. Es übernimmt dasjenige Elektron die maximale Energie, das die Mitte des Wellenleiters so passiert, dass es mit der elektrischen Feldstärke «in Phase» ist. Ob diese Phasenlage aus Gründen der Fokussierung und Bündelung zweckmässig ist, soll hier nicht untersucht werden. Für einen Wellenleiter von der Länge eines $\lambda/2$ -Stückes ist die Verteilung der achsialen elektrischen Feldstärke in Fig. 7a dargestellt. Maximale Energieübertragung findet auf dasjenige Elektron statt, das den Knoten in der Mitte des $\lambda/2$ -Stückes zu der Zeit passiert, in der die elektrische Feldstärke in dem Wellenleiter durch Null geht. Erstreckt sich der Wellenleiter in der x -Richtung und legen wir den Nullpunkt an die

Stelle des Knotens, so lässt sich der Verlauf der elektrischen Feldstärke in der stehenden Welle in der Form darstellen:

$$E = 2 A \sin \frac{2\pi x}{A} \sin \frac{2\pi vt}{A} \quad (15)$$

wobei v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Rohrleitungswelle ist. Für das «optimale» Elektron, das sich bereits mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen soll, gilt dann

$$x = c \cdot t \text{ bzw. } t = \frac{x}{c}$$

Es ist also

$$E = 2 A \sin \frac{2\pi x}{A} \sin \left(\frac{2\pi x}{A} \frac{v}{c} \right) \quad (16)$$

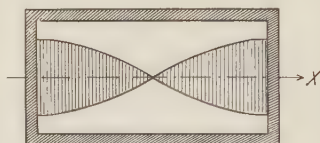


Fig. 7a.

Verteilung der achsialen elektrischen Feldstärke bei der E_{011} -Schwingung.

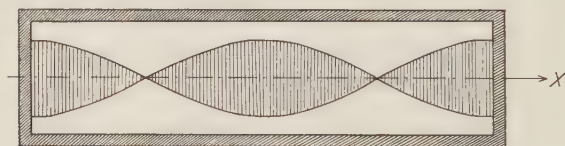


Fig. 7b.

Verteilung der achsialen elektrischen Feldstärke bei der E_{012} -Schwingung.

die Feldstärke, die das Elektron beim Passieren des Wellenleiters antrifft. Die Energie in e-Volt, die es auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = A/4$ übernimmt, ist daher

$$U_{(A/4)} = \int_0^{A/4} E \, dx,$$

während die Gesamtenergie von $x = -A/4$ bis $x = +A/4$ doppelt so gross wird. Für diese ergibt sich also

$$U_{l=1} = 2 \int_0^{A/4} E \, dx$$

Auch für alle übrigen Wellenleiter mit ungeradzahligem l liegt der Knoten in der Mitte des Wellenleiters, und es gilt allgemein

$$U_l = 2 \int_0^{l \cdot A/4} E \, dx$$

Zur Durchführung der Integration ist es bequemer, an Stelle von (16) die Summendarstellung zu verwenden

$$E = A \left[\cos \left(\frac{2\pi x}{A} \frac{v-c}{c} \right) - \cos \left(\frac{2\pi x}{A} \frac{v+c}{c} \right) \right] \quad (17)$$

Für den Wellenleiter mit $2 \cdot A/2$ -Stücken ($l = 2$) ist die Feldverteilung in Fig. 7b dargestellt. Wir legen den Nullpunkt des Koordinatensystems wieder in die Mitte des Wellenleiters. Er fällt mit dem Anfang eines $A/2$ -Stückes zusammen, und wir können nun für die elektrische Feldstärke der stehenden Welle schreiben

$$E = 2 A \cos \frac{2\pi x}{A} \cos \frac{2\pi vt}{A} \quad (18)$$

Das «optimale» Elektron passiert die Stelle $x = 0$ zur Zeit maximaler elektrischer Feldstärke, d. h. zur Zeit $t = 0$. Es ist daher wieder

$$x = c \cdot t \text{ bzw. } t = \frac{x}{c}$$

und durch Einsetzen ergibt sich

$$E = 2 A \cos \frac{2\pi x}{A} \cos \left(\frac{2\pi x}{A} \frac{v}{c} \right). \quad (19)$$

Für die von dem Elektron beim Passieren des Wellenleiters übernommene Energie gilt analog

$$U_{l=2} = 2 \int_0^{A/2} E \, dx$$

Für den allgemeinen Fall mit geradzahligem l wird

$$U_l = \int_0^{l/2 \cdot A/2} E \, dx.$$

Zur Integration ist es wieder zweckmässig, E in Summenform zu schreiben. Es ist dann

$$E = A \left[\cos \left(\frac{2\pi x}{A} \frac{v-c}{c} \right) + \cos \left(\frac{2\pi x}{A} \frac{v+c}{c} \right) \right]. \quad (20)$$

Die Ergebnisse der Integration von (17) und (20) lassen sich in einer für die numerische Auswertung sehr bequemen Form zusammenfassen. Es wird für gerade und ungerade l :

$$U_l = \frac{A \cdot A}{\pi} \left[\frac{1}{v/c+1} + \frac{1}{v/c-1} \right] \sin \left[\frac{l\pi}{2} \left(\frac{v}{c} + 1 \right) \right]. \quad (21)$$

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung sind in den Figuren 8 und 9 dargestellt. Fig. 8 zeigt die pro Wellenleiter übertragbare

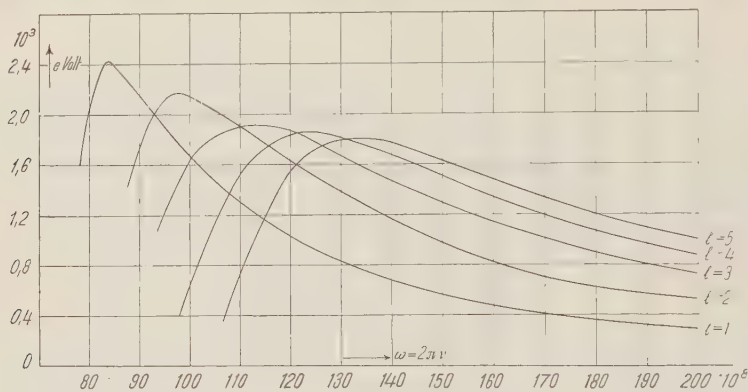


Fig. 8.

E_{01l} -Welle. In einem Resonator mit 1 Watt Leistung übertragbare Energie.

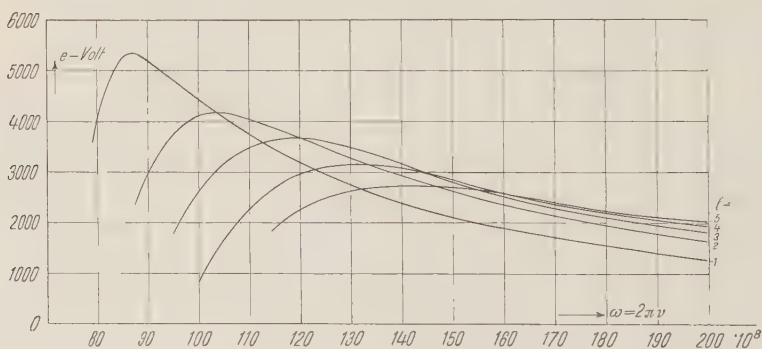


Fig. 9.

E_{01l} -Welle. Pro Meter Länge mit 1 Watt Leistung übertragbare Energie.

Energie in e-Volt bei Leistungszufuhr von 1 Watt. Das Maximum der Energie von etwas mehr als $2,4 \cdot 10^3$ e-Volt wird in einem kurzen Wellenleiter übertragen, der nur ein $\lambda/2$ -Stück enthält. Für längere Wellenleiter mit mehreren $\lambda/2$ -Abschnitten verschiebt sich das Maximum zu höheren Frequenzen, bei denen die Differenz zwischen

der Phasengeschwindigkeit der Welle und der Wanderungsgeschwindigkeit des Elektrons geringer ist. In Fig. 9 ist die Energie aufgetragen, die bei 1 m Länge des Beschleunigungssystems übertragen werden kann, bei Zufuhr der Leistung von 1 Watt pro m des Beschleunigungssystems. Das Maximum mit zirka 5250 e-Volt wird wiederum bei Unterteilung des Beschleunigungssystems in kurze $\lambda/2$ -Stücke erzielt.

4. Der Einfluss einer geometrisch ähnlichen Veränderung der Dimensionen des Beschleunigers.

Es ist interessant, den Einfluss einer geometrisch ähnlichen Veränderung der linearen Dimensionen des Beschleunigers — bei entsprechender Änderung der Wellenlänge — abzuschätzen.

Aus den Formeln (15) und (16) folgt:

$$(P_r + P_x) = C_1 \cdot A^2 \cdot \lambda^{3/2}$$

wobei C_1 , ebenso wie die im folgenden verwendeten Symbole C_i bei geometrisch ähnlicher Deformation unverändert bleiben. Bei konstanter zugeführter Leistung $N = P_r + P_x$ ergibt sich also für den Amplitudenfaktor

$$A = C_2 \sqrt{N} \frac{1}{\lambda^{3/4}}$$

d. h. die Feldstärke steigt mit abnehmender Wellenlänge ziemlich rasch an. Die pro Resonator übertragbare Energie

$$U_{(R)} = C_3 \cdot A \cdot \lambda = C_4 \cdot \sqrt{N} \lambda^{1/4}$$

wird aber von einer Dehnung oder Schrumpfung nur wenig beeinflusst.

Auf die Längeneinheit des Beschleunigers kommen $n = C_5/\lambda$ Resonatoren. Die Gesamtenergie pro Längeneinheit, die mit \sqrt{n} ansteigt, wird also

$$U_{(m)} = C_6 \sqrt{N} \lambda^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C_6 \sqrt{N} \frac{1}{\lambda^{1/4}}.$$

Man kann also durch Reduktion der geometrischen Dimensionen bzw. der Wellenlänge nur wenig an Gesamtenergie pro Längeneinheit gewinnen. Der physikalische Grund hierfür ist folgender: Die Zunahme der Feldstärke mit abnehmender Dimension beruht auf der Abnahme der Oberfläche des einzelnen Resonators. Da mit abnehmenden Dimensionen aber mehr Resonatoren in der Längeneinheit des Beschleunigers enthalten sind, wird der Einfluss der

Oberflächenabnahme wieder fast aufgehoben. Diese Überlegungen gelten offenbar sowohl für die im Abschnitt II besprochenen Einzelresonatoren und stimmen mit den dort erhaltenen Ergebnissen überein, als auch für den allgemeinen Fall der Wellenleiter des E_{01} -Types.

5. Elektronenbeschleunigung

mit Hilfe des transversalen elektrischen Feldes einer H-Welle.

Wie wir bereits erwähnt haben, ist von mehreren Seiten vorgeschlagen worden (^{9, 13}), das transversale elektrische Feld einer H-Welle auszunützen. HUDSPETH schlägt vor, den Wellenleiter in einer Spirale aufzuwickeln und den Elektronenstrahl quer durch die Windungen der Spirale hindurchzuschicken. CULLEN und GREIG haben ebenfalls das transversale Feld in einem mehrfach gefalteten Wellenleiter ausgenützt und 350 KV-Elektronen mit allerdings beträchtlichem Leistungsaufwand erhalten.

Da die einzelnen Leiterstücke des Wellenleiters bei diesen Ausführungsformen nebeneinander liegen, werden hierfür in erster Linie ebenflächig begrenzte Wellenleiter in Frage kommen. Feldverlauf und Dämpfung sind am günstigsten bei der H_{01} -Welle. Die Koordinatenachsen mögen parallel zu den Kanten des quaderförmigen Resonators verlaufen, die Welle pflanze sich in der x -Richtung fort, die elektrischen Feldlinien verlaufen parallel zur y -Achse. Wird der Wellenleiter an beiden Enden reflektierend abgeschlossen, so bilden sich stehende Wellen aus, die zur Resonanz kommen, wenn die Länge des Wellenleiters in der x -Richtung ein Vielfaches der halben Rohrleitungswellenlänge ist. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall der H_{01} -Welle, wenn die Länge des Wellenleiters in der x -Richtung eine halbe Wellenlänge beträgt. Die Dimensionen des Wellenleiters längs der 3 Koordinatenachsen seien x_0, y_0, z_0 und die Feldgleichungen lauten (s. z. B. SARBACHER und EDSON¹²)

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -j \cdot 2 A \cos\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right) e^{j\omega t} \\ H_z &= j \cdot 2 A \frac{z_0}{\pi} \beta_{01} \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{x_0}\right) e^{j\omega t} \\ E_y &= 2 A \frac{z_0}{\pi} \omega \mu_0 \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right) e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

mit

$$\beta_{01} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{z_0}\right)^2}.$$

Für die Verluste in den Begrenzungsflächen ergibt sich

$$P = \sqrt{\frac{\mu_2 \pi \cdot r}{\sigma_2}} A^2 \left\{ 2 y_0 z_0 \left(\frac{z_0}{x_0} \right)^2 + z_0 x_0 \left[1 + \left(\frac{z_0}{x_0} \right)^2 \right] - 2 y_0 x_0 \right\} \quad (23)$$

Die Resonanzfrequenz ist gegeben durch

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{x_0^2}} \quad (24)$$

hängt also nicht von y_0 ab. Aus den Gleichungen (23) und (24) kann die Grösse A ermittelt werden. In der Mitte des Resonators ($x = x_0/2$, $y = y_0/2$) ergibt sich dann nach (22) für den Scheitelwert der Feldstärke E_y

$$E_{y_0} = 2 A \frac{z_0}{\pi} \omega \mu_0$$

Infolge der endlichen Elektronenlaufzeit ist diese Feldstärke aber nicht voll auszunutzen, sondern muss wie in Abschnitt II, 1 (Formel 4) mit dem Laufzeitfaktor $(\sin \varphi/2)/(\varphi/2)$ multipliziert werden, worin für den Laufzeitwinkel φ des Elektronendurchganges gilt

$$\varphi = 2 \pi \frac{y_0}{\lambda}$$

Für die übertragbare Energie ergibt sich also schliesslich

$$U = 4 A \frac{c \mu_0 z_0}{\pi} \sin \frac{\pi \nu y_0}{c} \quad (25)$$

Wird A aus (23), ν aus (24) in (25) eingesetzt, so entsteht eine Beziehung für die Energie U , die ausser den Materialkonstanten μ_2 und σ_2 die Dimensionen x_0 , y_0 und z_0 des quaderförmigen Resonators enthält. Zur Ermittlung der günstigsten Gestalt kommt es auf das Verhältnis $x_0 : y_0 : z_0$ an.

Setzen wir

$$x_0 = \alpha \cdot z_0$$

$$y_0 = \beta z_0$$

$$z_0 = z_0$$

ein, so erhalten wir schliesslich den folgenden Ausdruck für die Energie U in e-Volt, die bei der zugeführten Leistung von $P = 1$ Watt erreicht werden kann:

$$U = 4 \sqrt[4]{\frac{2 \sigma_2}{\pi c \mu_2}} \frac{c \mu_0}{\pi} \sqrt[4]{z_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2 \beta}{\alpha^2} + \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2 \pi \beta}} \sin \left(\frac{\pi \beta}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} \right). \quad (26)$$

Dieser Ausdruck hat ein Maximum für $\alpha \sim 1,2$, $\beta \sim 0,7$. Setzen wir

$$\sigma_2 = 5,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1}/\text{m}.$$

$$\mu_2 = \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry/m}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m sec}^{-1} \text{ und}$$

$$z_0 = 0,2 \text{ m}$$

so erhalten wir

$$U \sim 2\,420 \text{ e-Volt.}$$

Es ist das nahezu derselbe Wert, wie er sich für einen zylindrischen Dosenresonator von 20 cm Durchmesser mit der E_{010} -Welle ergibt. Trotzdem ist der zylindrische Resonator erheblich überlegen, da er denselben oder sogar einen noch etwas grösseren Energiebetrag bei einer wesentlich geringeren Oberflächengrösse ergibt.

Bei Dimensionierung auf maximale Energieübertragung pro *Längeneinheit* des Beschleunigungssystems nimmt der Resonator natürlich ähnlich wie der Zylinderresonator eine flachere Gestalt an. Es ergeben sich hierfür die Werte $x_0 \sim 0,8 \cdot z_0$, $y_0 \sim 0,35 \cdot z_0$ und die mit 1 Watt Leistung übertragbare Energie wird $U_m \sim 7600 \text{ e-Volt}$.

Die Feldstärken nehmen bei Resonatoren grösserer Länge ($l = 2, 3$ usw.) rasch ab. Ein langer Wellenleiter, wie ihn HUDSPETH vorge schlagen hat, könnte aber trotzdem vorteilhaft sein, wenn die Verluste vorwiegend in den Endflächen entstehen, die zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen. Wie die Durchrechnung zeigt, sind aber die Verluste bei allen Begrenzungsflächen von derselben Grössenordnung. Es ist daher nicht zu erwarten, dass die vorgeschlagene oder eine ähnliche Anordnung mit ausgedehnten Begrenzungsflächen grössere Beschleunigungsenergien ergeben würde, als in zylindrischen Wellenleitern mit longitudinalem Feld.

IV. Zusammenstellung und Vergleich.

In Fig. 10 sind die mit 1 Watt Leistung erreichbaren Elektronenenergien aufgetragen. Die linke Skala stellt die in einem Einzelresonator erzielbare Maximalenergie, die rechte Seite die in einem Meter Länge des Beschleunigungssystems übertragbare Elektronenenergie dar. Alle Werte sind errechnet für Kupfer als Wandungsmaterial*). Bei den verschiedenen Resonatorformen ist nicht die Resonanz-Wellenlänge, sondern der Durchmesser des Beschleunigungssystems konstant gehalten ($d = 20 \text{ cm}$). Bei dem Vergleich

*) Über die Wirkung dünner Silberschichten auf einem andern Grundmaterial siehe W. DÄLLENBACH¹⁴⁾.

fällt auf, dass im Wellenleiter die E_{011} -Welle zwar fast dieselbe e-Volt-Energie liefert wie der optimale Zylinderresonator mit der E_{010} -Welle, dass aber auf der rechten Skala der Wellenleiter einen sehr viel geringeren Wert als der Zylinderresonator ergibt. Dies rührt her von der beträchtlich grösseren Höhe des E_{011} -Resonators. Der Masspfeil längs der rechten Skala gibt den Bereich der von GINZTON, HANSEN und KENNEDY⁶⁾ in Tabelle 1 ihrer Arbeit ange-

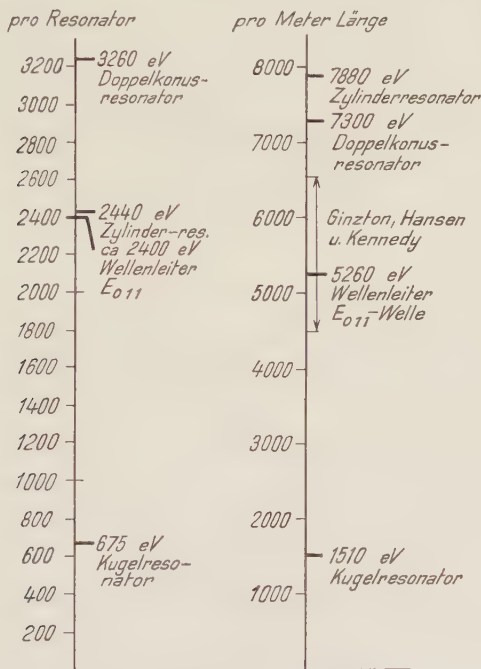


Fig. 10.

Mit 1 Watt Leistung bei einem Durchmesser $d = 20$ cm übertragbare Energie.

gebenen e-Volt-Energien an, ebenfalls umgerechnet auf 20 cm Durchmesser des Beschleunigungsrohres. Die Werte beziehen sich auf den durch eingesetzte Blenden belasteten Wellenleiter für eine fortschreitende E_{011} -Welle bei verschiedener Art der Leistungszufuhr.

In Fig. 11 sind einige mit Einzelresonatoren experimentell erreichte Partikelenergien eingetragen, für die entsprechende Daten in der Literatur angegeben waren. Die klassischen Werte von SLOAN und LAWRENCE⁴⁾, die mit einem 30stufigen Beschleuniger erzielt wurden, sind zum Vergleich umgerechnet auf die in einer Stufe erreichte Energie. Die eingezeichneten Punkte bestätigen sehr

schön das $U = k \cdot \sqrt{N}$ -Gesetz. Die beiden Geraden für den Doppelkonus- und den optimal dimensionierten Zylinderresonator sind errechnet und gelten für $\lambda = 10$ cm.

Die Frage des Leistungsbedarfes ist aber nicht allein ausschlaggebend bei der Konstruktion eines Beschleunigers. Die Schwingungsphase in den aneinandergereihten Einzelresonatoren oder den

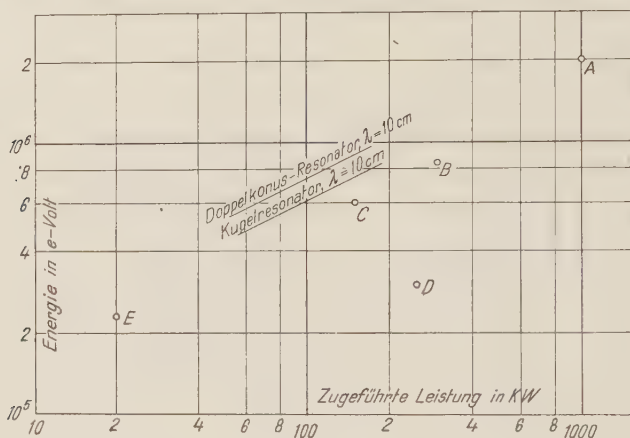


Fig. 11.

A: I. HALPERN, E. EVERHART, R. A. RAPUANO, I. C. SLATER (M. I. T.), Phys. Rev. **69**, 688 (1946).

B: W. D. ALLEN, J. L. SYMONDS, Proc. Phys. Soc. **59**, 622 (1947).

C: BOWEN, PULLEY, GOODEN, Nature **157**, 840 (1946).

D: A. B. CULLEN, I. H. GREIG, Journ. of appl. Phys. **19**, 47 (1948).

E: D. H. SLOAN, E. O. LAWRENCE, Phys. Rev. **38**, 2021 (1931).

aufeinanderfolgenden Stücken des Wellenleiters muss auf den günstigsten Wert eingestellt sein, und es ist einleuchtend, dass diese Aufgabe um so einfacher wird, je weniger derartige Glieder einzustellen sind. Es ist dies ein Gesichtspunkt, der zu Gunsten des belasteten Wellenleiters spricht, bei dem die Leistungszuführung in grösseren räumlichen Abständen geschehen kann.

Noch einige andere Probleme sollen kurz erwähnt werden, ohne näher auf sie einzugehen:

Das Problem der Wärmeabfuhr: Obwohl die Hochfrequenzleistung nur impulsweise zugeführt wird und die mittlere Leistung nur von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-2} der Impulsleistung ist, sind diese Leistungen erheblich. Das Problem ist wichtig, weil thermisch verursachte Änderungen der Dimensionen die Abstimmung und Phasenlage der Resonatorschwingungen erheblich beeinflussen können.³²⁾

Elektronenoptische Probleme: Sie können grosse Schwierigkeiten verursachen, doch haben die meisten inzwischen durchgeführten experimentellen Untersuchungen gezeigt, dass es durchaus möglich ist, diese Schwierigkeiten zu überwinden und selbst bei sehr grosser Länge des Beschleunigungsrohres den Elektronenstrahl in guter Bündelung und Fokussierung hindurch zu leiten.

Vorstehende Ausführungen sollen einige der interessanten Probleme, die bei der Entwicklung eines Hochfrequenzbeschleunigers auftreten, beleuchten. So weit als möglich sind einige dieser Probleme durch Zahlenangaben ergänzt. Besonders hinsichtlich der Frage des Leistungsbedarfes wird dadurch anschaulich, dass zwar verschiedene Möglichkeiten für die Konstruktion eines Linearbeschleunigers bestehen, dass sie aber alle die gleiche Grössenordnung an Hochfrequenzleistung erfordern. Diese Leistung liegt für 10^8 e-Volt bei 10^7 bis 10^9 Watt.

Literaturverzeichnis.

- 1) G. ISING, Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen hoher Voltzahl. Ark. f. Mat. Astron och Fys **18**, Nr. 30, 1925.
- 2) R. WIDEROE, Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher Spannungen, Arch. f. Elektr. **21**, 387 . . 406 (1928).
- 3) J. THIBAUD, Production d'ions positifs de vitesse élevée par accélération multiples. Comptes rendus **194**, 360. . 362 (1932).
- 4) D. H. SLOAN and E. O. LAWRENCE, The production of heavy high speed ions without the use of high voltages. Phys. Rev. **38**, 2021 . . 2032 (1931).
- 5) J. R. WOODYARD, A Comparison of the High Frequency Accelerator and Betatron as a Source of High Energy Electrons. Phys. Rev. **69**, 50 (1946). D 3.
- 6) E. L. GINZTON, W. W. HANSEN, W. R. KENNEDY, A linear Electron Accelerator. The Rev. of Scient. Instr. **19**, 89. . 108 (1948).
- 7) R. O. HAXBY, E. S. AKELEY, A. GINZBARY, R. N. SMITH, H. W. WELCH and R. M. WHALEY, Preliminary Studies on the Purdue Microwave Electron Accelerator, Phys. Rev. **70**, 797 (1946). A 4.
- 8) W. D. ALLEN and J. L. SYMONDS, Experiments in Multiple-Gap Linear Acceleration of Electrons. Proc. Phys. Soc. **59**, 622. . 629 (1947).
- 9) E. L. HUDSPETH, Wave Guide Acceleration of Particles. Phys. Rev. **69**, 671 (1946).
- 10) C. G. A. VON LINDERN und G. DE VRIES, Scheibenförmige Hohlräume als elektrische Resonatoren. Phil. Techn. Rundsch. **8**, 149. . 160 (1946).
- 11) W. W. HANSEN, A Type of electrical resonator, Jour. of appl. Phys. **9**, 654 (1938).
- 12) R. J. SARBACHER and W. A. EDSON, Hyper and Ultra High Frequency Engineering, 6. Aufl., Verlag John Wiley & Sons, Inc., New York 1947.
- 13) A. B. CULLEN and J. H. GREIG, A Resonant Cavity Linear Accelerator Journ. of appl. Physics, **19**, 47. . 50 (1948).
- 14) W. DÄLLENBACH, Stromwärmeverluste an Leitern und Isolatoren mit leitender Oberflächenschicht. Bull. SEV. Nr. **14** (1948).
- 15) L. W. ALVAREZ, The Design of a Proton Linear Accelerator. Phys. Rev. **70**, 789. . 800 (1946) A 10.

- ¹⁶⁾ W. K. H. PANOFSKY, Measurement of Electric Field-Strength in a Cavity Resonant at 200 mc. Phys. Rev. **70**, 447 (1946) B 8.
- ¹⁷⁾ J. R. WOODYARD, E. A. MARTINELLI, W. TOULIS, W. K. H. PANOFSKY, Methods of Driving a High Q. Cavity with many Self Excited Oscillators. Phys. Rev. **70**, 447 (1946) B 9.
- ¹⁸⁾ F. OPPENHEIMER, L. H. JOHNSTON, C. RICHMAN, Drift Tubes for Linear Proton Accelerator. Phys. Rev. **70**, 447-448 (1946) B 10.
- ¹⁹⁾ W. K. H. PANOFSKY, C. RICHMAN, F. OPPENHEIMER, Control of the Field Distribution in the Linear Accelerator Cavity. Phys. Rev. **73** 535, 1948. C 8.
- ²⁰⁾ E. M. Mc. MILLAN: Resonance Acceleration of Charged Particles. Phys. Rev. **70**, 800 (1946).
- ²¹⁾ H. BRADNER, R. CRAWFORD, H. GORDON, J. R. WOODYARD, Physical Design of the Berkeley Linear Accelerator. Phys. Rev. **73**, 534 (1948) C 7.
- ²²⁾ W. R. BAKKER, J. V. FRANCK, J. D. GOW, Linear Accelerator Oscillator and Coupling System. Phys. Rev. **73**, 535 (1948) C 9.
- ²³⁾ General Electric Rev. June 1947.
- ²⁴⁾ J. HALPERN, E. EVERHART, R. A. RAPUANO, J. C. SLATER, Preliminary Studies on the Design of a Microwave Linear Accelerator. Phys. Rev. **69**, 688 (1946) G 10.
- ²⁵⁾ J. C. SLATER, The Design of Linear Accelerators. Phys. Rev. **70**, 799 (1946) A 9.
- ²⁶⁾ E. S. AKELEY, The Study of a Certain Type of Resonant Cavity and its Application to a Charged Particle Accelerator. Journ. of Appl. Phys. **17**, 1056 ..1060 (1946).
- ²⁷⁾ Electronics, Nov. 1947. S. 144 (Electron Linear Accelerator Demonstrated).
- ²⁸⁾ H. L. SCHULTZ, R. BERINGER, C. L. CLARKE, J. A. LOCKWOOD, R. L. Mc. CARTHY, C. G. MONTGOMERY, P. J. RICE, W. W. WATSON, Cavity Accelerator for Electrons. Phys. Rev. **72**, 346 (1947).
- ²⁹⁾ E. G. BOWEN, O. O. PULLEY and J. S. GOODEN, Application of Pulse Technique to the Acceleration of Elementary Particles. Nature **157**, 840 (1946).
- ³⁰⁾ F. L. HEREFORD, Acceleration of Electrons by a Single Resonant Cavity. Phys. Rev. **72**, 159-160 (1947).
- ³¹⁾ E. I. LAWTON, The Choice of Operating Mode for Standing Wave Type Linear Accelerators for Electrons. Journ. of Appl. Phys. **19**, 534...539 (1948).
- ³²⁾ E. J. LAWTON and W. C. HAHN, Experimental Results on Standing Wave Type Linear Accelerators for Electrons. Journ. of Appl. Phys. **19**, 642 ..648 (1948).

Zur paraxialen elektronenoptischen Abbildung

von F. Bognis.

(27. II. 1949.)

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Untersuchung waren die allgemeinen Eigenschaften der achsennahen elektronenoptischen Abbildung betrachtet worden¹⁾. Im Folgenden werden noch einige ergänzende Betrachtungen und Literaturhinweise angefügt, die im Zusammenhang damit von Interesse sein dürften.

1. Die Differentialgleichung der paraxialen Elektronenbahnen (I, (5))

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{\Phi} \frac{dr}{dz} \right) = [n(z) \cdot r']' = P(z) \cdot r \quad (1)$$

besitzt die allgemeine Lösung (I, (6))

$$r(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z). \quad (2)$$

Für die Wronskische Determinante $\Delta = f_1 f_2' - f_1' f_2$ folgt unter Anwendung einer bekannten Formel²⁾ aus (1) nach kurzer Rechnung die Beziehung $\Delta(z) \cdot n(z) = \text{konst.}$ oder

$$\Delta = f_1(z) f_2'(z) - f_1'(z) f_2(z) = \frac{\text{konst.}}{n(z)} \quad (3)$$

wie in I, Abschnitt 2 auf andere einfache Weise nochmals hergeleitet³⁾. Durch Einsetzen von (2) und $n(z)$ nach (3) in (1) erhält man nach kurzer Rechnung

$$f_1''(z) f_2'(z) - f_1'(z) f_2''(z) = \text{konst.} \frac{P(z)}{n^2(z)}. \quad (4)$$

¹⁾ F. BOGNIS, *Helv. Phys. Acta* XXI, 6 (1948) 461; darauf bezügliche Hinweise werden hier mit der Ziffer I versehen.

²⁾ z. B. E. KAMKE, *Differentialgleichungen I* (Leipzig 1944) § 5, 17. 1.

³⁾ S. a. W. GLASER, *Z. f. Phys.* **81**, 647 (1933) und V. K. ZWORYKIN u. a., *Electron optics and the electron microscope* (1946), S. 429. Als Folge dieser Beziehung ergab sich die Gültigkeit des Satzes von LAGRANGE-HELMHOLTZ sowohl für reelle und virtuelle Bilder im Fall $C = 0$ als auch für reelle Bilder für $C \neq 0$ (schief zur Achse verlaufende Strahlen). Herr GLASER hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, dass (für den Fall $C = 0$ bei reellem Bild) auf die Beziehung zwischen (3) und dem Lagrange-Helmholtzschen Satz in seiner Untersuchung *Z. f. Phys.* **116**, 56 (1940) hingewiesen ist.

Die Beziehungen (3) und (4) erlauben die Bestimmung von $P(z)$ und $n(z)$, d. h. der die Abbildung erzeugenden Felder, wenn zwei beliebige, linear unabhängige Integrale f_1 und f_2 von (1) bekannt sind. Mit den in I, (11), eingeführten Integralen r_1 und r_2 mit speziellen Anfangsbedingungen an einer Stelle $z = a$ nimmt die Konstante in (3) und (4) den Wert konst. $-n(a)$ an (I, 22); das elektrische Potential $\Phi = n^2$ und die magnetische Induktion B längs der z -Achse folgen mit (3), (4) und $P(z)$ nach (I, (3)) zu

$$\frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} = \frac{1}{A^2(z)} = \frac{1}{[r_1(z)r_2'(z) - r_1'(z)r_2(z)]^2} \quad (5)$$

$$\frac{e}{8m} \cdot \frac{B^2(z)}{\Phi(a)} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} \right)'' + \left(\frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} \right)^{3/2} [r_1'(z)r_2''(z) - r_1''(z)r_2'(z)]. \quad (6)$$

Bei Kenntnis von r_1 und r_2 lassen sich daher die zu diesen Integralen der Bewegungsgleichung gehörigen Felder an jeder Stelle z bestimmen. $\Phi(a)$ kann dabei, wie bekannt, noch beliebig gewählt werden. Für die speziellen Fälle eines rein elektrischen Feldes ($B = 0$) oder rein magnetischen Feldes ($\Phi(z) = \Phi(a)$) folgen aus (5) und (6) entsprechend vereinfachte Beziehungen.

Die charakteristischen Bestimmungsstücke einer paraxialen Abbildung (Bildort, Brennweiten, Vergrößerungen) sind, wie in I gezeigt, durch die Funktionswerte und Lage der Null- bzw. Extremalstellen der Funktionen r_1 und r_2 , d. h. zweier spezieller Elektronenbahnen, gegeben. Nach Festlegung dieser ausgezeichneten Werte sind die Bildfehler der ausserparaxialen Abbildung noch Funktionen des Zwischenverlaufes von r_1 und r_2 . Dieser wird zweckmässig so zu wählen sein, dass gewisse Bildfehler, beispielsweise die geometrische Aberration, möglichst kleine Werte annehmen. Sind r_1 und r_2 in ihrem ganzen Verlauf gegeben, so erhält man aus (5) und (6) das elektrische Potential bzw. das magnetische Feld längs der optischen Achse, woraus sich die Felder in der weiteren Umgebung der Achse bzw. Äquipotentialflächen und Strombelegungen in bekannter Weise ermitteln lassen¹⁾

2. Die in I, Abschnitt 3 und 6 der Reihe nach betrachteten allgemeinen Abbildungseigenschaften lassen sich anschaulich der nachstehenden Figur 1 entnehmen: An irgendeiner Stelle $z = a$ befinde sich eine feste Objektebene; wir verfolgen das virtuelle Bild, welches einer Ebene z zugeordnet ist, wenn wir diese Ebene nach rechts stetig wandern lassen. Dabei genügt es, wie man einsieht, einen Objektpunkt auf der Achse ($r(a) = 0$) zu betrachten. Nach I, (37) gilt für die Lage ζ_0 des zugehörigen Bildpunktes

$$\zeta_0 = z - \frac{r_2(z)}{r_2'(z)}. \quad (7)$$

¹⁾ O. SCHERZER, Z. f. Phys. 80, 193 (1933).

In der Figur sind zwei beliebige von a ausgehende Bahnen gezeichnet, für die wegen $r(a) = 0$ mit I, (12) die Gleichung $r(z) = r'(a) \cdot r_2(z)$ gilt. Aus dem charakteristischen Verlauf von $r_2(z)$ (I, Fig. 1) geht hervor, dass zunächst r_2/r_2' positiv ist, wenn man mit der Ebene z von $z = a$ aus nach rechts geht. Das virtuelle Bild wandert also nach links ($z_0 < z$); an der Stelle $z = \bar{p}_1$ ($r_2'(\bar{p}_1) = 0$) werden alle von a ausgehenden Bahnen achsenparallel; das virtuelle Bild liegt im Unendlichen. Es kommt dann, da nun r_2' sein Vorzeichen ändert, von rechts wieder aus dem Unendlichen herein¹⁾, um bei b_1 ($r_2(b_1) = 0$) mit dem ersten reellen Bild von a zusammenzufallen. Dann wandert es wieder nach links ins Unendliche (bei der zweiten

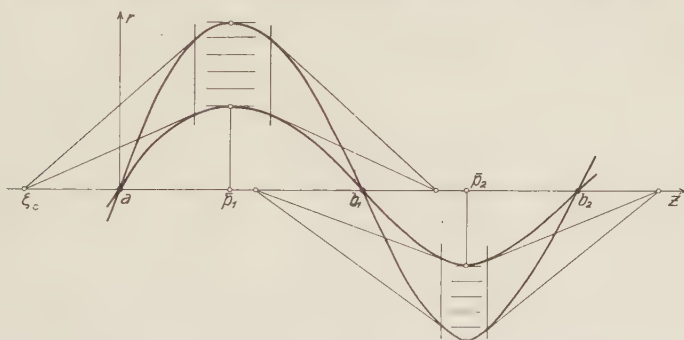


Fig. 1.

Die von einer Objektelebene $z = a$ ausgehenden achsennahen Elektronenbahnen erzeugen in jeder Ebene z ein virtuelles Bild (s. Anm. 1 unten), das an den Stellen p im Unendlichen liegt und an den Stellen b mit dem reellen Bild identisch wird.

Nullstelle p_2 von r_2'), um erneut von rechts kommend dem zweiten reellen Bild bei b_2 zuzustreben und so weiter. Man ersieht aus der Figur anschaulich die vier allgemeinen Eigenschaften der paraxialen Abbildung: Zu jeder Objektelebene a gehören Stellen \bar{p}_k , wo alle von einem Punkt bei a kommenden Bahnen parallel werden (von einem Punkt $r(a)$ ausserhalb der Achse kommende Bahnen besitzen dort eine Neigung $r'(\bar{p}_k) = r(a) \cdot r_1'(\bar{p}_k)$) und Stellen b_k mit reellen Bildern. Betrachten wir als Ausgangsebene die Ebene $z = p_1$, so gehören zu jeder dieser Ebene mit einer bestimmten Neigung durchsetzenden Parallelenschar reelle Bildpunkte b_k und wiederum eine Parallelenschar in den folgenden Ebenen $z = \bar{p}_k$ (teleskopische Abbildung). Die Verschiebung des «virtuellen Bildes» bei einer stetigen

¹⁾ Wir bezeichnen hier verallgemeinernd als «virtuelles Bild» den Vereinigungspunkt der von einer Ebene z aus nach links oder rechts verlaufenden Strahlen, welche die geradlinige Fortsetzung der Bahntangenten in der Ebene z bilden.

Bewegung der zugeordneten Ebene z nach rechts folgt unmittelbar aus (8):

$$\frac{d\zeta_0}{dz} = -\frac{r_2(z) r_2''(z)}{[r_2'(z)]^2} \quad (8)$$

Bei rein magnetischen Linsen ($n = \text{konst.}$) besitzt r_2'' überall das entgegengesetzte Vorzeichen wie r_2 ; hier läuft also das virtuelle Bild stetig nach links, wenn die Ebene z nach rechts wandert. Bei Anwesenheit elektrischer Felder können Bereiche mit wechselnder Bewegungsrichtung des virtuellen Bildes auftreten.

3. Reelle Bilder entstehen an den Stellen b_k bei $r_2(b_k) = 0$. Da $r_2(z)$ wegen der speziellen Anfangsbedingungen (I, 11) bei $z = a$ die Grösse a als Parameter enthält, bestimmt sich der Zusammenhang zwischen Bild- und Objektlage¹⁾ durch (I, 30):

$$r_2(b_k, a) = 0. \quad (9)$$

Drückt man r_2 nach (2) durch beliebige andere linear unabhängige Integrale f_1 und f_2 aus, so folgt auch wegen $r_2(a) = r_2(b_k) = 0$ sofort die gleichwertige Bedingung (I, (33))²⁾

$$\frac{f_2(a)}{f_1(a)} = \frac{f_2(b_k)}{f_1(b_k)} \quad (10)$$

Liegen Objekt und Bild im feldfreien Raum, so besteht zwischen b_k und a , wie bekannt und in I, Abschnitt 7 nochmals hergeleitet, eine kollineare Beziehung, d. h. die Abbildung genügt, wie die lichtoptischen Abbildungen durch zentrierte Linsensysteme, den Sätzen der Gaußschen Dioptrik.

Befinden sich Objekt und Bild ganz oder teilweise im wirksamen Bereich des Feldes, so wird im allgemeinen keine kollineare Beziehung zwischen b_k und a bestehen (vgl. I, Abschnitt 5). Man kann sich aber die Frage vorlegen, welche *speziellen* Feldverteilungen zu einer Kollineation zwischen b_k und a führen, auch wenn die Abbildung im Feldbereich zustande kommt. Die Antwort hierauf wurde von W. GLASER und E. LAMMEL gegeben³⁾; eines der einfachsten Felder dieser Art ist der von W. GLASER²⁾ ausführlich behandelte Fall einer rein magnetischen Linse mit einer Feldverteilung der Form $B = B_0/(1 + (z/a)^2)$.

¹⁾ Vgl. auch BRÜCHE-SCHERZER, Geometrische Elektronenoptik (1934), S. 84.

²⁾ W. GLASER, Z. f. Phys. **117**, 285 (1941).

³⁾ W. GLASER u. E. LAMMEL, Ann. d. Phys. (V) **40**, 367 (1941).

Une méthode d'élimination des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron*)

par D. Rivier.

(28. I. 1949)

Introduction. La méthode utilisée est due à M. STUECKELBERG. Elle s'appuie sur la forme intégrale qu'il a donnée à la théorie des champs quantifiés ⁽¹⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾, ⁽⁴⁾, et que nous exposons dans un premier chapitre. A l'étude d'un opérateur hamiltonien \mathbf{h} , la nouvelle forme de la théorie substitue celle de l'opérateur intégral \mathbf{S} , donnant par l'équation:

$$\psi[\tau''] = \mathbf{S}[\tau'', \tau'] \psi[\tau']$$

l'évolution entre deux époques quelconques τ'' et τ' de la fonctionnelle ψ décrivant le système.

Dans un deuxième chapitre, nous appliquons cette forme de la théorie au calcul du moment magnétique du neutron en troisième approximation. Comme on le sait cette valeur est infinie. Nous montrons alors comment il est possible de la rendre finie par une modification convenable de l'opérateur \mathbf{S} , lui conservant toutefois ses propriétés essentielles d'invariance, de causalité et d'unitarité. Mais ces conditions pour \mathbf{S} ne suffisent pas pour le déterminer complètement. Il s'en suit que la valeur du moment magnétique du neutron n'est pas déterminée; il est possible toutefois de donner une règle simple déterminant sans ambiguïté cette valeur.

Nous avons groupé dans un appendice un ensemble de résultats mathématiques, pour la plupart connus, relatifs principalement aux fonctions D , et dont le développement fera l'objet d'une note à part. C'est à cet appendice que renvoient les indications telles que (A. I. 12).

CHAPITRE I^{er}.

La forme intégrale de la théorie des champs.

1. La description des quanta dans l'espace homogène.

I. Champ scalaire.

Considérons un quantum d'énergie-impulsion $(k) = (\vec{k}, k^4)$; si κ_u est sa masse (de repos), nous avons:

$$k^4 = + \sqrt{|\vec{k}|^2 + \kappa_u^2}. \quad (1.1)$$

*) Ce travail constitue, à des détails près, une thèse présentée à l'Université de Lausanne, le 2 juillet 1948, pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences.

L'état du quantum est caractérisé par l'amplitude de probabilité $\psi(\vec{k}/)$ satisfaisant comme telle à la relation:

$$\int dV(\vec{k}) \psi^+(\vec{k}) \psi(\vec{k}/) = 1 \quad dV(\vec{k}) = \frac{(dk)^3}{k^4} \text{ invariant.} \quad (1.2)$$

Les phénomènes de diffraction auxquels sont sujets les ensembles de quanta permettent de les décrire par des paquets d'ondes planes dans l'espace:

$$u(x/) = (2\pi)^{-3/2} \int dV(\vec{k}) e^{i(kx)} \psi(\vec{k}/) = U(x/\vec{k}) \psi(\vec{k}/) \quad (1.3)$$

en utilisant la notation abrégée $(\dots/\vec{k})(\vec{k}/\dots) = \int dV(\vec{k})(\dots/\vec{k})(\vec{k}/\dots)$ pour le produit matriciel et la matrice:

$$U(x/\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i(kx)} \quad (1.3a)$$

Si en un point (\vec{x}, t) de l'espace-temps on a $u(x/) \neq 0$, il y a une probabilité non nulle d'interaction entre le quantum et un champ «extérieur» $C(x)$ différent de zéro en ce point. On a d'ailleurs:

$$(\square - \kappa_u^2) u(x/) = 0 \quad \square = \partial^\alpha \partial_\alpha \quad (1.4)$$

La matrice $U(x/\vec{k})$ satisfait aux relations:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha U^+(\vec{k}''/x) \mathbf{p}_\alpha U(x/\vec{k}') = \delta(\vec{k}''/\vec{k}'); \quad \mathbf{p}_\alpha = \frac{1}{i} \partial_\alpha \quad (1.5)$$

$$\int dV(\vec{k}) U(x''/\vec{k}) U^+(\vec{k}/x') = D_\alpha^+(x''/x') \quad (1.6)$$

où $\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha$ désigne une intégrale étendue à une hypersurface spatiale $\tau(x)=0$ (à normale $(d\sigma, d\sigma) < 0$) de l'espace-temps. La première de ces relations exprime que le système des paquets d'onde k'', k' , est orthonormal, c'est-à-dire formé d'ondes planes représentées par des fonctions orthogonales et normalisées à l'unité; et la seconde que ces fonctions représentatives forment un système complet ou «saturé». Nous appelons pour abréger ces deux relations: relations d'orthogonalité et de «saturation» du système de paquets.

Nous avons envisagé dans ce qui précède des paquets d'ondes formés d'ondes planes; cette restriction n'est pas nécessaire; dans bien des cas, au contraire, il est préférable de décrire la particule par des paquets d'ondes tout à fait généraux, pourvu qu'ils forment un système orthogonal et saturé.

Soit donc v, v', \dots un ensemble de paquets d'ondes. Nous pouvons décomposer la fonction d'onde $u(x)$ décrivant la particule dans l'espace x suivant ce système, en écrivant:

$$u(x/) = U(x/v) \psi(v/) \quad (1.7)$$

avec:

$$U(x/v) \psi(v) = \int dV(v) U(x/v) \psi(v) \quad (1.8)$$

Le système de paquets est orthogonal et saturé si nous imposons les relations analogues à (1.5) et (1.6):

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha U^+(v''/x) \mathbf{p}_\alpha U(x/v') = \delta(v''/v') \quad (1.9)$$

$$\int dV(v) U(x''/v) U^+(v/x') = D_\alpha^+(x''/x') \quad (1.10)$$

où $dV(v)$ est l'élément de volume invariant dans l'espace des paquets, et $\delta(v''/v')$ la fonction singulière invariante satisfaisant à:

$$\int dV(v') \delta(v'/v'') = 1 \quad (1.11)$$

Dans l'espace k , que nous avons considéré pour commencer, on avait par exemple:

$$\delta(\tilde{k}'/\tilde{k}'') = k^{\lambda''} \delta(\tilde{k}' - \tilde{k}'') \quad (1.12)$$

De cette manière la fonction $\psi(v)$ est une amplitude de probabilité, puisqu'il résulte de (1.7) et (1.12):

$$\int dV(v) \psi^+(v) \psi(v) = 1 \quad (1.13)$$

On peut passer directement de l'espace \tilde{k} à l'espace v par une matrice $S(v/\tilde{k})$:

$$\psi(v) = S(v/\tilde{k}) \psi(\tilde{k}) \quad (1.14)$$

Les conditions (1.2) et (1.13) entraînent l'unitarité de cette matrice:

$$S(v''/\tilde{k}) S^+(\tilde{k}, v') = \delta(v''/v') \quad S^+(\tilde{k}''/v) S(v/\tilde{k}') = \delta(\tilde{k}''/\tilde{k}') \quad (1.15)$$

Il est clair que les matrices $U(x/\tilde{k})$, $U(x/v)$, ... considérées comme fonctions de x , \tilde{k} , v , ... étant constants, décrivent des paquets d'ondes correspondant à des états \tilde{k} , v , ... bien déterminés du quantum. Nous pouvons écrire:

$$U(x/\tilde{k}') = u(x/\tilde{k}') = u'(x); \quad U(x/v'') = u(x/v'') = u''(x) \quad (1.16)$$

et, pour les relations d'orthogonalité et de saturation utiliser les formes condensées:

$$\int_{\tau} d\sigma^\alpha u''^+(x) \mathbf{p}_\alpha u'(x) = \delta(u''/u') \quad (1.17)$$

$$\int dV(u) u(x'') u^+(x') = D_\alpha^+(x''/x') \quad (1.18)$$

Enfin, pour les applications, notons que (1.17) peut s'écrire, en prenant pour hypersurface τ un plan $\tau(x) = x^4 - a = 0$:

$$\int (dx)^3 u''(x) \Omega u'(x) = \delta(u''/u') \quad (1.19)$$

avec l'opérateur $\frac{1}{i} \partial_t = \Omega$.

Cette dernière relation montre que dans l'espace x la fonction:

$$\Omega^{1/2} u(x)$$

joue le rôle d'une amplitude de probabilité. Soit alors \mathbf{G} un opérateur lié à une grandeur physique: il est défini par ses représentations $G(x''/x')$ dans l'espace ou $G(u''/u')$ dans l'espace (des paquets) u . On passe d'une représentation à l'autre par la relation:

$$G(u''/u') = \int (dx)^3 u''(x) (\Omega^{1/2} \mathbf{G} \Omega^{1/2}) u'(x) \quad (1.20)$$

Nous n'avons maintenant envisagé que le cas d'un seul quantum k dans l'espace homogène. Mais la description utilisée se généralise immédiatement au cas de plusieurs quanta *sans interaction* dans l'espace homogène. Par exemple dans le cas de 2 quanta, le premier étant décrit par $\psi(\vec{k})$, $\psi(u)$, ..., nous représentons le second, si l est son énergie impulsion, par une amplitude de probabilité $\psi(\vec{l})$, $\psi(v)$, ... Nous avons une description simultanée des deux quanta (sans interaction) dans un seul espace de configuration (\vec{k}, \vec{l}) , (u, v) ... au moyen d'une amplitude de probabilité $\psi(\vec{k}, \vec{l})$, $\psi(u, v)$... On peut décrire ces deux quanta dans un espace (x_u, x_v) (à temps multiples) en introduisant la fonction:

$$u(x_u, x_v) = U(x_u/\vec{k}) U(x_v/\vec{l}) \psi(\vec{k}, \vec{l}) \quad (1.21)$$

Comme on le voit, le passage à plusieurs quanta sans interaction s'opère sans difficulté.

Pour achever la description du champ de quanta scalaire il est utile d'introduire une densité de courant \mathbf{J}^α définie par la matrice:

$$J_\alpha(u''/u')(x) = \frac{1}{2i} (u'' + \partial_\alpha u' - \partial_\alpha u'' \cdot u')(x); \partial_\alpha J^\alpha \equiv 0 \quad (1.22)^*$$

permettant de représenter la charge totale par:

$$e(u''/u') = \int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha J_\alpha(u''/u')(x) \quad (1.23)$$

On voit facilement que, en particulier:

$$e(\vec{k}''/\vec{k}') = \delta(\vec{k}''/\vec{k}'). \quad (1.24)$$

*) Nous écrivons, d'une manière générale $(u v h)(x)$ pour $u(x) \cdot v(x) \cdot h(x)$.

2. La description des quanta dans l'espace homogène.

II. Champ spinoriel.

La description que nous venons de donner des quanta scalaires s'étend sans difficulté aux quanta vectoriels et spinoriels. Pour le montrer traitons rapidement ce dernier cas.

L'état d'une particule spinorielle est donné par son quadrivecteur impulsion énergie $(k) = (\vec{k}, k^4) = + \sqrt{\kappa_u^2 + |\vec{k}|^2}$ d'une part, et par sa polarisation n d'autre part. On doit donc décrire cette particule par une amplitude de probabilité $\psi(\vec{k}, n/)$, avec :

$$\sum_n \int \frac{(dk)^3}{k^4} \psi^+(\vec{k}, n) \psi(\vec{k}, n) = \int dV(\vec{k}, n) \psi^+(\vec{k}, n) \psi(\vec{k}, n) = 1 \quad (2.1)$$

dans l'espace (\vec{k}, n) . Dans l'espace x , la particule est décrite par la fonction spinorielle :

$$u^A(x/) = U^A(x/\vec{k}, n) \psi(\vec{k}, n/) = \int dV(\vec{k}, n) U^A(x/\vec{k}, n) \psi(\vec{k}, n/) \quad (2.2)$$

paquet d'ondes planes, où :

$$U^A(x/\vec{k}, n) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \pi^A(\vec{k}, n) e^{i(k, x)} \quad (2.3)$$

est l'onde plane correspondant à une particule dans l'état (\vec{k}, n) . (2.2) satisfait à l'équation de M. DIRAC :

$$((\gamma, \partial) + \kappa)_{A'}^A u^{A'}(x/) = 0 \quad (\gamma, \partial) = \gamma^\alpha \partial_\alpha; \quad (2.4)$$

à cause de l'identité :

$$((\gamma, k) - i\kappa) ((\gamma, k) + i\kappa) = ((k, k) + \kappa^2) = 0 \quad (2.5)$$

on a :

$$\pi^A(\vec{k}, n) = ((\gamma, k) + i\kappa)_{n}^A a \quad (2.6)$$

où a est une constante. L'indice A' allant de 1 à 4, il peut sembler qu'il y a 4 polarisations. Mais, comme on le déduit facilement de (2.5), la dégénérescence de $((\gamma, k) + i\kappa)_{A'}^A$ est 2 : il n'y a que deux polarisations indépendantes : $n = 1$, pour $A' = 1, 3$ $n = 2$ pour $A' = 2, 4^*$).

La nécessité d'introduire dans la théorie une densité de courant J^α définie par la matrice :

$$J^\alpha(u''/u') (x)$$

satisfaisant à l'équation de continuité :

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (2.7)$$

*) Nous utilisons pour les matrices γ la représentation réelle de MAJORANA (5).

nous oblige d'introduire pour décrire la même particule dans l'état $\psi(\vec{k}, n/)$, à côté de $u^A(x/)$, un autre spineur satisfaisant à l'équation adjointe de celle de M. DIRAC. Le plus simple est de poser, c étant un facteur numérique:

$$J^z(v''/u')(x) = c \cdot (v^+_{A'} \gamma^{\alpha A'}_B u^B)(x); \quad (2.8)$$

puis, au moyen de (2.7), nous déterminons l'équation adjointe pour $v^+_{A'}(x/)$. On trouve facilement:

$$v^+_{A'}(x/) (\partial, \gamma) - \kappa^{A'}_A = 0 \quad (2.9)$$

qu'il faut lire de droite à gauche (∂ opère sur $v^+_{A'}(x/)$). Nous écrivons la décomposition du paquet $v^+_{A'}(x/)$ en ondes planes:

$$v^+_{A'}(x/) = \psi^+(\vec{k}, n) V^+_{A'}(\vec{k}, n/x);$$

$$V^+_{A'}(\vec{k}, n/x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \varrho^+_{A'}(\vec{k}, n) \cdot e^{-i(k, x)} \quad (2.10)$$

d'une manière analogue à (2.2), avec:

$$\varrho^+_{A'}(\vec{k}, n) = ((k, \gamma) + i\kappa)^n_{A'} \cdot b^+ \quad (2.11)$$

où b^+ est un nombre constant et l'indice n , allant de 1 à 2, numérote les polarisations, comme en (2.6). Posant:

$$\kappa a b^+ = 1 \quad (2.12)$$

il vient:

$$\sum_{n=1}^2 \pi^A(\vec{k}, n) \varrho^+_{A'}(\vec{k}, n) = i(\gamma, k + i\kappa)^A_{A'} \quad (2.13)$$

Les spineurs $U^A(x/\vec{k}, n)$ et $V^+_{A'}(\vec{k}, n/x)$ vérifient les relations d'orthogonalité et de saturation:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha V^+_{A'}(\vec{k}'', n''/x) \frac{i}{4} \gamma_\alpha U^A(x/\vec{k}', n') = \delta(\vec{k}'' n''/\vec{k}' n')^* \quad (2.14)$$

$$\int dV(\vec{k}, n) U^{A''}(x''/\vec{k}, n) V_{A'}(\vec{k}, n/x')$$

$$= ((\gamma, \partial'') - \kappa)^{A''}_{A'} D^+_{\kappa}(x''/x') = D^{+A''}_{\kappa A'}(x''/x') \quad (2.15)$$

Nous avons jusqu'ici considéré la décomposition en ondes planes. Comme dans le cas scalaire, il est préférable de ne point s'y limiter.

*) Cette relation impose certaines conditions pour les paquets u^A , $v^+_{A'}$, car elle signifie que la matrice $e(\vec{k}'' n''/\vec{k}' n')$ est diagonale; or en toute généralité, la charge ne commute pas avec le spin.

Soit donc $w^A, w'^A \dots$, un ensemble de paquets d'ondes spinoriels. Nous pouvons effectuer la décomposition:

$$u^A(x/) = U^A(x/w) \psi(w/) = \int dV(w) U^A(x/w) \psi(w/) \quad (2.16)$$

$$v_A^+(/x) = \psi^+(/w) V_A^+(w/x) \quad (2.17)$$

où $\psi(w/)$ est une amplitude de probabilité dans l'espace de ces paquets. Le système de paquets est orthogonal et saturé si:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha V^+(w''/x) \frac{i}{4} \gamma_\alpha U(x/w') = \delta(w''/w') \quad (2.18)$$

$$\int dV(w) U^{A''}(x''/w) V_{A'}^+(w/x') = D_{\kappa}^{+A''}{}_{A'}(x''/x') \quad (2.19)$$

Toute l'écriture se simplifie encore par l'introduction d'un spineur fondamental ξ_{AB} (c'est la «matrice B » de M. PAULI⁶)) permettant le passage entre composantes spinorielles de variance différente:

$$u_A = \xi_{AB} u^B; u^B = u_A \xi^{AB} \quad \xi_{AB} = \xi^{AB} = -\gamma^A{}_B \quad (2.20)$$

entraînant les identités importantes:

$$u_A v^A = \xi_{AB} u^B v^A = -u^B \xi_{BA} v^A = -u^B v_B = -v_A u^A. \quad (2.21)$$

Nous écrivons maintenant:

$$v_A^+ = u_A^+ = (\xi_{AB} u^B)^+ = u^{B+} \xi_{BA} \quad (2.22)$$

ce qui donne pour les relations d'orthogonalité et de saturation en utilisant la notation condensée $U^A(x/u'') = u''^A(x)$, $V_A^+(x/u') = u'^+_A(x)$:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha u''^+(x) \frac{i}{4} \gamma_\alpha u'(x) = \delta(u''/u') \quad (2.23)$$

$$\int dV(u) u^{A''}(x'') u_{A'}^+(x') = D_{\kappa}^{+A''}{}_{A'}(x''/x') \quad (2.24)$$

Une grandeur physique G à laquelle correspond l'opérateur \mathbf{G} est représentée dans l'espace u , par la matrice:

$$G(u''/u') = \int (dx)^3 u''(x) \frac{i}{4} \gamma_4 \mathbf{G} u'(x) \quad (2.25)$$

Par exemple, celle qui représente la densité de courant:

$$J^\alpha(u''/u')(x) = \frac{i}{4} (u''^+ \gamma^\alpha u')(x) \quad (2.26)$$

où on a fait dans (2.8) $c = \frac{1}{4}$, afin que la charge totale soit donnée par:

$$e(u''/u') = \int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha J_\alpha(u''/u')(x) = \delta(u''/u') \quad (2.27)$$

3. La description de l'évolution des quanta dans l'espace inhomogène.

Dans l'espace homogène, des quanta sans interaction mutuelle n'évoluent pas: la fonctionnelle $\psi(u, v, w/\dots)$ qui les décrit dans l'espace des paquets u, v, \dots ne varie pas. Mais dans l'espace inhomogène ou lorsqu'il y a interaction entre quanta, il y a évolution. Des observations faites à différentes époques ordonnées $\tau'(x)$, $\tau''(x)$ révèlent une variation en fonction de celles-ci. Une époque est définie par une hypersurface spatiale $\tau(x) = 0$ de l'espace-temps x caractérisée par sa normale $d\sigma^\alpha(x)$ temporelle en chaque point. Ainsi l'état du système physique est décrit par une fonctionnelle:

$$\psi[\tau(\), u, v, \dots /] \quad (3.1)$$

de l'époque $\tau(x)$ et des paquets contenant les différents quanta; la variation de cette fonctionnelle en fonction de l'époque est décrite par un opérateur unitaire \mathbf{S} donnant par l'équation:

$$\psi[\tau''(\)] = \mathbf{S}[\tau''(\), \tau'(\)] \psi[\tau'(\)]; \quad \mathbf{S}^+ \mathbf{S} = 1 \quad (3.2)$$

la relation entre la fonctionnelle à l'époque τ'' et celle à l'époque τ' . L'unitarité de \mathbf{S} découle immédiatement de la propriété pour la fonctionnelle d'être une amplitude de probabilité. Si les deux époques sont infiniment voisines l'une de l'autre $\tau''(x) - \tau'(x) = \delta\tau(x)$, \mathbf{S} est un opérateur infinitésimal:

$$\mathbf{S} = 1 - i\delta\mathbf{S} \quad \delta\mathbf{S} = \int_i (d\sigma \delta\tau [-(\partial\tau, \partial\tau)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{h}(x)^*) \quad (3.3)$$

dont l'unitarité entraîne:

$$\delta\mathbf{S}^+ = \delta\mathbf{S} \quad \text{ou} \quad \mathbf{h}^+(x) = \mathbf{h}(x) \quad (3.4)$$

L'équation d'évolution (3.2) devient l'équation différentielle de MM. STUECKELBERG⁽⁶⁾ et TOMONAGA⁽⁷⁾

$$- \frac{1}{i} \frac{\delta\psi}{\delta\tau(x)} = [-(\partial\tau, \partial\tau)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{h}(x) \psi \quad (3.5)$$

Il est possible de trouver pour \mathbf{S} une expression en fonction de \mathbf{h} ; il suffit pour cela d'intégrer (3.5) entre les limites τ'' et τ' . Nous le faisons en développant \mathbf{h} suivant un paramètre de couplage ε :

$$\mathbf{h} = \varepsilon \mathbf{h}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{h}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{h}^{(3)} + \dots \quad (3.6)$$

ce qui donne aussi pour \mathbf{S} le développement correspondant:

$$\mathbf{S}[\tau''(\), \tau'(\)] = \mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{S}^{(1)}[\tau''(\), \tau'(\)] + \varepsilon^2 \mathbf{S}^{(2)}[\tau''(\), \tau'(\)] + \dots \quad (3.7)$$

*) Avec nos définitions, l'élément de volume quadridimensionnel est en effet $d\delta V = (d\sigma \delta\tau [-(\partial\tau, \partial\tau)]^{-\frac{1}{2}}(x))$, où $(\partial\tau, \partial\tau) = \partial\tau_\alpha \partial\tau^\alpha$ et $d\sigma^\alpha = d\sigma \frac{d\sigma^\alpha}{\sqrt{-(d\sigma, d\sigma)}}$.

On trouve alors facilement les relations:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)}[\tau'', \tau'] &= (-i) \int_{\mathbf{L}} (dx')^4 \mathbf{h}^{(1)'} \\ \mathbf{S}^{(2)}[\tau'', \tau'] &= (-i)^2 \left[i \int_{\mathbf{L}} (dx')^4 \mathbf{h}^{(2)'} + i \int_{\mathbf{L}} (dx'')^4 \cdot \int_{\mathbf{L}} (dx')^4 \cdot \theta^{+''};' \mathbf{h}^{(1)''} \cdot \mathbf{h}^{(1)'} \right] \\ \mathbf{S}^{(3)}[\tau'', \tau'] &= (-i)^3 \left[- \int_{\mathbf{L}} (dx')^4 \mathbf{h}^{(3)'} + i \int_{\mathbf{L}} (dx'')^4 \cdot \int_{\mathbf{L}} (dx')^4 \cdot \theta^{+''};' [\mathbf{h}^{(1)''} \cdot \mathbf{h}^{(2)'} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{h}^{(2)'} \cdot \mathbf{h}^{(1)''}] + \int_{\mathbf{L}} (dx''')^4 \cdot \int_{\mathbf{L}} (dx'')^4 \cdot \int_{\mathbf{L}} (dx')^4 \theta^{+''};'' \cdot \theta^{-''};' \cdot \mathbf{h}^{(1)''} \cdot \mathbf{h}^{(1)''} \cdot \mathbf{h}^{(1)'} \right] \end{aligned} \right\} (3.8)$$

où nous avons utilisé les notations abrégées:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}^{(i)'} &= \mathbf{h}^{(i)}(x'); \mathbf{h}^{(1)''} = \mathbf{h}^{(1)}(x''); \dots \\ \theta^{+''};' &= \theta^+(\tau''(x) - \tau'(x)); \dots \quad \theta^+(z) = \theta^-(-z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.9)$$

$(dx')^4 = \delta\tau \, d\sigma - (\partial\tau, \partial\tau)^{-\frac{1}{2}}(x')$: élément de volume de l'espace-temps; \mathbf{L} : hypervolume de l'espace temps limité par les 2 surfaces $\tau'(x)$ et $\tau''(x)$ et par le cylindre $R = \infty$.

La théorie habituelle des champs quantifiés utilise l'équation (3.5); l'opérateur \mathbf{h} qui y figure est la densité d'énergie d'interaction caractérisant l'inhomogénéité de l'espace. On l'obtient dans le cadre d'un formalisme lagrangien assurant la *covariance* de la théorie, bien que la variance même de \mathbf{h} ne soit pas définie en général. L'*hermiticité* de \mathbf{h} conserve à ψ son caractère d'amplitude de probabilité. Enfin, la *causalité* de la théorie est assurée par l'équation d'évolution différentielle (3.5).

Sous la forme que lui donne M. STUECKELBERG, la théorie s'appuie sur l'équation intégrale (3.2). Les critères de validité de la théorie sont alors appliqués à l'opérateur \mathbf{S} . La *covariance* relativiste demande que \mathbf{S} soit un scalaire invariant, puisque les amplitudes de probabilité $\psi[\tau']$ et $\psi[\tau'']$ le sont. Le caractère probabiliste de ψ entraîne l'*unitarité* de \mathbf{S} . Enfin la *causalité*, qui n'est plus assurée par l'existence d'une équation différentielle a priori, exige pour l'opérateur \mathbf{S} la structure particulière suivante: dans les différents termes $\mathbf{S}^{(i)}$ du développement (3.7) ne peuvent apparaître dans les noyaux des intégrales qui les représentent qu'un seul type de fonctions potentielles, les fonctions D_{∞}^c (A. III. 19).

Ce dernier point peut être justifié de manière axiomatique: si par *causale* on entend une théorie qui permette l'énoncé d'un principe de causalité, et si l'on remarque qu'une condition nécessaire pour celui-ci est l'exclusion d'états d'énergie négative, on peut montrer

que la seule fonction potentielle d'une théorie quantique, invariante et causale est précisément la fonction :

$$D_{\kappa}^c(x) = \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D_{\kappa}^+(x) + \theta^-(x^4) D_{\kappa}^-(x)] \quad (3.10)$$

qui contient dans le futur ($x^4 > 0$) uniquement des ondes à fréquences positives, et dans le passé ($x^4 < 0$) uniquement des ondes à fréquences négatives. Elle traduit cet aspect du principe de causalité quantique selon lequel une inhomogénéité $\delta(x)$ de l'espace peut : ou bien *émettre* (futur) un quantum dans un paquet $u''(x)$, ou bien *absorber* (passé) un *quantum* dans un paquet $u'(x)$.

Mais on peut aussi démontrer la présence nécessaire des $D_{\kappa}^c(x)$ dans les $\mathbf{S}^{(i)}$ d'une manière directe, en construisant l'opérateur \mathbf{S} à partir d'un scalaire \mathbf{h} représentant un type défini d'interaction (c'est un des termes de l'hamiltonien de la théorie habituelle, lorsqu'on le développe suivant les demi-champs). On se sert pour cela des relations (3.9). Schématiquement on procède comme suit :

1. On choisit le type d'interaction : nombre, variance et degré de chaque champ u, v, φ, χ en se donnant une matrice de transition :

$$\varepsilon \mathbf{h}(u'' v'' / \varphi' \chi') = \varepsilon(u''^+ \dots v''^+ \dots \varphi' \dots \chi' \dots)(x) \quad (3.12)$$

(décrivant un processus élémentaire où il y a absorption des paquets φ', χ' , et création des paquets u'', v'', \dots).

2. On construit, au moyen des relations (3.9), les différents $\mathbf{S}^{(i)}$, représentation des $\mathbf{S}^{(i)}$. On remarque qu'ils ne sont pas invariants.

3. On complète ces $\mathbf{S}^{(i)}$ en faisant intervenir tous les processus possibles du type (3.12), en ayant soin de les combiner en accord avec le principe de causalité énoncé plus haut. Dans certains cas, cela suffit pour faire apparaître les fonctions $D_{\kappa}^c(x)$. L'opérateur \mathbf{S}'' convenable (c'est-à-dire unitaire, invariant et causal) est construit. Mais en général, pour obtenir celui-ci, il faut encore ajouter des termes correspondant à un processus additionnel d'ordre supérieur en ε en (3.12) (cf. § 4. B).

L'invariance des différents $\mathbf{S}^{(i)}$ est assurée sans autre par l'invariance des fonctions $D_{\kappa}^c(x)$.

Par contre, l'unitarité de \mathbf{S} doit faire l'objet d'une démonstration. On peut premièrement montrer que le \mathbf{S} est engendré par un opérateur \mathbf{h} qui est hermitien ; \mathbf{S} est unitaire *ipso facto*. Mais la démonstration n'est pas générale : c'est une vérification *a posteriori*.

On peut aussi démontrer directement l'unitarité de \mathbf{S} , sans faire appel à l'existence d'un opérateur \mathbf{h} . Cette démonstration a deux avantages. Premièrement elle libère la théorie de l'équation diffé-

rentielle (3.5); secondement — et grâce à cela —, elle permet de trouver, à partir de l'opérateur \mathbf{S} «convenable», d'autres opérateurs $\bar{\mathbf{S}}$, convenables aussi, mais ayant un sens physique, tandis que l'opérateur \mathbf{S} n'en a pas toujours, comme c'est le cas si des $\mathbf{S}^{(i)}$ sont *infinis*. Le deuxième chapitre du travail a précisément pour objet l'étude d'un de ces cas.

4. Applications élémentaires. I. Un seul champ quantifié.

Les quatre cas très simples étudiés dans ce paragraphe ont pour but d'illustrer l'invariance de la méthode par rapport aux différents types d'interaction. Nous ne quantifions qu'un seul champ afin de simplifier les raisonnements et l'écriture. La généralisation à plusieurs champs quantifiés est l'affaire du § 5.

A. Champ de quanta scalaires; champ extérieur scalaire.

Le type d'interaction est donné par:

$$\varepsilon h(u''/u') = \varepsilon(u'' + C u')(x) \quad C(x): \text{nombre } C \quad (4.1)$$

Les relations (3.8) donnent, avec

$$\tau''(x) = x^{4''} - x^4 = 0, \quad \tau'(x) = x^{4'} - x^4 = 0:$$

$$\begin{aligned} S^{(0)}(u''/u') &= \delta(u''/u') & S^{(1)}(u''/u') &= (-i) \int_{\underline{L}} (dx)^4 (u'' + C u')(x) \\ S^{(2)}(u''/u') &= (-i)^2 \int_{\underline{L}} (dx'')^4 \int_{\underline{L}} (dx')^4 \\ &\int dV(u)(u'' + C u)(x'') (u' + C u')(x') \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

$S^{(2)}(u''/u')$ peut s'écrire en utilisant les relations de saturation (10.12a):

$$\begin{aligned} S^{(2)}(u''/u') &= (-i)^2 \int_{\underline{L}} (dx'')^4 \int_{\underline{L}} (dx')^4 \cdot (u'' + C)(x'') \\ &\cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_{\kappa}^+(x''/x') \cdot (C u')(x') \end{aligned} \quad (4.3)^*$$

Il n'est pas invariant, comme les $S^{(3)}$, $S^{(4)}$, ... On ajoute alors les interactions:

$$h_c(u'' u'/0) = \varepsilon(u'' + C u'^+)(x) \quad (4.4)$$

$$h_a(0/u'' u') = \varepsilon(u'' C u')(x) \quad (4.5)$$

correspondant à des créations et à des annihilations de paires.

*) Dans la suite, nous écrivons \int pour $\int_{\underline{L}}$

L'opérateur $\mathbf{S}^{(1)}$ n'est pas modifié par la correction de \mathbf{h} , puisqu'il ne décrit qu'une seule transition. Par contre à l'opérateur $\mathbf{S}'^{(2)}$ s'ajoute la contribution nouvelle, représentée par:

$$\begin{aligned} S^{(2)''}(u''/u') &= (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \int dV(u) (u' C u) (x'') \cdot (u^+ C u^{+''}) (x') \\ &\cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) = (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u' C) (x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\ &\cdot D_{\kappa}^+(x''/x') \cdot (C u^{+''}) (x') \end{aligned}$$

ou encore, en changeant l'ordre des facteurs en échangeant les variables x' et x'' (cf. A. III. 12):

$$\begin{aligned} S^{(2)''}(u''/u') &= (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u^{+''} C) (x'') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'}) \\ &\cdot D_{\kappa}^-(x''/x') \cdot (C u') (x') \end{aligned} \quad (4.6)$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} S^{(2)}(u''/u') &= (S^{(2)'} + S^{(2)'')}(u''/u') = (-i)^2 \frac{2}{i} \int (dx'')^4 \\ &\int (dx')^4 \cdot (u^{+''} C) (x'') \cdot D_{\kappa}^c(x''/x') \cdot (C u') (x') \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les mêmes calculs et les mêmes raisonnements doivent être faits pour obtenir $\mathbf{S}^{(3)}$, $\mathbf{S}^{(4)}$, ... On trouve sans difficulté:

$$\begin{aligned} S^{(n)}(u''/u') &= (-i)^n \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^{n-1} \int \dots \int^{(n)} \cdot (u^{+''} C) (x^{(n)}) \cdot D_{\kappa}^c(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \\ &\cdot C(x^{(n-1)}) \dots C(x'') D_{\kappa}^c(x''/x') (C u') (x') \end{aligned} \quad (4.8)$$

en ne faisant intervenir que les trois interactions (4.1), (4.4) et (4.5).

B. *Champ de quanta scalaires chargés; champ extérieur vectoriel.*

L'interaction type est donnée maintenant par (cf. 1.22):

$$\begin{aligned} \varepsilon \hbar (u''_{\pm}/u'_{\pm}) &= \mp \varepsilon (A^{\alpha} J_{\alpha} (u''_{\pm}/u'_{\pm})) (x) = \\ &\pm \frac{i}{2} \varepsilon A^{\alpha} (x) (u''_{\pm}{}^{+} \partial_{\alpha} u'_{\pm} - \partial_{\alpha} u''_{\pm}{}^{+} \cdot u'_{\pm}) (x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

u_{\pm} suivant qu'il s'agit de quanta ou d'antiquanta. On trouve:

$$\begin{aligned} S^{(2)}(u''_{+}/u'_{+}) &= \frac{(-i)^4}{4} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot [(\partial_{\alpha''} u''_{+}{}^{+} \cdot A^{\alpha''}) (x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\ &\cdot D_{\beta}^-(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot u'_{+}) (x') \\ &- (\partial_{\alpha''} u''_{+}{}^{+} \cdot A^{\alpha''}) (x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D^+(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot \partial_{\beta'} u'_{+}) (x') \\ &- (u''_{+}{}^{+} \cdot A^{\alpha''}) (x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_{\alpha''\beta'}^+(x''/x') \cdot (A^{\beta'} u'_{+}) (x') \\ &+ (u''_{+}{}^{+} \cdot A^{\alpha''}) (x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_{\alpha''}^+(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \partial_{\beta'} u'_{+}) (x')] \quad (4.10*) \end{aligned}$$

*) Pour alléger l'écriture, nous laissons tomber l'indice κ dans $D_{\kappa}(x)$.

qui, manifestement n'est pas invariant. Pour la correction introduisons comme précédemment les invariants correspondant aux processus de création et d'annihilation de paires :

$$\varepsilon h_e(u''_+ u'_+ /) = \frac{1}{2} \varepsilon A^\alpha J_\alpha^c(u''_+ u'_+ /) = \varepsilon \frac{i}{2} A^\alpha(x) (u''_+{}^\alpha \partial_\alpha u'_+{}^\alpha - \partial_\alpha u''_+{}^\alpha \cdot u'_+{}^\alpha)(x) \quad (4.11)$$

$$\varepsilon h_a(/u''_+ u_-) = \frac{1}{2} \varepsilon A^\alpha J_\alpha^a(/u''_+ u_-) = \varepsilon \frac{i}{2} A^\alpha(x) (u''_+{}^\alpha \partial_\alpha u'_-{}^\alpha - \partial_\alpha u''_+{}^\alpha \cdot u'_-{}^\alpha)(x) \quad (4.12)$$

Compte tenu des identités évidentes (cf. III. 2) :

$$D_{;\alpha''}^+(x''/x') = -D_{;\alpha''}^-(x'/x'') \quad D_{;\alpha''\beta'}^+(x''/x') = D_{;\alpha''\beta'}^-(x'/x'')$$

et en effectuant les transformations indiquées déjà pour le cas précédent, on trouve une correction :

$$\begin{aligned} S^{(2)''}(u''_+/u'_+) &= \frac{(-i)^4}{4} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot [(u''_+{}^\alpha \cdot A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{\mathbf{4}''} - x^{\mathbf{4}'}) \\ &\quad \cdot D_{;\alpha''}^-(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ &\quad - (\partial_{\alpha''} u''_+{}^\alpha \cdot A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{\mathbf{4}''} - x^{\mathbf{4}'}) \cdot D^-(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ &\quad - (u''_+{}^\alpha A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{\mathbf{4}''} - x^{\mathbf{4}'}) \cdot D_{;\alpha''\beta'}^-(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot u'_+)(x') \\ &\quad + (\partial_{\alpha''} u''_+{}^\alpha \cdot A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{\mathbf{4}''} - x^{\mathbf{4}'}) \cdot D_{;\beta'}^-(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot u'_+)(x')] \quad (4.13) \end{aligned}$$

donnant pour la matrice corrigée :

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)}(u''_+/u'_+) &= \frac{1}{2i} \int (dx'')^4 \cdot \int (dv')^4 \cdot [(u''_+{}^\alpha \cdot \varphi^{\alpha'})(x'') \cdot D_{;\alpha''}^c(x''/x') \\ &\quad \cdot (\varphi^{\beta'} \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ &\quad - (\partial_{\alpha''} u''_+{}^\alpha \cdot \varphi^{\alpha'})(x'') \cdot D^c(x''/x') \cdot (\varphi^{\beta'} \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ &\quad - (u''_+{}^\alpha \varphi^{\alpha''})(x'') \cdot D_{;\alpha''\beta'}^c(x''/x') \cdot (\varphi^{\beta'} u'_+)(x') \\ &\quad + (\partial_{\alpha''} u''_+{}^\alpha \cdot \varphi^{\alpha''})(x'') \cdot D_{;\beta'}^c(x''/x') \cdot (\varphi^{\beta'} u'_+)(x')] \\ &\quad - S^{(2)'''}(u''_+/u'_+) \quad (4.14) \end{aligned}$$

où le terme $S^{(2)'''}(u''_+/u'_+)$ vaut (cf. A. III. 24) :

$$S^{(2)'''}(u''_+/u'_+) = (-i)^2 \cdot i \int (dx')^4 \cdot \frac{1}{2} (u''_+{}^\alpha A^{\mathbf{4}}_4 u'_+)(x') \quad (4.15)$$

$S^2(u''/u')$ n'est pas invariant, tandis qu'en vertu des propriétés de la fonction D^c , les termes entre crochets donnent la contribution in-

variante et causale, seule admissible. Force nous est donc de prendre pour représentation de \mathbf{S}^2 :

$$S^{(2)}(u''_+/u'_+) = S^{(2)'}(u''_+/u'_+) + S^{(2)''}(u''_+/u'_+) + S^{(3)'''}(u''_+/u'_+) \quad (4.16)$$

De cette manière, nous avons montré que la correction par l'introduction des processus de création et d'annihilation de paires ne suffit pas. Il faut encore corriger en additionnant à l'opérateur $\mathbf{S}^{(2)}$ issu de la première correction l'opérateur $\mathbf{S}^{(2)''}$, représenté par (4.15).

Si nous revenons maintenant à l'expression générale donnée en (3.8) pour les opérateurs $\mathbf{S}^{(i)}$, nous constatons que le terme additionnel $\mathbf{S}^{(2)''}$, qui est une intégrale *simple* sur l'espace temps, ne peut provenir que d'un terme en ε^2 dans le développement (3.6) du scalaire \mathbf{h} : (3.8) donne même la valeur de sa représentation, qui est:

$$\varepsilon^2 \mathbf{h}^{(2)}(u''_+/u'_+) = -\frac{\varepsilon^2}{2} (u''_+ (A^4)^2 u'_+) (x) \quad (4.17)$$

Manifestement, elle n'est pas invariante par rapport au groupe de LORENZ.

Nous avons ainsi démontré, dans ce cas particulier, que les invariances des opérateurs \mathbf{h} et \mathbf{S} sont exclusives l'une de l'autre. Mais l'énoncé et la démonstration du théorème général correspondant sont immédiats si l'on remarque que l'addition d'un terme du type de (4.15) est due uniquement au fait que l'opérateur \mathbf{h} contient des dérivées (seule la dérivée temporelle intervient, mais la covariance exige la présence simultanée des 4 dérivées). Ainsi nous avons le théorème suivant:

Si l'opérateur hamiltonien de diffusion pure décrivant l'interaction d'un champ quantifié $u(x)$ avec un autre champ (quantifié ou non) contient des dérivées du champ $u(x)$, l'invariance de l'hamiltonien total \mathbf{h} et l'invariance de l'opérateur intégral \mathbf{S} sont incompatibles.

Revenons à la formation des $S^{(i)}(u''/u')$; on voit que les interactions introduites, auxquelles il faut ajouter celles qui leur correspondent par changement de u_+ en u_- et encore:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \mathbf{h}^{(2)}(u''_-/u'_+) &= -\frac{\varepsilon^2}{2} (u''_+ (A^4)^2 u'_+) (x); \\ \varepsilon^2 \mathbf{h}^2(u''_+/u'_-) &= -\frac{\varepsilon^2}{2} (u''_+ (A^4)^2 u'_-) (x) \end{aligned} \quad (4.18)$$

correspondant à (4.17), comme (4.11,12) correspondent à (4.9), permettent de donner aux $S^{(i)}$ la structure en D_x^c prévue par la théorie.

C. *Champ de quanta spinoriel; champ extérieur scalaire.*

Le type d'interaction est ici:

$$\varepsilon h(u''/u') = \varepsilon i(u''^+_{\mathcal{A}} C u'^{\mathcal{A}})(x) \quad C(x): \text{nombre } c \text{ réel.} \quad (4.19)$$

le facteur i assure l'hermiticité de \mathbf{h} . On obtient l'expression non invariante:

$$S^{(2)'}(u''/u') = \int (dx'')^4 \cdot \int (dx')^4 \cdot (u''^+_{\mathcal{A}''} C)(x'') \cdot \theta^+(x^{\mathcal{A}''} - x^{\mathcal{A}'}) \cdot D^{+\mathcal{A}''\mathcal{A}'}(x''/x') \cdot (C u'^{\mathcal{A}'})(x') \quad (4.20)$$

Pour la correction, on introduit les interactions:

$$h_c(u'' u' / o) = i(u''^+_{\mathcal{A}} C u'^{\mathcal{A}})(x) \quad (4.21)$$

$$h_a(o/u''_+ u') = -i(u''_{\mathcal{A}} C u'^{\mathcal{A}})(x) \quad (4.22)$$

Mais ici, il faut se souvenir que les particules spinorielles satisfont au principe d'exclusion de M. PAULI. Outre la condition d'hermiticité:

$$(\mathbf{h}_c + \mathbf{h}_a)^+ = (\mathbf{h}_c + \mathbf{h}_a) \quad (4.23)$$

qui entraîne:

$$h_a(o/u'' u') = (h_c(u'' u' / o))^+ \quad (4.24)$$

nous devons donc avoir la condition d'antisymétrie:

$$h_c(u'' u' / o) = -h_c(u' u'' / o) \quad (4.25)$$

$$h_a(o/u'' u') = -h_a(o/u' u'') \quad (4.26)$$

(En effet, l'amplitude de probabilité:

$$\psi(u'', u') = h_c(u'' u' / o) \psi(o)$$

ne peut être antisymétrique que si \mathbf{h}_c l'est aussi).

On trouve alors pour la correction, après les transformations convenables:

$$S^{2''}(u''_+/u'_+) = (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u''^+_{\mathcal{A}''} C)(x'') \cdot \theta^-(x^{\mathcal{A}''} - x^{\mathcal{A}'}) \cdot D^{-\mathcal{A}''\mathcal{A}'}(x''/x') \cdot (C u'^{\mathcal{A}'})(x') \quad (4.27)$$

Ce qui donne pour représentation de l'opérateur $\mathbf{S}^{(2)}$:

$$S^2(u''_+/u'_+) = (-i)^2 \frac{2}{i} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u''^+_{\mathcal{A}''} C)(x'') \cdot D^{\mathcal{A}''\mathcal{A}'}(x''/x') \cdot (C u'^{\mathcal{A}'})(x') \quad (4.28)$$

invariant et causal, exactement comme en théorie scalaire. La correction effectuée est nécessaire et suffisante pour donner à $S^{(n)}(u''_+/u'_+)$ la forme :

$$S^{(n)}(u''_+/u'_+) = (-i)^n \left(\frac{2}{i}\right)^{n-1} \int (dx^{(n)})^4 \int (dx^{(n-1)})^4 \dots \\ (u''_{A(n)} C)(x^{(n)}) \cdot D^c_{A(n-1)}(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \dots D^c_{A'}(x''/x') (C u'^{A'})(x') \quad (4.29)$$

Cette correction est complète, parce que, conformément au théorème que nous avons démontré tout à l'heure, le scalaire h (hamiltonien d'interaction par diffusion pure) ne contient pas les dérivées du champ $u^A(x)$.

D. Champ de quanta spinoriel chargé; champ extérieur vectoriel.

Le calcul est analogue à celui développé en B. Mais le fait que $J^\alpha(u''_\pm/u'_\pm) = \frac{1}{4} u''_\pm \gamma^\alpha u'_\pm$ ne contient pas de dérivées n'impose pas correction en ε^2 pour h .

5. Applications élémentaires. II. Plusieurs champs quantifiés.

Jusqu'ici, nous n'avons envisagé que le cas où le scalaire d'interaction h est bilinéaire en un seul champ quantifié (scalaire ou spinoriel). Comme nous venons de le voir, les propriétés de transformation du champ ne jouent pas de rôle dans le raisonnement; celui-ci n'est pas non plus modifié par la présence éventuelle de dérivées des champs dans le scalaire h ; le résultat lui-même n'est pas essentiellement changé par ces complications: c'est toujours la fonction $D^c_\ast(x)$ qui figure dans le noyau des intégrales au moyen desquelles s'expriment les termes $S^{(n)}$. C'est pourquoi, dans la généralisation qui nous occupe maintenant, il nous suffit de considérer le cas où le scalaire h dépend linéairement des champs scalaires eux-mêmes, et non de leur dérivées. Pour ne pas charger inutilement l'écriture, nous nous contentons de trois champs, u , v et φ . (Le cas où h est bilinéaire dans un champ u est alors celui où deux des champs u et v sont identiques: $u = v$).

Dans ces conditions, les interactions types s'écrivent:

$$\varepsilon h(v'' \varphi''/u') = \varepsilon (v^{+''} \varphi^{+''} u')(x) \\ \varepsilon h(u''/v' \varphi') = \varepsilon (u^{+''} v' \varphi')(x) \quad (5.1)$$

elles décrivent en un point x , le premier, la création d'un «quantum v'' » et d'un «quantum φ'' », simultanée avec l'annihilation d'un «quantum u' », le second la transition inverse. Calculons alors les termes

$S'^{(2)}(u''/u')$ et $S'^{(2)}(v'' \varphi''/v' \varphi')$ correspondant aux deux cas où, dans les états initial et final figurent un ou deux quanta; on obtient:

$$\left. \begin{aligned} S'^{(2)}(u''/u') &= (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 u^{+''}(x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\ &\quad \cdot D_v^+(x''/x') \cdot D_\varphi^+(x''/x') u'(x') \\ S'^{(2)}(v'' \varphi''/v' \varphi') &= (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 (v^{+''} \varphi^{+''})(x'') \\ &\quad \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_u^+(x''/x') \cdot (v' \varphi')(x') \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Pour obtenir les expressions correctes, il faut, comme nous l'avons vu, ajouter à h les invariants décrivant les processus de création et d'annihilation complémentaires à ceux de (5.1), tels que:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon h'(u'' \varphi''/v') &= \varepsilon(u^{+''} \varphi^{+''} v')(x); \quad \varepsilon h'(v'' \varphi'' u''/o) = \varepsilon(v^{+''} \varphi^{+''} u^{+''})(x); \\ \varepsilon h'(v'' u''/\varphi') &= \varepsilon(v^{+''} \varphi' u^{+''})(x); \\ \varepsilon h'(v''/u' \varphi') &= \varepsilon(v^{+''} u' \varphi')(x); \quad \varepsilon h'(o/u' v' \varphi') = \varepsilon(u' v' \varphi')(x); \\ \varepsilon h'(\varphi''/v' u') &= \varepsilon(u' v' \varphi^{+''})(x); \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Reprenant alors les mêmes transformations qu'au § 4, on obtient dans le second des cas:

$$\begin{aligned} S^{(2)}(u'' \varphi''/v' \varphi') &= (-i)^2 \frac{2}{i} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 (v^{+''} \varphi^{+''})(x'') \\ &\quad D_u^c(x''/x') (v' \varphi')(x') \end{aligned} \quad (5.4)$$

contenant la fonction $D_u^c(x)$, conformément à la théorie générale: Remarquons en passant que la valeur de $S^{(2)}(v''/v')$ où le champ φ n'est pas quantifié s'obtient à partir de (5.4); mais il faut alors que l'on ait $\varphi^+ = \varphi$, c'est-à-dire que le champ $\varphi(x)$ (nombre C) soit réel: on retrouve alors aux notations près l'expression (4.7).

Dans le second cas, en utilisant les identités:

$$\theta^+(x) \theta^+(x) \equiv \theta^+(x); \quad \theta^+(x) \theta^-(x) \equiv 0 \quad (5.6)$$

qui permettent en particulier d'ajouter des termes à noyaux de la forme:

$$\theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_u^+(x''/x') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'}) D_\varphi^-(x''/x')$$

on trouve pour le $S^{(2)}(u''/u')$ corrigé:

$$\begin{aligned} S^{(2)}(u''/u') &= (-i)^2 \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^2 \cdot \int (dx'')^4 \int (dx')^4 u^{+''}(x'') \cdot D_v^c(x''/x') \\ &\quad \cdot D_\varphi^c(x''/x') \cdot u'(x') \end{aligned} \quad (5.7)$$

où les deux fonctions $D_{v,\varphi}^c$ ont le même argument.

On peut maintenant passer au troisième ordre, et calculer par exemple le terme $S^2(v''\varphi''/u')$. Ici, comme il y a plus d'un champ quantifié et plus de deux points où création et annihilation peuvent avoir lieu, les sommations sur les états des quanta u , φ , v peuvent se faire de diverses manières: chacune correspondant à un couple des points x'' , x' , x''' de l'espace-temps, qui est l'argument de la fonction D consécutive à cette contraction (*contraction* est le mot que nous emploierons pour ce genre particulier de sommation sur les états). Le résultat de cette complication est que, dans le cas général, chaque terme $S^{(n)}(\dots\dots)$ se décompose en autant de sous-termes qu'il y a de combinaisons possibles entre les arguments et les contractions, dont le nombre est lui-même déterminé par l'ordre n et l'argument de $S^{(n)}(\dots\dots)$.*

C'est ainsi que pour $S^{(3)}(v''\varphi''/u')$ sans correction, l'on obtient la somme des 4 termes (nous écrivons \int'' pour $\int(dx'')$):

$$\begin{aligned}
 S^{(3)}(v''\varphi''/u') = & (-i)^3 \int''' \int'' \int' \cdot [v^{++}(x''') \cdot \theta^+(x^{4'''} - x^{4''}) \cdot D_u^+(x'''/x'') \\
 & \cdot D_\varphi^+(x'''/x') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D_v^+(x''/x') \cdot \varphi^{++}(x') \cdot u'(x'') \\
 & + \varphi^{++}(x''') \cdot \theta^+(x^{4'''} - x^{4''}) \cdot D_u^+(x'''/x'') \cdot D_v^+(x'''/x') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\
 & \cdot D_\varphi^+(x''/x') \cdot v^{++}(x') \cdot u'(x') \\
 & + v^{++}(x''') \varphi^{++}(x''') \cdot \theta^+(x^{4'''} - x^{4''}) \cdot D_u^+(x'''/x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\
 & \cdot D_v^+(x''/x') \cdot D_\varphi^+(x''/x') \cdot u'(x') \\
 & + v^{++}(x'') \theta^+(x^{4'''} - x^{4''}) \cdot D_u^+(x'''/x'') \cdot \varphi^+(x'') \cdot D_\varphi^+(x'''/x') \\
 & \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D_v^+(x''/x') \cdot u'(x')] \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Utilisant alors le registre complet (donné par 5, 1 et 3) des processus d'interactions (au nombre de $2^3 = 8$), on obtient en utilisant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, le $S^{(3)}(v''\varphi''/u')$ corrigé, qui se décompose aussi en 4 termes, *séparément causals et invariants*:

$$\begin{aligned}
 S^3(u''/u') = & (-i)^3 \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^3 \cdot \int''' \cdot \int'' \cdot \int' \cdot [v^{++}(x''') \cdot D_u^c(x'''/x'') \cdot D_v^c(x'''/x') \\
 & \cdot D_\varphi^c(x''/x') \cdot \varphi^{++}(x') \cdot u'(x') \\
 & + \varphi''(x''') \cdot D_u^c(x'''/x'') \cdot D_v^c(x'''/x') \cdot D_\varphi^c(x''/x') \cdot v^{++}(x') \cdot u'(x') \\
 & + (v^{++}\varphi^{++})(x'') \cdot D_u^c(x'''/x'') \cdot D_\varphi^c(x''/x') \cdot D_v^c(x''/x') \cdot u'(x') \\
 & + v^{++}(x''') \cdot D_u^c(x'''/x'') \cdot \varphi^{++}(x'') \cdot D_\varphi^c(x'''/x') \cdot D_v^c(x''/x') \cdot u'(x')] \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Ce résultat est bien conforme à la théorie générale du § 3. Nous voyons maintenant que la présence des fonctions $D_u^c(x^{(n)}/x^{(l)})$ dans

* Ces sous-termes correspondent à un type bien défini de *graphe* représentant ces contractions dans l'espace temps.

le noyau des intégrales représentant les différents $S^{(n)}(\dots/\dots)$ est due à la combinaison systématique de toute contraction du type :

$$\int dV(u) (\dots u(x^{(m)}) (u^+(x^{(l)})) \dots)$$

avec la contraction complémentaire :

$$\int dV(u) (\dots u(x^{(l)}) (u^+(x^{(m)})) \dots)$$

toutes choses restant égales d'ailleurs. Nous avons ici une démonstration, moins axiomatique que celle qui se fonde sur les propriétés causales de la fonction $D_{\times}(x)$, de la proposition selon laquelle la structure d'un (sous-)terme d'ordre n de l'opérateur \mathbf{S} dans son développement en fonction du paramètre de couplage ε est :

$$S^{(n)}(v'' \dots / \dots u') = (-i)^n \left(\frac{2}{i}\right)^{N(n)} \int^{(n)} \dots \int^{(n-1)} v'' + (x^n) \cdot g_n(x^n) \cdot D^c(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \dots g_i(x^{(i)}) D^c(x^{(i)}/x^{(k)}) \dots D^c(x''/x') g_1(x') \cdot u'(x') \quad (5.10)$$

$N(n)$ est le nombre de fonctions D^c présentes dans le noyau. Dans le cas général où l'interaction fait intervenir les dérivées des champs, les fonctions $g_i(x^{(i)})$ contiennent les opérateurs de dérivée $\partial_{\alpha(i)}$.

On voit facilement que pour ce terme d'ordre n , le nombre de fonction D^c intervenant dans le noyau, $N(n, m)$ est compris entre les limites :

$$(n-1) \leq N(n, m) \leq \begin{cases} \frac{nm}{2} - 1 & n \text{ ou } m \text{ pair} \\ \frac{nm-3}{2} & n \text{ et } m \text{ impair} \end{cases} \quad (5.11)$$

si m est le nombre de champs quantifiés ($m \geq 2$)*.

Quant au nombre d'arguments possibles pour ces fonctions il est évidemment $\nu(n) = C_2^n$.

6. L'unitarité de l'opérateur \mathbf{S} .

Pour fixer les idées nous donnons la démonstration de l'unitarité de \mathbf{S} dans le cas où le scalaire d'interaction dépend linéairement des champs à l'exclusion de leur dérivées. Il est facile de voir que cette limitation n'est pas essentielle pour la démonstration.

Comme nous l'avons vu, la condition d'unitarité pour \mathbf{S} découle de la nécessité pour $\psi(u'' \dots)$ de conserver au cours du temps la propriété d'une amplitude de probabilité.

*) Nous laissons de côté les transitions du vide au vide («énergie propre» du vide) entraînant une contraction supplémentaire.

Démontrons d'abord l'unitarité dans le cas particulier où le nombre de champs quantifiés est $m = 2$ (h bilinéaire en u). On a alors

$$N(n, 2) = n - 1$$

fonctions D^c dans le terme $S^{(n)}$, qui est toujours simple. Comme dans les contractions (6.7) un seul champ peut être contracté, mais par l'intermédiaire des demi-champs $+$ et $-$, on a pour ce terme:

$$\begin{aligned} S^{+(i)} S^{(n-i)}(u''/u') &= (-1)^{2i-1} \cdot (-i)^i \left(\frac{2}{i}\right)^{i-1} \int \dots \int^{(n)} u'' + (x^{(n)}) \\ &\cdot D_u^a(x^{(i)}, x^{(i-1)}) \dots (D_u^a(x^{(n-i+2)}, x^{(n-i+1)})) \cdot (-i)^{n-i} \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^{(n-i-1)} \\ &\cdot (D_u^+ + D_u^-)(x^{n-i+1}/x^{n-1}) \cdot D_u^c(x^{n-i}/x^{n-i-1}) \\ &\dots D_u^c(x''/x') u'(x'). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Les identités (6.3) à satisfaire peuvent s'écrire alors:

$$\begin{aligned} &(-i)^n \left(\frac{2}{i}\right)^{(n-1)} \cdot \int \dots \int^{(n)} u'' + (x^n) [D_u^c(x^{(n)}, x^{n-1}) D_u^c(x^{n-1}/x^{n-2}) \dots D_u^c(x''/x') \\ &- i (D_u^1(x^{(n)}, x^{n-1}) D_u^c(x^{n-1}/x^{n-2})) \dots D_u^c(x''/x') \\ &+ D_u^a(x^{(n)}/x^{(n-1)}) D^1(x^{(n-1)}/x^{(n-2)}) \cdot D^c(\dots) \dots D^c(x''/x') \\ &+ \dots + D_u^a(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \dots D_u^a(x''''/x''') D_u^1(x'''/x'') D_u^c(x''/x') \\ &+ D_u^a(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \dots D_u^a(x'''/x'') \cdot D^1(x''/x')] - D_u^a(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \dots \\ &\dots D_u^a(x''/x') u'(x') \equiv 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

elles le sont pour n quelconque, en vertu de l'identité vraie pour n quelconque et quels que soient les arguments et indices (1), (2) ... $(n-1)$:

$$\begin{aligned} &D^c(1) D^c(2) \dots D^c(n-1) - i (D^1(1) D^c(2) \dots D^c(n-1) \\ &+ D^a(1) D^1(2) D^c(3) \dots D^c(n-1) + \dots D^a(1) \dots \\ &\dots D^a(n-3) D^1(n-2) D^c(n-1) + D^a(1) \dots \\ &\dots D^a(n-2) D^1(n-1)) \\ &- D^a(1) D^a(2) \dots D^a(n-1) \equiv 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Cette identité se démontre par récurrence; multipliant tous les termes de (6.10) sauf le dernier par $D^c(n)$ et le dernier par $i D^1(n) + D_1^a(n)$ ($= D_{(n)}^c$), on obtient l'identité dans le cas de $n \equiv n+1$. Pour $n = 2$, c'est simplement l'identité:

$$D^c(1) - i D^1(1) - D^a(1) = 0 \quad (6.11)$$

dont toutes les autres sont une conséquence.

Dans le cas où m est quelconque, on sait que le nombre N de fonctions D^c présentes dans le noyau de $S^{(n)}$ est compris entre les limites:

$$(n-1) \leq N(n, m) \leq \begin{cases} \frac{nm}{2} - 1 & m \text{ ou } n \text{ pair} \\ \frac{nm-3}{2} & m \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

Alors le facteur $(-1)^{n+N(n, m)}$ peut être $+1$ ou -1 , suivant la parité de $n + N(n, m)$, qui n'est définie séparément ni par m , ni par n , ni par la structure de l'argument de S , mais seulement lorsque ces trois données sont fixées simultanément.

Si l'on remarque alors que (nous n'écrivons pas les arguments supposés distincts):

$$\begin{aligned} \underbrace{D^a D^a \dots D^a}_N &= D^s D^s \dots D^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum' D^1 D^1 D^s \dots D^s \\ &+ \left(\frac{i}{2}\right)^4 \sum' D^1 D^1 D^1 D^1 D^s \dots D^s + \dots \\ &\pm \frac{i}{2} \left[\sum' D^1 D^s \dots D^1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum' D^1 D^1 D^1 D^s \dots D^s \right. \\ &\left. + \left(\frac{i}{2}\right)^6 \sum' D^1 D^1 D^1 D^1 D^1 D^s \dots D^s + \dots \right] \\ &= Re_N \pm \frac{i}{2} I_N \end{aligned} \quad (6.12)$$

(\sum' signifiant que la somme s'effectue sur tous les termes où figurent le même nombre ($< N$) d'indices 1) on peut écrire, pour N quelconque les deux identités:

$$D^c(1) D^c(2) \dots D^c(N) - 2 I_N - D^a(1) D^a(2) \dots D^a(N) \equiv 0 \quad (6.13a)$$

$$D^c(1) D^c(2) \dots D^c(N) - 2 Re_N + D^a(1) D^a(2) \dots D^a(N) \equiv 0 \quad (6.13b)$$

Ce sont ces identités qui assurent, de manière analogue à (6.10) (qui est une manière d'écrire (6.13a) pour le cas où $N = n - 1$) les relations (6.3) assurant l'unitarité de l'opérateur S .

Il faut remarquer que dans les conditions (6.13), les expressions:

$$I_N = \sum' D^1 D^s \dots D^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum' D^1 D^1 D^1 D^s \dots D^s + \dots \quad (6.14a)$$

$$Re_N = D^s D^s \dots D^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum' D^1 D^1 D^s \dots D^s + \dots \quad (6.14b)$$

figurent sous les intégrales multiples $\int \dots \int^{(n)} \dots$: de ce fait, et aussi parce que les arguments des fonctions $D(x)$ ne sont en général pas indépendants, il y a des simplifications et des regroupements pos-

sibles, différents suivant chaque sous terme $S_l^{(n)}$ d'un $S^{(l)}$. C'est ce qui peut rendre la vérification de ces relations souvent fastidieuse.

A titre d'exemple, prenons le cas de 3 champs quantifiés, examiné au paragraphe précédent; pour la relation du troisième ordre, où $n + N(n, m) = 6$, c'est donc l'identité:

$$D_u^c(1) D_\varphi^c(2) D_v^c(3) - 2 R e_3 + D_u^a(1) D_\varphi^a(2) D_v^a(3) \equiv 0$$

avec

$$\begin{aligned} 2 R e_3 - 2 D_u^s(1) D_\varphi^s(2) D_v^s(3) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 [D_u^1(1) D_\varphi^1(2) D_v^s(3) \\ + D_u^1(1) D_\varphi^s(2) D_v^1(3) + D_u^s(1) D_\varphi^1(2) D_v^1(3)] \end{aligned} \quad (6.15)$$

qui intervient. Cette identité s'écrit de 4 manières différentes, suivant les 4 combinaisons possibles d'arguments des fonctions D_u^c , D_φ^c , D_v^c dans (15.9):

$$\text{Pour } D_u^c(x'''/x'') \cdot D_\varphi^c(x'''/x') \cdot D_v^c(x''/x'):$$

$$2 R e_3 = - D_u^a D_\varphi^a D_v^1 + \frac{i}{4} (D_u^+ D_\varphi^+ + D_u^- D_\varphi^-) D_v^c; \quad (6.16)$$

pour $D_u^c(x'''/x'') D_v^c(x'''/x') D_\varphi^c(x''/x')$ on échange simplement dans (6.16) les indices v et φ .

$$\text{Pour } D_u^c(x'''/x'') D_\varphi^c(x'''/x') D_v^c(x''/x'):$$

$$\begin{aligned} 2 R e_3 = -\frac{1}{4} [D_u^s(D_\varphi^+ D_v^+ + D_\varphi^- D_v^-) + D_\varphi^s(D_u^+ D_v^- + D_u^- D_v^+) \\ + (D_u^+ D_\varphi^+ + D_u^- D_\varphi^-) D_v^s] \end{aligned} \quad (6.17)$$

et enfin pour $D_u^c(x'''/x'') D_\varphi^c(x''/x') D_v^c(x'''/x')$:

$$2 R e_3 = D_u^1 D_\varphi^c D_v^c + \frac{i}{4} D_u^a (D_\varphi^+ D_v^+ + D_\varphi^- D_v^-) \quad (6.18)$$

Ces identités font mieux apparaître les produits $\mathbf{S}^{(1)+} \mathbf{S}^{(2)}$ et $\mathbf{S}^{(2)+} \mathbf{S}^{(1)}$.

7. Conséquences générales; passage à l'espace des quanta.

Reprenons devant les yeux les applications de la théorie données au paragraphe 4, plus précisément les deux cas d'un champ une fois scalaire, l'autre fois de spin $\frac{1}{2}$, l'inhomogénéité de l'espace étant scalaire (\mathcal{A} et \mathcal{C}).

Pour trouver l'opérateur \mathbf{S} correct, nous avons alors fait l'hypothèse de l'existence de processus d'interaction décrits par h_c et h_a . Dans le cas scalaire, nous avons admis la symétrie:

$$h_c(u'' u' / o) = h_c(u' u'' / o), \dots$$

tandis que dans le cas du champ spinoriel, nous avons écrit:

$$h_c(u'' u' / o) = -h_c(u' u'' / o), \dots$$

nous appuyant sur le principe d'exclusion de M. PAULI.

On peut renverser le raisonnement: admettre a priori comme seule forme possible pour les différents $S^{(i)}$ celle où les noyaux contiennent la fonction potentielle.

Partant alors de la forme incomplète $S^{(2)'}(u''/u')$ pour $S^{(2)}(u''/u')$ nous déduisons que la seule correction possible est donnée par le terme $S^{(2)''}(u''/u')$. Nous savons d'autre part qu'à cette correction doit correspondre des processus de création et d'annihilation de paires, c'est-à-dire des invariants scalaires du type h_c , et h_a qu'il faut additionner à h . Pour que ces invariants donnent bien la correction (4,27), il faut et il suffit qu'ils satisfassent à la condition d'antisymétrie (4,25, 26). Ainsi donc le principe de M. PAULI apparaît là comme une conséquence: 1. de la description relativiste des particules à spin $\frac{1}{2}$; 2. de l'invariance et de causalité de la théorie. Ce fait connu apparaît ici, nous semble-t-il, bien simplement. Les mêmes raisonnements peuvent être repris dans le cas de champs de quanta vectoriels ou scalaires, de spin 0,1, ... On trouverait les résultats correspondants, à savoir la nécessité d'une statistique de Bose.

En outre, on peut remarquer que la différence de statistique entre les particules scalaires décrites par le champ $u(x)$ et les particules spinorielles décrites par le champ $u^A(x)$ tient entière dans les propriétés de symétries des fonctions $D_{\kappa}^+(x''/x')$ scalaires et spinorielles:

$$D^-(x''/x') = D^+(x'/x'') \quad (7.1)$$

$$D^{-A''A'}(x''/x') = -D^{+A''A'}(x'/x'') \quad (7.2)$$

intervenant dans les relations (1.18) et (2.24) de saturation des systèmes de paquets. Ce sont elles en effet, qui nécessitent la symétrie des invariants $h_c(u'' u' / o)$, $h_a(o / u'' u')$ de la théorie scalaire et la dissymétrie des invariants correspondants de la théorie spinorielle. Une autre manière de le voir consiste à revenir au formalisme de la deuxième quantification dans l'espace des quanta, en introduisant les opérateurs $\mathbf{u}(x)$ et $\mathbf{u}^A(x)$. Les relations de commutation entre ces opérateurs ne peuvent faire intervenir au deuxième membre que la fonction $D^0(x''/x')$. (Pour s'en rendre compte, il suffit, d'utiliser les relations de saturation ou encore remarquer que le commutateur doit contenir une fonction singulière $\delta(x)$). Dès lors, l'antisymétrie

de $D_{\times}^0(x)$ d'une part, et la symétrie de $D_{\times}^{0A''A'}(x''/x')$ d'autre part, montrent que dans le premier cas (champ scalaire) c'est le commutateur des opérateurs de champs qui doit intervenir:

$$i [\mathbf{u}^+(x''), \mathbf{u}(x')] = D_{\times}^0(x''/x') \mathbf{1} \quad (7.3)$$

et que dans l'autre c'est l'anticommutateur:

$$[\mathbf{u}^{+A''}(x''), \mathbf{u}^A(x')]_+ = D_{\times}^{0A''A'}(x''/x') \cdot \mathbf{1} \quad (7.4)$$

Pour passer des demi-champs $u_{\pm}(x)$, $u_{\pm}^A(x)$, aux opérateurs de champs $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{u}^A(x)$, ... opérant dans l'espace des quanta de la deuxième quantification, on introduit les opérateurs:

$$\mathbf{a}_+(u), \mathbf{a}_-(u) \quad (7.5)$$

satisfaisant aux relations de commutations:

$$[\mathbf{a}_{\pm}(u'), \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger}(u'')] = \delta(u'/u'') \cdot \mathbf{1} \quad (7.6)$$

(les autres commutateurs s'annulant)

où interviennent le commutateur ou l'anticommutateur suivant la statistique (ou le spin).

Les opérateurs de demi champs sont alors donnés par:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\pm}(x) &= \sum_{u'_{\pm}} \mathbf{a}_{\pm}(u'_{\pm}) \cdot u'_{\pm}(x) \\ \mathbf{u}_{\pm}^A(x) &= \sum_{u'_{\pm}} \mathbf{a}_{\pm}(u'_{\pm}) u'_{\pm}^A(x) \end{aligned} \quad (7.7)$$

les opérateurs de champ complet étant eux-mêmes:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_+(x) + \mathbf{u}_-^{\dagger}(x); \quad \mathbf{u}^A(x) = \mathbf{u}_+^A(x) + \mathbf{u}_-^{\dagger A}(x) \quad (7.8)$$

ils vérifient (7.3) ou (7.4), compte tenu des relations (7.6). L'on obtient alors facilement les opérateurs correspondant aux grandeurs apparaissant dans notre exposé comme des « nombres c ». Par exemple, à la grandeur:

$$S^{(1)}(u''_+/u'_+) = (-i) \int_L (dx)^4 (u''_+ + C u'_+) (x) \quad (7.9)$$

correspond l'opérateur, pour le champ entier:

$$\mathbf{S}^{(1)} = (-i) \int_L (dx)^4 (\mathbf{u}^+ C \mathbf{u}) (x) \quad (7.10)$$

Il est clair que ces opérateurs sont appliqués à la fonctionnelle $\psi[N_+(u'), N_-(u'); \dots, \dots]$ décrivant l'état du système dans l'espace des quanta.

Comme le montrent les applications particulières et générales que nous avons faites, la forme intégrale de la théorie proposée est équivalente à la forme hamiltonienne habituelle dans ses résultats

relatifs aux phénomènes de diffusion ou de collision, les seuls étudiés ici.

Mais son point de vue est bien différent: l'opérateur caractéristique est l'opérateur intégral \mathbf{S} , au lieu de \mathbf{h} . C'est sur cet opérateur que portent les tentatives d'amélioration de la théorie, en particulier dans les essais pour supprimer les infinités. C'est ce qu'illustre bien le chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Une expression finie pour le moment magnétique du neutron.*)

8. La méthode d'évaluation du moment magnétique.

Nous nous plaçons dans la première approximation par rapport au champ électromagnétique que nous ne quantifions pas. Nous supposons donc qu'il règne un champ extérieur constant $B_{\alpha\beta}$, correspondant au potentiel:

$$A_{\alpha} = -\frac{1}{2} B_{\alpha\mu} x^{\mu} \quad (8.1)$$

D'autre part il est utile pour les applications de faire dans les formules (3.8) $\tau' = T'$, $\tau'' = T''$ et $(dx')^4 = dt' (dx')^3$ où T' , T'' et t' sont des valeurs particulières du temps t . Introduisant alors l'énergie $\mathbf{H} = \int (dx)^3 \mathbf{h}$, on a en développant comme en (3.6, 7 et 8):

$$\varepsilon \mathbf{S}^{(1)} = (-i) \varepsilon \int_{T'}^{T''} dt \mathbf{H}^{(1)}, \text{ etc.} \quad (8.2)$$

Nous connaissons d'autre part la valeur de l'énergie d'un moment électromagnétique $\mu^{\alpha\beta}$ (c'est-à-dire d'un moment électrique $p^i = \mu^{i4}$ associé à un moment magnétique $\mu^i = \mu^{jk}$; $i, j, k = 1, 2, 3$) dans un champ constant: elle vaut:

$$\varepsilon \mathbf{H} = -(\vec{B}, \vec{\mu}) - (\vec{E}, \vec{p}) = -\frac{1}{2} B_{\alpha\beta} \mu^{\alpha\beta} \quad (8.3)$$

Nous pouvons donc écrire, en passant aux représentations dans l'espace des paquets:

$$\varepsilon S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = (-i) -\frac{1}{2} \cdot B_{\alpha\beta} \cdot \int_{T'}^{T''} dt \cdot \mu^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) \quad (8.4)$$

Cette expression est le point de départ de l'évaluation d'un moment magnétique.

Appliquons-là d'abord à une particule chargée, dans les deux cas de spin zéro et $1/2$.

*) Un compte-rendu des résultats obtenus dans ce chapitre a fait l'objet d'une «Lettre à l'éditeur» de la *Physical Review*®).

a) *Particule scalaire.*

Comme l'a montré le § 4, le scalaire d'interaction est ici ($\pm \varepsilon$ = charge de la particule):

$$\varepsilon \hbar (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \mp \varepsilon (A^{\alpha} J_{\alpha} (u''_{\pm}/u'_{\pm})) (x)$$

Nous obtenons alors pour l'opérateur $\mathbf{S}^{(1)}$ la représentation:

$$\begin{aligned} \varepsilon S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) &= (-i) \varepsilon \int (dx)^4 \hbar (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \\ &= (-i) \cdot \pm \frac{1}{4i} \varepsilon B_{\alpha\beta} \int (dx)^4 \cdot u''_{\pm} (\mathbf{x}^{\alpha} \partial^{\beta} - \mathbf{x}^{\beta} \partial^{\alpha}) u'_{\pm} \end{aligned} \quad (8.6)^{*}$$

ou, d'après (1.20):

$$\varepsilon S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{i}{4} \varepsilon B_{\alpha\beta} \int dt \cdot (\Omega^{-\frac{1}{2}} L^{\alpha\beta} \Omega^{-\frac{1}{2}}) (u''_{\pm}/u'_{\pm}) \quad (8.7)$$

Le moment magnétique vaut donc:

$$\mu^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{\varepsilon}{2} (\Omega^{-\frac{1}{2}} L^{\alpha\beta} \Omega^{-\frac{1}{2}}) (u''_{\pm}/u'_{\pm}) \quad (8.8)$$

En particulier, dans le système de repos de la particule défini par:

$$\Omega = \mathbf{k}^4 = \kappa \cdot \mathbf{1} \quad (\vec{\mathbf{k}} \sim 0) \quad (8.9)$$

on obtient la relation bien connue de LORENTZ:

$$\mu^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{\varepsilon}{2\kappa} L^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) \quad (8.10)$$

b) *Particule de spin 1/2.*

Le scalaire d'interaction $\mathbf{h} = \mp \varepsilon \mathbf{J}^{\alpha} A_{\alpha}$ est modifié en ce sens que le courant \mathbf{J}^{α} a pour représentation:

$$\mathbf{J}^{\alpha} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \frac{1}{4} u''_{\pm} \gamma^{\alpha} u'_{\pm} \quad (8.11)$$

On a donc pour $S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm})$:

$$\varepsilon S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = -i \frac{\varepsilon}{16} B_{\alpha\beta} \int (dx)^4 u''_{\pm} (x^{\beta} \gamma^{\alpha} - x^{\alpha} \gamma^{\beta}) u'_{\pm} \quad (8.12)$$

En utilisant l'identité facile à démontrer:

$$i \kappa u''_{\pm} (x^{\beta} \gamma^{\alpha} - x^{\alpha} \gamma^{\beta}) u'_{\pm} \equiv u''_{\pm} (\mathbf{L}^{\beta\alpha} + 2 \mathbf{S}^{\beta\alpha}) u'_{\pm} \quad (8.13)$$

il vient:

$$\varepsilon S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \mp \frac{\varepsilon}{16\kappa} B_{\alpha\beta} \int (dx)^4 u''_{\pm} (\mathbf{L}^{\beta\alpha} + 2 \mathbf{S}^{\beta\alpha}) u'_{\pm} \quad (8.14)$$

*) Nous écrivons \int pour $\int_{T''}^{T''}$

d'où, en vertu de (2.25) et (8.4) :

$$\mu^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{\varepsilon}{2i\kappa} (\gamma^4 (L^{\alpha\beta} + 2 S^{\alpha\beta})) (u''_{\pm}/u'_{\pm}) \quad (8.17)$$

Dans le système de repos de la particule, nous retrouvons le résultat connu :

$$\mu^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm 2 \frac{\varepsilon}{2\kappa} S^{\alpha\beta} (u''_{\pm}/u'_{\pm}). \quad (8.18)$$

Déduisons en passant des relations (8.6) et (8.7) d'une part, (8.12) et (8.14) d'autre part, la représentation des invariants h dans les deux théories scalaires et de spin $\frac{1}{2}$:

$$\varepsilon h (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \varepsilon \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} u''_{\pm} L^{\alpha\beta} u'_{\pm} \quad (8.19)$$

$$\varepsilon h (u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \varepsilon \frac{i}{16\kappa} B_{\alpha\beta} u''_{\pm} (L^{\alpha\beta} + 2 S^{\alpha\beta}) u'_{\pm} \quad (8.20)$$

D'après les exemples qui précèdent, on voit qu'en première approximation le moment magnétique d'une particule est proportionnel à sa charge*). En première approximation donc, le moment magnétique du neutron est nul. Il faut dans ce cas aller à une approximation supérieure, c'est-à-dire faire appel à des états virtuels intermédiaires, le neutron se décomposant en un proton et en un méson de charges opposées, influencées par le champ électromagnétique.

Si g est le paramètre de couplage entre la particule lourde et le champ de mésons, ε restant le paramètre pour l'interaction d'une particule de charge $\pm \varepsilon$ avec le champ électromagnétique, la première approximation différente de zéro pour S est évidemment le terme en εg^2 de son développement en ε et g .

Nous obtenons donc le moment magnétique du neutron en troisième approximation en écrivant, selon la méthode générale :

$$\varepsilon g^2 S^{(3)} = (-i) \cdot \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} \cdot \int_{+T'}^{+T''} dt \cdot \mu^{\alpha\beta} \quad (8.21)$$

C'est la relation de base pour notre calcul.

*) Pour les particules spinorielles, il est possible comme l'on sait d'introduire dans l'équation de M. DIRAC des termes invariants $\lambda S_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}$:

$$((\gamma \partial) + i\varepsilon(\gamma, A) + \lambda S_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} + \kappa) u(x) = 0$$

dont la conséquence est d'attribuer à la particule décrite par cette équation un moment magnétique :

$$\mu^{\alpha\beta} = 2 \left(\lambda + \frac{e}{2\kappa} \right) S^{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon}{2\kappa} L^{\alpha\beta} \quad (8.21)$$

au lieu de (8.17). λ est appelé moment magnétique intrinsèque de la particule.

9. La formation de l'opérateur $\mathbf{S}^{(3)}$ dans le cas d'un champ mésonique pseudo-scalaire. Une première expression pour le moment magnétique.

Nous considérons le cas où le méson de masse κ_φ est décrit par un champ pseudoscalaire $\varphi(x)$.

Le neutron, de masse κ_n , est une particule de spin $1/2$, décrite par le champ d'onde spinoriel $v^A(x)$.

Il y a quatre types d'invariants scalaires d'interaction à considérer:

1. Celui qui décrit l'interaction pure entre les champs mésonique $\varphi(x)$ et neutronique $v^A(x)$:

$$g h^{(1)}(\varphi_-'' u_+''/v') = g(u_-'' + i \tau^\alpha v' \partial_\alpha \varphi_-'' +) (x) \\ \tau^\alpha = \frac{1}{2} [\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4, \gamma^\alpha] \quad (9.1)$$

il décrit l'annihilation du neutron, avec création simultanée d'un proton (champ $u_A(x)$) et d'un méson négatif; il y a aussi le processus inverse correspondant à $(g h^{(1)})^+$.

2. Celui qui décrit l'interaction pure entre le méson négatif et le champ électromagnétique, calculé déjà au § 8:

$$\varepsilon h^{(1)}(\varphi_-''/\varphi_-') = -\varepsilon \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} \varphi_-'' + \mathbf{L}^{\alpha\beta} \varphi_-' \quad (9.2)$$

3. Celui qui semblablement décrit l'interaction pure entre le proton et le champ électromagnétique, donné en (8.20).

4. Enfin celui qui décrit l'interaction mixte entre le champ neutronique, le champ mésonique et le champ électromagnétique:

$$\varepsilon g h^{(2)}(\varphi_-'' u_+''/v') = \varepsilon g(u_-'' + \tau^\alpha v' A_\alpha \varphi_-'' +) (x) \quad (9.3)$$

$$A_\alpha = -\frac{1}{2} B_{\alpha\beta} x^\beta$$

Afin de présenter clairement les quatre processus différents qui vont apporter leur contribution à l'opérateur $\mathbf{S}^{(3)}$ (donc au moment magnétique dans l'approximation d'ordre 3), nous les distinguons par les indices Ia, Ib, IIa et IIb; le chiffre I caractérisant les contributions dues à trois interactions «pures», II désignant les contributions avec interactions mixtes.

A chacune des évolutions correspond une contribution à l'opérateur $\mathbf{S}^{(3)}$, contributions que nous désignons par:

$$\mathbf{S}_{\text{Ia}}^{(3)}, \mathbf{S}_{\text{Ib}}^{(3)}, \mathbf{S}_{\text{IIa}}^{(3)} \text{ et } \mathbf{S}_{\text{IIb}}^{(3)}.$$

Nous avons ainsi, conformément à l'expression (3.8):

$$\begin{aligned} \varepsilon g^2 S_{\text{Ia}}^{(3)}(v''/v''') &= (-i)^3 \varepsilon g^2 \cdot \int (dx'')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot \int (dx')^4 \cdot \theta^+(x^{4''} - x^4) \\ &\cdot \theta^+(x^4 - x^{4'}) \cdot \int dV_u'' \cdot \int dV_{\varphi-}''' \cdot \int dV_{\varphi-}'' h^{(1)}(v''''/u''_+ \varphi'''_-) (x'') \\ &\cdot h^{(1)}(\varphi'''_-/\varphi''_-) (x) h^{(1)}(u''_+ \varphi''_-/v') (x') \end{aligned} \quad (9.4)$$

avec les matrices h données ci-dessus.

En utilisant alors les relations de saturation, on obtient:

$$\begin{aligned} \varepsilon g^2 S_{\text{Ia}}^{(3)'}(v''''/v') &= (-i)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \varepsilon g^2 \cdot B_{\alpha\beta} \cdot \int (dx'')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot \int (dx')^4 \\ &\cdot v''''^+ (x'') \cdot \tau^{\alpha''} \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_u^+ (x''/x') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^4) D_{\varphi; \alpha''}^+ (x''/x) \\ &\cdot \theta^+(x^4 - x^{4'}) \cdot L^{\alpha\beta} D_{\varphi; \alpha'}^+ (x/x') \cdot \tau^{\alpha'} v' (x') \end{aligned} \quad (9.5)$$

(nous écrivons D_φ pour $D_{\times\varphi}$). Car on a l'identité évidente:

$$\theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \cdot \theta^+(x^{4''} - x^4) \cdot \theta^+(x^{4'} - x^4) = \theta^+(x^{4''} - x^4) \theta^+(x^4 - x^{4'})$$

De manière tout à fait semblable, on obtient $\mathbf{S}_{\text{Ib}}^{(3)'}$.

Calculons maintenant les contributions $S_{\text{IIa}}^{(3)'}$ et $S_{\text{IIb}}^{(3)'}$. Nous avons:

$$\begin{aligned} S_{\text{IIa}}^{(3)'}(v''''/v') &= (-i)^3 \varepsilon g^2 \cdot i \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\ &\cdot h^{(1)}(v''''/u''_+ \varphi''_-) (x'') \cdot h^{(2)}(u''_+ \varphi''_-/v') (x') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{\text{IIb}}^{(3)'}(v''''/v') &= (-i)^3 \varepsilon g^2 \cdot i \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\ &h^{(2)}(v''''/u''_+ \varphi''_-) (x'') \cdot h^{(1)}(u''_+ \varphi''_-/v') (x') \end{aligned}$$

où $h^{(1)}(v''''/u''_+ \varphi''_-)$, $h^{(2)}(v''''/u''_+ \varphi''_-)$, etc. sont donnés par (9.1 et 3). Après usage des relations de saturation, on trouve:

$$\begin{aligned} \varepsilon g^2 S_{\text{IIa}}^{(3)'}(v''''/v') &= (-i)^3 \cdot \varepsilon g^2 \cdot \frac{1}{2} B_{\alpha'\beta'} \cdot \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \\ &\cdot v^{+''''} (x'') \cdot \tau^{\alpha''} \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_u^+ (x''/x') \\ &\cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) D_{\varphi; \alpha''}^+ (x''/x') \cdot x^{\beta'} \cdot \tau^{\alpha'} \cdot v' (x') \end{aligned} \quad (9.6)$$

et une expression analogue pour $\varepsilon g^2 S_{\text{IIb}}^{(3)'}$.

Ces contributions sont causales, mais non pas invariantes. Utilisant la méthode générale que nous avons donnée au § 3, nous pouvons former directement les représentations des opérateurs $\mathbf{S}_{\text{Ia}}^{(3)}$, $\mathbf{S}_{\text{Ib}}^{(3)}$, $\mathbf{S}_{\text{IIa}}^{(3)}$ et $\mathbf{S}_{\text{IIb}}^{(3)}$ à la fois causals et invariants: il suffit de remplacer partout les combinaisons: $\theta^+(z^4 - y^4) D_{\times}^+(z/y)$ par $-2i D_{\times}^c(z/y)$.

Utilisant alors la relation (8.21) où nous faisons $T'' = -T' = T \rightarrow \infty$, ce qui revient à prendre pour domaine invariant d'intégration \mathbf{L} en (3.6) tout l'espace temps, nous obtenons pour le moment magnétique (moyen) :

$$\begin{aligned}
 2 T \mu^{\alpha\beta} (v''/v') = i \varepsilon g^2 \Big\{ & -4 \cdot \int (dx'')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot \int (dx')^4 \cdot (v'' + (x'') \tau^{\alpha''}) \\
 & \cdot D_u^c(x''/x') \cdot D_{\varphi; \alpha''}^c(x''/x') \cdot \mathbf{L}^{\alpha\beta} \cdot D_{\varphi; \alpha'}^c(x/x') \cdot (\tau^{\alpha'} v'(x')) \\
 & + \frac{i}{\kappa} \cdot \int (dx'')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot \int (dx')^4 \cdot (v'' + (x'') \tau^{\alpha''}) \\
 & \cdot D_u^c(x''/x) \cdot D_{\varphi; \alpha'' x'}^c(x''/x') \cdot [\mathbf{L}^{\alpha\beta} + 2 \mathbf{S}^{\alpha\beta}] \cdot D_u^c(x/x') \cdot (\tau^{\alpha'} v'(x')) \\
 & - 4 i \int (dx')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot (v'' + (x') \tau^{\alpha'}) \cdot \\
 & \cdot D_u^c(x'/x) \cdot D_{\alpha'}^c(x'/x) \cdot x^\beta \cdot (\tau^\alpha \cdot v'(x)) \\
 & + 4 i \int (dx')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot (v'' + (x) \tau^\alpha) x^\beta \\
 & \cdot D_u^c(x/x') \cdot D_{\alpha'}^c(x/x') \cdot (\tau^{\alpha'} v'(x')) \Big\}. \quad (9.7)
 \end{aligned}$$

10. Décomposition des noyaux $D^c D^c D^c$ et $D^c D^c$: les cinq types d'intégrales donnant des contributions différentes de zéro.

Dans l'expression du moment magnétique que nous venons de trouver figurent des intégrales «triples» et des intégrales «doubles» de la forme (les limites infinies sont sous entendues) :

$$\int (dx'')^4 \int (dx)^4 \int (dx')^4 e^{i(l, x)} \mathbf{T}(\partial_\beta) \cdot D^c(x''/x) D^c(x/x') D^c(x''/x') \dots \quad (10.1)$$

ou :

$$\int (dx')^4 \int (dx)^4 e^{i(l, x)} \mathbf{V}(\partial_\beta) D^c(x'/x) D^c(x'/x) \dots \quad (10.2)$$

elles contiennent donc comme noyaux des produits, doubles ou triples de fonctions D^c . \mathbf{T} et \mathbf{V} sont des opérateurs linéaires continus, fonction des dérivées ∂_β . Posons

$$e^{i(l, x)} \mathbf{V}(\partial) = \mathbf{M}(x, \partial), e^{i(l, x)} \mathbf{T}(\partial) = \mathbf{N}(x, \partial)$$

Décomposons ces fonctions D^c selon :

$$D^c = D^s + \frac{i}{2} D^1 \quad (10.3)$$

Considérons pour commencer les intégrales *doubles*: elles donnent naissance à 4 types d'intégrales, ayant pour noyaux:

$$D_u^s D_\varphi^s(x'/x); \quad D_u^s D_\varphi^1(x'/x); \quad D_u^1 D_\varphi^s(x'/x); \quad D_u^1 D_\varphi^1(x'/x)$$

Nous allons montrer que celles dont les noyaux sont $D_u^s D_\varphi^s$ ou $D_u^1 D_\varphi^1$ se réduisent identiquement à zéro.

En effet, décomposons à leur tour:

$$\left. \begin{aligned} D^s(x'/x) &= \frac{1}{2} \varepsilon(x'^4 - x^4) \quad D^0(x'/x) = \frac{i}{4} \varepsilon(x'^4 - x^4) \\ &\quad [D^+(x'/x) - D^-(x'/x)] \\ D^1(x'/x) &= \frac{1}{2} [D^+(x'/x) + D^-(x'/x)] \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Mais on a (comme on le vérifie facilement en passant dans l'espace de FOURIER):

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (dx)^4 \cdot \mathbf{M}(x, \partial) \cdot D_u^\tau(x''/x) D_\varphi^\tau(x/x') &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} (dx)^4 \mathbf{N}(x, \partial) \cdot D_u^\tau(x''/x) D_\varphi^{-\tau}(x/x') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{si } \kappa_u \neq \kappa_\varphi \quad \tau = \pm 1 \\ &\text{quels que soient } \kappa_u, \kappa_\varphi \neq 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Donc les intégrales:

$$\left. \begin{aligned} \int (dx)^4 \mathbf{M} D_u^s(x'/x) D_\varphi^s(x'/x) &= \\ \frac{1}{4} \int (dx)^4 \mathbf{M} D_u^0(x'/x) D_\varphi^0(x'/x) &\equiv 0 \\ \int (dx)^4 \mathbf{M} D_u^1(x'/x) D_\varphi^1(x'/x) &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad \kappa_u \neq \kappa_\varphi \quad (10.6)$$

(car la masse du neutron κ_u est toujours différente de celle du méson κ_φ) sont toujours identiquement nulles. N'entrent donc en considération que les intégrales doubles des deux types:

$$\int (dx)^4 \int (dx)^4 \mathbf{M}(x, \partial) D_u^s(x'/x) D_\varphi^1(x'/x)$$

et:

$$\int (dx)^4 \int (dx)^4 \mathbf{M}(x, \partial) \cdot D_u^1(x'/x) D_\varphi^s(x'/x). \quad (10.7)$$

Passons maintenant aux intégrales *triples*. La même décomposi-

tion des noyaux selon (10,3) montre qu'il faut considérer les 8 types d'intégrales avec noyaux :

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & D_u^s(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^s(x/x') \\ (2) \quad & \frac{i}{2} D_u^s(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^1(x/x') \\ (3) \quad & \frac{i}{2} D_u^s(x''/x') D_\varphi^1(x''/x) D_\varphi^s(x/x') \\ (4) \quad & \frac{i}{2} D_u^1(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^s(x/x') \\ (5) \quad & -\frac{1}{4} D_u^s(x''/x') D_\varphi^1(x''/x) D_\varphi^1(x/x') \\ (6) \quad & -\frac{1}{4} D_u^1(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^1(x/x') \\ (7) \quad & -\frac{1}{4} D_u^1(x''/x') D_\varphi^1(x''/x) D_\varphi^s(x/x') \\ (8) \quad & -\frac{i}{8} D_u^1(x''/x') D_\varphi^1(x''/x) D_\varphi^1(x/x') \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

et ceux que l'on obtient par échange de u et φ .

En vertu des relations (10.5), les trois derniers noyaux (6), (7) et (8) appartiennent à des intégrales qui s'évanouissent identiquement.

Nous allons montrer maintenant que la somme des intégrales :

$$L = \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \int (dx')^4 \mathbf{W}(x, \partial)$$

$$\cdot \left[D_u^s(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^s(x/x') - \frac{1}{4} D_u^s(x''/x') D_\varphi^1(x''/x) D_\varphi^1(x/x') \right] \quad (10.9)$$

s'évanouit aussi identiquement.

Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned} D_u^s(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^s(x/x') &= \frac{1}{8} \varepsilon(x''/x') \varepsilon(x''/x) \varepsilon(x/x') \\ &\cdot D_u^0(x''/x') D_\varphi^0(x''/x) D_\varphi^0(x/x') \end{aligned} \quad (10.10)$$

Mais l'identité :

$$\varepsilon(x''/x') \varepsilon(x''/x) \varepsilon(x/x') = -\varepsilon(x''/x') + \varepsilon(x''/x) + \varepsilon(x/x') \quad (10.11)$$

nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} D_u^s(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^s(x/x') &= \frac{1}{4} \left[-D_u^s(x''/x') D_\varphi^0(x''/x) D_\varphi^0(x/x') \right. \\ &\quad \left. + D_u^0(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^0(x/x') \right. \\ &\quad \left. + D_u^0(x''/x') D_\varphi^0(x''/x) D_\varphi^s(x/x') \right] \end{aligned} \quad (10.12)$$

et pour le noyau de l'intégrale L (10.9):

$$[] = -\frac{1}{8} \{ D_u^s(x''/x') [D_\varphi^+(x''/x) D_\varphi^-(x/x') + D_\varphi^-(x''/x) D_\varphi^+(x/x')] \\ + D_\varphi^s(x''/x) D_u^0(x''/x') D_\varphi^0(x/x') \\ + D_\varphi^s(x/x') D_u^0(x''/x') D_\varphi^0(x''/x) \} \quad (10.13)$$

Or, toutes les intégrales correspondant à ces noyaux s'annulent identiquement, en vertu de (10.5).

En résumé, nous avons à calculer les intégrales ayant pour noyaux les fonctions suivantes:

Intégrales doubles:

$$\frac{i}{2} D_u^s(x'/x) D_\varphi^1(x'/x); \quad \frac{i}{2} D_u^1(x'/x) D_\varphi^s(x'/x)$$

Intégrales triples:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{i}{2} D_u^s(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^1(x/x'); \frac{i}{2} D_\varphi^s(x''/x') D_u^s(x''/x) D_u^1(x/x') \\ & \frac{i}{2} D_u^s(x''/x') D_\varphi^1(x''/x) D_\varphi^s(x/x'); \frac{i}{2} D_\varphi^s(x''/x') D_u^1(x''/x) D_u^s(x/x') \\ & \frac{i}{2} D_u^1(x''/x') D_\varphi^s(x''/x) D_\varphi^s(x/x'); \frac{i}{2} D_\varphi^1(x''/x') D_u^s(x''/x) D_u^s(x/x') \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

11. La méthode pour éliminer la présence d'expressions divergentes.

Nous avons défini la fonction $D_\kappa^s(x)$ par:

$$D_\kappa^s(x) = \frac{1}{2} \varepsilon(x^4) D_\kappa^0(x) \quad (11.1)$$

elle s'écrit aussi:

$$D_\kappa^s(x) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta(T^2) - \frac{1}{2} \theta^+(T^2) \frac{\kappa}{T} J_1(\kappa T) \right] \quad (11.2)$$

Or, comme nous l'avons déjà remarqué, cette définition n'a vraiment de sens que sous le signe $\int (dx)^4$, cela du fait de la présence de la fonction de DIRAC $\delta(T^2)$ dans (11.2).

Cela dit, calculons, pour ε réel > 0 .

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot \int_{-\varepsilon^2}^{+\varepsilon^2} d(T^2) D_\kappa^s(T) &= \int_{-\varepsilon^2}^{+\varepsilon^2} d(T^2) \left[\delta(T^2) - \frac{1}{2} \theta^+(T^2) \frac{\kappa}{T} J_1(\kappa T) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^{+\varepsilon^2} d(T^2) \frac{\kappa}{T} J_1(\kappa T) = 1 - \int_0^{\kappa T = \kappa \varepsilon} d(\kappa T) / J_1(\kappa T) \end{aligned}$$

Nous obtenons, avec :

$$\int dz J_1(z) = -J_0(z)$$

$$4\pi \cdot \int_{\varepsilon^2-}^{+\varepsilon^2} d(T^2) D_{\kappa}^s(T) = 1 - \left(-J_0(\kappa\varepsilon) + J_0(0) \right) = J_0(\kappa\varepsilon) \quad (11.3)$$

Faisons tendre alors κ vers l'infini; on a, quel que soit $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon^2}^{+\varepsilon^2} d(T^2) D_{\kappa}^s(T) = 0;$$

comme $D_{\kappa}^s(T) = 0$ pour $T^2 < 0$, nous pouvons écrire :

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon^2} d(T^2) D_{\kappa}^s(T) = 0 \quad \text{quelque soit } \varepsilon > 0. \quad (11.4)$$

On en déduit alors :

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} D_{\kappa}^s(x) = 0 \quad \text{pour } T^2 = -R^2 \text{ fini.} \quad (11.5)$$

Cette propriété de la fonction $D_{\kappa}^s(x)$ nous permet d'écrire pour celle-ci :

$$\overline{D}_{\kappa}^s(x) = D_{\kappa}^s(x) + \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i D_{\kappa_i}^s(x) \quad (11.6)$$

puisque la partie ajoutée est nulle à la limite; ou aussi :

$$\overline{D}_{\kappa}^s(x) = \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(1 + \sum_1^N c_i \right) \delta(T^2) - \frac{\theta^+(T^2)}{2T} \left[\kappa J_1(\kappa T) + \sum_1^N c_i \kappa_i J_1(\kappa_i T) \right] \right\} \quad (11.7)$$

(le trait dans $\overline{D}_{\kappa}^s(x)$ est pour distinguer cette nouvelle définition) où les coefficients c_i sont des nombres scalaires invariants qui peuvent dépendre par exemple des scalaires invariants κ_i .

Aucune condition particulière n'a été imposée à ces coefficients c_i . L'idée de M. STUECKELBERG est d'utiliser l'indétermination de ces coefficients pour donner de la fonction $D_{\kappa}^s(x)$ une définition qui élimine les infinités de la théorie habituelle des champs, infinités provenant précisément de la fonction $D_{\kappa}^s(x)$ présente par l'intermédiaire des $D_{\kappa}^s(x)$ dans les coefficients $\mathbf{S}^{(n)}$.

Il est cependant des conditions que l'on doit imposer aux coefficients c_i avant toute considération de divergence. Ce sont celles entraînées par la condition pour $\overline{D}_{\kappa}^s(x)$ de satisfaire à l'équation

d'onde inhomogène, comme la fonction originale $D_{\kappa}^s(x)$. Cette condition s'écrit:

$$\begin{aligned} (\square - \kappa^2) \bar{D}_{\kappa}^s(x) + \delta(x) &= (\square - \kappa^2) D_{\kappa}^s(x) + \delta(x) \\ &+ \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i (\square - \kappa_i^2 + \kappa_i^2 - \kappa^2) D_{\kappa_i}^s(x) \\ &= -\delta(x) \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i + \frac{1}{4\pi} \delta(T^2) \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i (\kappa_i^2 - \kappa^2) \\ &- \frac{1}{8\pi} \frac{\theta^+(T^2)}{T} \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i (\kappa_i^2 - \kappa^2) \kappa_i J_1(\kappa T) = 0 \end{aligned}$$

Si l'on remarque que pour $\kappa_i \rightarrow \infty$, à une distance $T \gg \kappa_i^{-1}$:

$$J_1(\kappa_i T) \sim (\kappa_i T)^{-\frac{3}{2}} \cdot G(T) \quad G(T) \text{ borné,}$$

les c_i doivent satisfaire aux trois conditions:

$$\lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i = 0 \quad (11.8)$$

$$\lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i \kappa_i^2 = 0 \quad (11.9)$$

$$\lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i (\kappa_i^2 - \kappa^2) \kappa_i^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (11.10)$$

Cela dit, considérons le nouvel opérateur:

$$\mathbf{S} = \mathbf{1} + \sum_{l,K} \varepsilon^l g^K \bar{\mathbf{S}}^{(K+l)} \quad (11.11)$$

obtenu à partir de \mathbf{S} par la substitution de D^s par \bar{D}^s . Il est essentiel que $\bar{\mathbf{S}}$ conserve la propriété d'unitarité (cf. § 3). On doit donc avoir (le trait indique que la substitution a été opérée):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}^1 + \bar{\mathbf{S}}^{1+} &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{S}}^2 + \bar{\mathbf{S}}^{1+} \bar{\mathbf{S}}^1 + \bar{\mathbf{S}}^{2+} &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{S}}^n + \bar{\mathbf{S}}^{1+} \bar{\mathbf{S}}^{n-1+} + \dots + \bar{\mathbf{S}}^{n+} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

semblablement à (6.3). Il est clair que l'on a toujours les identités (nous renvoyons au § 6 pour les notations):

$$\begin{aligned} \bar{D}^c(1) \bar{D}^c(2) \dots \bar{D}^c(M) - 2 \bar{I}_M - \bar{D}^a(1) \bar{D}^a(2) \dots \bar{D}^a(M) &= 0 \quad M=1,2\dots \\ \bar{D}^c(1) \bar{D}^c(2) \dots \bar{D}^c(M) - 2 \bar{R}e_M + \bar{D}^a(1) \bar{D}^a(2) \dots \bar{D}^a(M) &= 0 \quad M=2,3\dots \end{aligned} \quad (11.13)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_M &= \sum' D^1 \bar{D}^s \bar{D}^s \bar{D}^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum' D^1 D^1 D^1 \bar{D}^s \dots \bar{D}^s + \dots \\ \bar{Re}_M &= \bar{D}^s \bar{D}^s \dots \bar{D}^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum' D^1 D^1 \bar{D}^s \dots \bar{D}^s + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

Mais il n'y a plus identité entre $-2 I_M$ ou $-2 Re_M$ d'une part et l'expression $[\Sigma D(1) \dots D(M)]$ figurant dans le noyau de l'intégrale :

$$\bar{S}^1 + \bar{S}^{n-1} + \dots + \bar{S}^{n-1} + \bar{S}^1 = \int^{(n)} \dots \int' \dots [\Sigma D(1) \dots D(M)] \quad (11.15)$$

(On se souvient que cette identité assurerait la validité des relations (11.12), partant l'unitarité de $\bar{\mathbf{S}}$.) Cela provient du fait que dans les contractions $\bar{\mathbf{S}}^i \bar{\mathbf{S}}^{n-i}$ apparaissent les fonctions D^+ et D^- qui ne peuvent se transformer qu'en des combinaisons de fonctions D^1 , D^s , et jamais \bar{D}^s .

Mais il est facile de voir que l'on a toujours :

$$\bar{S}^1 + \bar{S}^{n-1} + \dots + \bar{S}^{n-1} + \bar{S}^1 = \dots \int^{(n)} \dots \int' \dots [\bar{Re}_M] \text{ ou } \int^{(n)} \dots \int' \dots [\bar{I}_M] \quad (11.16)$$

pourvu que dans la substitution :

$$\bar{D}^s(K) = \bar{D}_\kappa^s(x) = D_\kappa^s(x) + \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i^K D_{\kappa_i K}^s(x) \quad (11.17)$$

on précise que $\kappa_i^K \neq \kappa_i^{K'}$; cela résulte immédiatement des relations du type (10.5) et (10.10). Naturellement, cela suppose que les limites d'intégration pour $t, t'' \dots$ sont $-T' = +T'' = \infty$. L'unitarité de l'opérateur $\bar{\mathbf{S}}$ est donc sauvegardée.

Remarque. La substitution générale (11.17) a le grand désavantage d'introduire dans l'expression des $\mathbf{S}^{(n)}$ des termes non linéaires en c_i^K dès que $M > 1$. Pour éviter ce qui par la suite complique les calculs, il est indiqué de poser maintenant :

$$c_i^K = 0 \text{ pour } K \neq 1 \quad (11.18)$$

ce qui revient à ne faire qu'une seule des substitutions $D^s \rightarrow \bar{D}^s$, dans notre cas pour $D_u^s(x''/x)$.

12. Le passage à l'espace de Fourier à quatre dimensions.

Pour pousser plus loin le calcul, nous passons maintenant à l'espace de FOURIER à quatre dimensions, ce qui revient physiquement à décomposer les paquets d'ondes généraux v'^A, \dots et φ'_-, \dots , corres-

pondant au neutron et aux mésons, dans les systèmes complets d'ondes planes :

$$\text{et } \left. \begin{aligned} v^{A'}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \pi_A(\tilde{k}'', n'') e^{i(k'', x)} = v^A(x/\tilde{k}'', n'') \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k', x)} = \varphi(x/\tilde{k}') \end{aligned} \right\} (12.1)$$

Il est clair que, pour les opérateurs $L^{\alpha\beta}$, comme pour les fonctions D , nous utilisons alors les représentations dans l'espace de FOURIER à 4 dimensions (cf. A. IIIc).

On obtient alors pour l'expression du moment magnétique dans la représentation en ondes planes :

$$\begin{aligned} 2 T \mu^{\alpha\beta}(\tilde{k}'', n''/\tilde{k}', n') &= \varepsilon g^2 \cdot 4 \cdot (2\pi)^3 \cdot \delta^{[\alpha}(k'' - k') \cdot \pi_A^+(\tilde{k}'', n'') \tau^\mu \\ &\cdot \int (dp)^4 \cdot \left\{ ((\gamma, p) + i\kappa) \tau^\nu \pi^A(\tilde{k}', n') \cdot (k' - p)^{\beta]} \cdot (k'' - p)_\mu (k' - p)_\nu \right. \\ &\cdot \bar{\Delta}_u^c(p) \cdot \Delta_\varphi^c(k'' - p) \Delta_\varphi^c(k' - p) - \frac{i}{4\kappa} \left[((\gamma, k'') - p + i\kappa) ((\gamma, k') - p + i\kappa) \right. \\ &\cdot \tau^\nu \pi^A(\tilde{k}', n') (k' - p)^{\beta]} \cdot p_\mu p_\nu \bar{\Delta}_u^c(k'' - p) \cdot \Delta_u^c(k' - p) \cdot \Delta_\varphi^c(p) \left. \right] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{2} \left[((\gamma, p) + i\kappa) \tau^\nu \pi^A(\tilde{k}', n') \cdot \delta_v^{\beta]} \cdot (k'' - p)_\mu \Delta_u^c(p) \Delta_\varphi^c(k'' - p) \right] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{2} \left[((\gamma, p) + i\kappa) \tau^\nu \pi^A(\tilde{k}', n') \cdot \delta_\mu^{\beta]} \cdot (k' - p)_\nu \bar{\Delta}_u^c(p) \cdot \Delta_\varphi^c(k' - p) \right] \\ &- \varepsilon g^2 \cdot (2\pi)^3 \cdot \frac{i}{\kappa} \delta(k'' - k') \cdot \pi_A^+(\tilde{k}'', n'') \tau^\mu \int (dp)^4 \cdot ((\gamma, k'') - p) \\ &+ i\kappa \gamma^\beta \gamma^\alpha ((\gamma, k' - p) + i\kappa) \cdot \tau^\nu \pi^A(\tilde{k}', n') p_\mu p_\nu \cdot \bar{\Delta}_u^c(k'' - p) \\ &\Delta_u^c(k' - p) \Delta_\varphi^c(p) \end{aligned} \quad (12.2)$$

avec :

$$\delta^\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \delta(p).$$

Nous avons introduit les notations commodes :

$$\dots \mu^{[\alpha} \dots \nu^{\beta]} \dots = \dots \mu^\alpha \dots \nu^\beta \dots - \dots \mu^\beta \dots \nu^\alpha \dots \quad (12.3)$$

et séparé le dernier terme, purement diagonal en \tilde{k}'', \tilde{k}' . Les autres termes contiennent à côté d'une contribution diagonale que nous allons déterminer une partie non diagonale en \tilde{k}'', \tilde{k}' . Pratiquer cette séparation est le prochain pas du calcul.

Pour cela, nous remarquons d'abord que l'élément de matrice

$$\mu^{\alpha\beta}(\tilde{k}'', n''/\tilde{k}', n')$$

n'intervient dans le calcul d'observables physiques que sous le signe d'intégration $\int dV_k, \dots$, c'est-à-dire dans des intégrales du type :

$$\int (dk'')^3 g(\tilde{k}'') \mu^{\alpha\beta}(\tilde{k}'', n''/\tilde{k}', n') \quad (12.4)$$

Or, nous avons:

$$\begin{aligned} & \int (dz)^3 g(\vec{k}' + \vec{z}; \vec{k}') [f(\vec{k}' + \vec{z}; \vec{k}') \delta_i(\vec{z}) \\ & - \int (dz)^3 g(\vec{k}' + \vec{z}; \vec{k}') \left[f(\vec{k}'; \vec{k}') \delta_i(z) - \frac{\partial f(\vec{k}' + \vec{z}; \vec{k}')}{\partial z_i} \Big|_{\vec{z}=0} \right] \delta(z) \end{aligned} \quad (12.5)$$

avec:

$$z_i = k''_i - k'_i$$

qui nous permet de séparer les parties diagonale et non-diagonale en (\vec{k}'/\vec{k}'') , d'expressions contenant les dérivées partielles de la fonction $\delta(z)$.

En remplaçant dans (12.2) les dérivées partielles de la fonction $\delta(k'' - k')$ par les expressions:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i(k'' - k') &= \frac{2T}{2\pi} \delta_i(\vec{k}'' - \vec{k}') \\ \delta_4(k'' - k') &= \frac{2T}{2\pi} \cdot \frac{k'^4}{|\vec{k}'|^2} \cdot \sum_1^3 k'^i \delta_i(\vec{k}'' - \vec{k}') \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

ce qui conduit naturellement à séparer dès maintenant les composantes du moment magnétique proprement dit:

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') \quad i, k = 1, 2, 3$$

et celles du moment électrique:

$$\mu^{i4}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n')$$

Nous obtenons pour la première de ces grandeurs, dont seule nous nous occupons:

$$\begin{aligned} \mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') &= + \varepsilon g^2 (4\pi)^2 \left\{ \delta(\vec{k}'' - \vec{k}') \left[\frac{\partial}{\partial z[i} \dots k] \right]_{\vec{z}=0} \right. \\ &\quad \left. - \delta'(\vec{k}'' - \vec{k}') [\dots k] \dots] \right\} \end{aligned} \quad (12.7)$$

13. L'interprétation des contributions diagonale et non diagonale.

Considérons maintenant l'expression du moment magnétique $\mu^{\alpha\beta}$ du neutron telle que nous l'avons obtenue en (6.15), pour la comparer à la valeur de la même grandeur pour une particule de M. DIRAC de charge ε et de moment magnétique interne λ :

$$\mu^{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \mathbf{L}^{\alpha\beta} + 2 \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} + \lambda \right) \mathbf{S}^{\alpha\beta} \quad (13.1)$$

telle que nous l'avons obtenue en (8.21).

Afin de pouvoir comparer les résultats, faisons apparaître dans (12.7) les opérateurs $\mathbf{L}^{\alpha\beta}$ et $\mathbf{S}^{\alpha\beta}$ qui sont en (13.1) et cela sans nous préoccuper des coefficients figurant devant ces opérateurs (ce sera notre tâche tout à l'heure).

Dans la partie diagonale (terme en $\delta(\vec{k}'' - \vec{k}')$) ne peuvent figurer que les opérateurs antisymétriques tensoriels du 2e ordre :

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = 4i \mathbf{S}^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad [\gamma^\alpha, \mathbf{k}'^\beta]; \quad (13.2)$$

en effet, l'opérateur \mathbf{x}^α ne peut s'y trouver, caractéristique qu'il est de la contribution non diagonale en \vec{k} .

Dans la partie non diagonale, par contre, nous avons les opérateurs possibles :

$$[\mathbf{x}^\alpha, \gamma^\beta] \quad \text{et} \quad [\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{k}'^\beta] = \mathbf{L}^{\alpha\beta} \quad (13.3)$$

Or, nous avons déjà utilisé l'identité, pour les espérances mathématiques :

$$[\mathbf{x}^\alpha, \gamma^\beta] = \frac{1}{i\kappa} (\mathbf{L}^{\alpha\beta} + 2 \mathbf{S}^{\alpha\beta}). \quad (13.4)$$

en outre, on a aussi (pour les espérances mathématiques) :

$$[\gamma^\alpha, \mathbf{k}'^\beta] = 0. \quad (13.5)$$

Nous pouvons donc écrire le résultat obtenu en (12.7) pour le moment magnétique du neutron sous la forme opératorielle

$$\begin{aligned} \mu^{\alpha\beta} = a_d \mathbf{S}^{\alpha\beta} + b_d \cdot \mathbf{0} + c_a (\mathbf{L}^{\alpha\beta} + 2 \mathbf{S}^{\alpha\beta}) + d_a \mathbf{L}^{\alpha\beta} = (c_a + d_a) \mathbf{L}^{\alpha\beta} \\ + (a_d + 2 c_a) \mathbf{S}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (13.6)$$

$a_d, b_d; c_a, d_a$ désignant les coefficients numériques multipliant les opérateurs dans (12.7).

La comparaison avec (13.1) est maintenant facile; elle nous montre que le neutron se comporte vis-à-vis d'un champ électromagnétique uniforme de la même manière qu'une particule de M. DIRAC (c'est-à-dire une particule qui est décrite par l'équation de M. DIRAC) possédant une charge :

$$\varepsilon = 2 \kappa_n (c_a + d_a) \quad (13.8)$$

et un «moment magnétique intrinsèque» :

$$\lambda = \frac{a_d - 2 d_a}{2} \quad (13.9)$$

Or, par définition le neutron n'a pas de charge. Nous devons donc avoir :

$$c_a + d_a = 0 \quad (13.10)$$

ce qui revient à dire que la somme des coefficients de $[\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{y}^\beta]$ et de $\mathbf{L}^{\alpha\beta}$, partie non diagonale dans l'expression du moment magnétique, doit s'annuler.

Laissant pour l'instant cette question, sur laquelle nous reviendrons dans notre conclusion, poursuivons l'évaluation de la seule partie diagonale du moment magnétique.

14. La valeur du moment magnétique mise sous la forme d'une somme d'intégrales simples avec coefficients indéterminés.

Considérons maintenant la partie diagonale du moment magnétique $\mu^{ik}(\vec{k}''n''/\vec{k}'n')$, que nous écrivons, d'après (12.2 et 7) :

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}'n') = \varepsilon g^2 (4\pi)^2 \delta \cdot (\vec{k}''/\vec{k}') \cdot \mathbf{M}^{ik}(n''/n') \quad (14.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{ik}(n''/n') &= \frac{1}{k'^4} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^i} \pi_A^+ (\vec{k}' + \vec{z}, n'') \tau^\mu \int (dp)^4 \cdot \right. \\ &\quad \left(((\gamma, p) + i\kappa_u) \tau^\nu \pi^A (\vec{k}', n') \cdot (k' - p)^{k1} \cdot (k' + z - p)_\mu \cdot (k' - p)_\nu \right. \\ &\quad \cdot \bar{\Delta}_u^c(p) \Delta_\varphi^c(k' + z - p) \cdot \Delta_\varphi^c(k' - p) - \frac{i}{4\kappa} \left[((\gamma, k' + z - p) + i\kappa) \right. \\ &\quad \left. ((\gamma, k' - p) + i\kappa) \tau^\nu \pi^A (k' - p)^{k1} \cdot p_\mu p_\nu \cdot \bar{\Delta}_u^c(k' + z - p) \cdot \Delta_u^c(k' - p) \right. \\ &\quad \cdot \Delta_\varphi^c(p) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} \left[((\gamma, p) + i\kappa) \tau^\nu \pi^A \left(\delta_\nu^{k1} \cdot (k' + z - p)_\mu \right. \right. \\ &\quad \cdot \Delta_\varphi^c(k' + z - p) + \delta_\mu^{k1} \cdot (k' - p)_\nu \Delta_\varphi^c(k' - p) \left. \right) \bar{\Delta}_u^c(p) \left. \right] \\ &\quad \left. - \frac{i}{4\kappa} \pi_A^+ (\vec{k}', n'') \tau^\mu \int (dp)^4 ((\gamma, k' - p) + i\kappa) \gamma^i \gamma^k ((\gamma, k' - p) \right. \\ &\quad \left. + i\kappa) \tau^\nu \pi^A (\vec{k}', n') p_\mu p_\nu \bar{\Delta}_u^c(k' - p) \Delta_u^c(k' - p) \cdot \Delta_\varphi^c(p) \right\} \Big|_{\vec{z}=0} \quad (14.2) \end{aligned}$$

Nous effectuons les dérivations par rapport à z^i , en tenant compte des identités du type :

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \pi_A^+ (k' + z, n'') \Big|_{\vec{z}=0} = b^+ (\gamma^i + \frac{k'^i}{k'^4} \gamma^4) n''_A \quad (14.3)$$

Nous faisons ensuite $\vec{z} \rightarrow 0$, conformément à (12.7), puis afin de simplifier nous passons au système de repos du neutron, défini par

$$\vec{k}' = 0. \quad k'^4 = \kappa_u \quad (14.4)$$

Nous introduisons le quadrivecteur p' par :

$$p' = (k' - p) = (-\vec{p}, \kappa_u - p^4) \quad (14.5)$$

Nous sortons alors de dessous le signe d'intégration les facteurs constants, en particulier les matrices du quatrième ordre γ , τ , etc., de manière à donner aux intégrales la forme la plus simple possible. Pour obtenir ce résultat, il faut naturellement effectuer les multiplications, ce qui multiplie aussi le nombre des termes.

Enfin, dans chaque intégrale triple, nous remplaçons les seuls produits :

$$\bar{\Delta}_u^c(p) (\Delta_\varphi^c(p'))^2 \quad \text{ou} \quad \bar{\Delta}_u^c(p') \cdot \Delta_u^c(p') \cdot \Delta_\varphi^c(p)$$

par les sommes des termes :

$$[\Delta_u^1(p) (\Delta_\varphi^s(p'))^2 + 2\bar{\Delta}_u^s(p) \Delta_\varphi^s(p') \Delta_\varphi^1(p')] \quad \text{ou} \quad [\Delta_u^1(p') \Delta_u^s(p') \Delta_\varphi^s(p) + \bar{\Delta}_u^s(p') \Delta_u^s(p') \Delta_\varphi^1(p) + \bar{\Delta}_u^s(p') \Delta_u^1(p') \Delta_\varphi^s(p)] ; \quad (14.6)$$

dans les intégrales simples, nous substituons de même la somme des deux termes :

$$\bar{\Delta}_u^s(p) \Delta_\varphi^1(p') + \Delta_u^1(p) \Delta_\varphi^s(p') \quad (14.7)$$

au produit des deux fonctions causales :

$$\Delta_u^c(p) \Delta_\varphi^c(p')$$

Cela en accord avec nos conclusions du § 11.

Nous obtenons alors pour M^{ik} une expression de la forme (nous ne donnons que les 4 types de noyaux) :

$$\begin{aligned} M^{ik}(n''/n') = & \frac{1}{\kappa_u} \left\{ -i\gamma^{[i} \tau^\mu \gamma^{\lambda} \tau^v \int (dp)^4 \cdot p^{k]} \cdot p_\lambda p'_\mu p'_\nu [\Delta_u^1(p) \Delta_\varphi^s(p') \Delta_\varphi^s(p') \right. \\ & + 2\bar{\Delta}_u^s(p) \Delta_\varphi^s(p') \Delta_\varphi^1(p')] \\ & + \frac{1}{2} \tau^\mu \gamma^\lambda \sigma^{ik} \tau^v \int (dp)^4 p'_\lambda p'_\nu p_\mu p_\nu [\Delta_u^1(p') \Delta_u^s(p') \Delta_\varphi^s(p) \\ & + \bar{\Delta}_u^s(p') \Delta_u^s(p') \Delta_\varphi^1(p) + \bar{\Delta}_u^s(p') \Delta_u^1(p') \Delta_\varphi^s(p)] \\ & + \dots \\ & + \frac{\kappa_u}{4\pi^2} \tau^{[i} \gamma^\lambda \tau^{k]} \cdot \int (dp)^4 \cdot p_\lambda [\Delta_u^1(p) \Delta_\varphi^s(p') + \bar{\Delta}_u^s(p) \Delta_\varphi^1(p')] \\ & + \dots \\ & - \frac{i\kappa_u}{2\pi^2} \tau^\mu \tau^{[i} \int (dp)^4 \cdot p'_\mu \cdot \frac{p^{k]}}{\kappa_u - p^4} [\Delta_u^1(p) \Delta_\varphi^s(p') + \bar{\Delta}_u^s(p) \Delta_\varphi^1(p')] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{il y a en tout 18 termes}). \quad (14.8)$$

Le calcul se poursuit de la manière suivante :

1. On substitue à $\bar{\Delta}^s$ la série qui la définit : à chaque terme contenant Δ^s correspond alors une série contenant $N + 1$ termes : N termes de structure identique, différant par un coefficient c_i et par un paramètre κ_i , et un terme, celui donné par Δ^s .

2. Grâce à la présence sous le signe $\int (dp)^4$ de la fonction

$$\delta(\kappa^2 + (pp)) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa^2 + p^2}} [\delta(p^4 - \sqrt{\kappa^2 + p^2} + p^2 + \delta(p^4 + \sqrt{\kappa^2 + p^2})] \quad (14.9)$$

on ramène les intégrales à une extension tridimensionnelle $\int (dp)^3$.*)

3. On effectue ensuite l'intégration sur les variables angulaires de l'espace p ; tenant alors compte des relations du type :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (dp)^3 g(p) - 4\pi \int_0^{\infty} dp \cdot p^2 \cdot g(p); \int_{-\infty}^{\infty} (dp)^3 p \cdot g(p) = 0$$

$$p = |\vec{p}| / \vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$$

qui annulent une grande partie des composantes des tenseurs engendrés par les termes de (14.8), on est ramené au type général d'intégrale simple :

$$J = a(\kappa_u, \kappa_\varphi) \int_0^P \frac{dp}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}} f(p^2) \quad (14.10)$$

où $\kappa = \kappa_u, \kappa_\varphi$ et $P \rightarrow \infty$, avec :

$$f(p^2) = \frac{\sum_0^\delta f_m(\kappa_u^2, \kappa_\varphi^2, \kappa_i^2) p^{2m}}{(p^2 + \kappa_u^2)^\alpha (p^2 - b(\kappa_u^2, \kappa_\varphi^2))^\beta (p^2 - d(\kappa_u^2, \kappa_\varphi^2, \kappa_i^2))^\gamma}$$

compte tenu des remarques suivantes :

$$a, \beta, \gamma = 0, 1 \quad 0 < \delta < 4;$$

le degré de $f(p^2)$ en p est inférieur ou égal à 4.

*) Dans le second groupe de termes de (14.8), apparaît l'expression $\frac{\delta(p')}{p'}$ que nous remplaçons par $-\delta'(p)$, annulant sans autre la constante arbitraire A dans la relation (A. II. 10) appliquée ici. On pourrait utiliser cette constante pour éliminer certaines divergences.

4. On effectue enfin les sommes sur les indices muets, on met en évidence les combinaisons tensorielles antisymétriques $\gamma^{[i} \dots \gamma^{k]} \dots$ qui se réduisent finalement au tenseur: "

$$\sigma^{ik} (n''/n') = 2 S^{ik} (n''/n')$$

Il vient alors:

$$M^{ik} (n''/n') = \sigma^{ik} (n''/n') \lim_{P \rightarrow \infty} \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_{(\alpha)} [I^{(\alpha)} (\kappa_u, \kappa_\varphi, P) + \sum_1^N c_i J^{(\alpha)} (\kappa_u, \kappa_\varphi, \kappa_i^2, P)] = \sigma^{ik} (n''/n') \cdot A (\kappa_u, \kappa_\varphi). \quad (14.11)$$

où (α) dénombre le nombre des intégrales provenant des termes de (14.8), dont $I^{(\alpha)}$ et $J^{(\alpha)}$ représentent les $N+1$ sous-termes engendrés par Δ_u^s .

C'est-à-dire pour le moment magnétique:

$$\mu^{ik} (\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') = (4\pi)^2 \cdot \varepsilon g^2 \cdot \delta (\vec{k}''/\vec{k}') \cdot \sigma^{ik} (n''/n') \cdot A (\kappa_u, \kappa_\varphi) \quad (14.12)$$

En introduisant le facteur G par l'égalité:

$$\mu^{ik} (\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') = G (\kappa_u, \kappa_\varphi) \cdot \frac{\varepsilon}{2\kappa_u} S^{ik} (\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') \quad (14.13)$$

nous avons pour son expression:

$$G (\kappa_u, \kappa_\varphi) = 32 \cdot \pi^2 \cdot \kappa_u g^2 \cdot A (\kappa_u, \kappa_\varphi). \quad (14.14)$$

avec, comme il se doit $[G] = [1]$, car, comme le montrent (14.1 et 11), $[A] = [l]^{-1}$.

15. Intégration et détermination des coefficients. La valeur du moment magnétique.

Le but de ce paragraphe est de montrer la possibilité du choix des coefficients c_1, \dots, c_N définissant la fonction $D_u^s(x)$ de manière que le nombre:

$$A (\kappa_u, \kappa_\varphi) = \lim_{P \rightarrow \infty} \lim_{\kappa_i \rightarrow \infty} \sum_{(\alpha)} [I^{(\alpha)} (\kappa_u \cdot \kappa_\varphi, P) + \sum_1^N c_i J^{(\alpha)} (\kappa_u, \kappa_\varphi, \kappa_i^2, P)]$$

soit fini, c'est-à-dire de manière que le moment magnétique du neutron soit fini. Pour y parvenir, nous allons d'abord calculer les intégrales $I^{(\alpha)}$ et $J^{(\alpha)}$ ($\dots \kappa_i^2$) en fonction de la limite supérieure P . Puis nous ordonnons le résultat ainsi obtenu pour $A (\kappa_u, \kappa_\varphi)$ par rapport aux puissances de:

$$\xi = \left(\frac{P}{\kappa_u} \right)^2 \quad (15.1)$$

en introduisant simultanément les nouvelles variables :

$$\eta_i = \left(\frac{\kappa_i}{\kappa_u} \right)^2 \quad (15.2)$$

Alors seulement, nous montrons qu'il est possible de choisir les coefficients c_1, \dots, c_N comme *fonctions* des paramètres $\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i$ de sorte que :

$$A(\kappa_u, \kappa_\varphi) = A_0(\kappa_u, \kappa_\varphi)$$

ou $A_0(\kappa_u, \kappa_\varphi)$ est un nombre fini mais arbitraire.

Le calcul de $I^{(\alpha)}(\kappa_u, \kappa_\varphi, P)$ et de $J^{(\alpha)}(\kappa_u, \kappa_\varphi, \kappa_i^2, P)$ se fait sans difficultés en prenant pour variable d'intégration $u = \frac{p}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}}$ (voyez (14.10)). On obtient alors en sommant sur (α) et en ordonnant par rapport à P :

$$\begin{aligned} A(\kappa_u, \kappa_\varphi) = & \lim_{\xi \rightarrow \infty} \lim_{\eta_i \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=0}^2 [\alpha_n(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_n(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)] \xi^n \right. \\ & + [\alpha_L(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_L(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)] \text{Log } \xi \\ & \left. + \sum_1^\infty [\alpha_n(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_{-n}(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)] \xi^{-n} \right\} \quad (15.3) \end{aligned}$$

où les coefficients $\beta_n(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_n(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) = & \sum_{-\infty}^{a(n)} \beta_{nK}(\kappa_u, \kappa_\varphi)(\eta_i)^K \quad n = 2, 1, L, -1, -2, \dots \\ \beta_0(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) = & \sum_{-\infty}^{a(0)} (\beta_{0K}(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \beta'_{0K}(\kappa_u, \kappa_\varphi) \text{Log } \eta_i)(\eta_i)^K \quad (15.4) \end{aligned}$$

avec

$$1 \leq a(n) \leq a \quad (a = a_{\max} = 5)$$

On vérifie bien que si l'on pose tous les c_i identiquement nuls, le nombre A est infini.

Pour rendre fini $A(\kappa_u, \kappa_\varphi)$ nous choisissons alors les coefficients c_i comme des fonctions :

$$c_i = c_i(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) \quad (15.5)$$

satisfaisant *identiquement*, avant le passage à la limite $\eta_i \rightarrow \infty$.

1) à la condition :

$$\begin{aligned} \sum_1^N c_i \eta_i = & \alpha_5(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_5(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) = 0 \\ \alpha_5(\kappa_u, \kappa_\varphi) = & 0; \quad \beta_5(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) \equiv \eta_i. \quad (15.6a) \end{aligned}$$

l'une des trois conditions nécessaires pour que $\overline{D}_u^s(x)$ soit solution de l'équation d'onde inhomogène définissant $D_x^s(x)$ (voyez (§ 11)). Nous verrons plus tard que les deux autres conditions se trouveront vérifiées automatiquement après passage à la limite.

2) Aux 4 conditions:

$$\begin{aligned} \alpha_n(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_n(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) &= 0 \quad n = L, 1, 2 \\ \alpha_0(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_0(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) &= A_0(\kappa_u, \kappa_\varphi) \end{aligned} \quad (15.6b)$$

soit en tout 5 équations linéaires dans les c_i . On peut donc faire $N = 5$, et déterminer les 5 coefficients:

$$c_i = - \frac{\sum_1^4 \alpha'_K(\kappa_u, \kappa_\varphi) \cdot \text{Min}_i^K}{\Delta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta = \|\beta_K(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)\| \\ \text{Min}_i^K = \text{Min pr. rap. à } \beta_K(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i). \end{cases} \quad (15.7)$$

en substituant les indices 3 à L et 4 à 0, avec $\alpha'_K - \alpha_K \quad K = 1, 2, 3$ et $\alpha'_4 = \alpha_0 - A_0$; $\alpha'_5 \equiv 0$.

Il est clair que la liberté dont nous disposons pour les paramètres η_i permet toujours de rendre le déterminant caractéristique différent de zéro.

Cela fait, définissons le passage à la limite $\eta_i \rightarrow \infty$, en posant:

$$\eta_i = \eta_i^0 z$$

avec:

$$\eta_i^0 \text{ fini} \quad z \rightarrow \infty \quad (15.8)$$

Compte tenu de (15.4), on voit que le déterminant et les différents mineurs tendent vers l'infini avec z de la manière suivante:

$$\Delta \rightarrow z^\delta \text{ Log } z; \quad \text{Min}_i^K \rightarrow z^{\delta - a(K)} \cdot \text{Log } z, \quad K = 1, 2, 3.$$

$$\text{Min}_i^4 \rightarrow z^{\delta - a(4)} \quad \text{avec} \quad \delta = 1 + \sum_{l=1}^4 a(l) \quad (15.9)$$

Ce qui montre que les c_i , pour $z \rightarrow \infty$, tendent vers zéro selon:

$$c_i \rightarrow z^{-\nu} \quad a \geq \nu \geq 1 \quad (15.10)$$

Cela nous assure premièrement que les relations:

$$\lim_{\eta_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i = 0$$

et

$$\lim_{\eta_i \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i (\eta_i^{+3/4} - \eta_i^{-1/4}) = 0 \quad (15.11)$$

(qui permettent à \bar{D}_u^s de vérifier l'équation d'onde) sont vérifiées. Secondement, cela nous montre que :

$$A(\kappa_u, \kappa_\varphi) = A_0(\kappa_u, \kappa_\varphi) \quad (15.12)$$

pourvu que l'on définisse le passage à la limite $\xi \rightarrow \infty$ par (cf. 15.4) :

$$\xi = \xi_0 z^a \quad \text{où} \quad \xi_0 \text{ fini.} \quad (15.13)$$

Alors en effet, on a, quel que soit $n > 1$:

$$[\alpha_{-n}(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_{-n}(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)] \xi^{-n} \rightarrow z^{a(n) - v - na} \rightarrow 0$$

et (15.3) se réduit bien à (15.12). Notons que les passages à la limite $\xi \rightarrow \infty$ et $\eta_i \rightarrow \infty$ définis par (15.8 et 13) satisfont à la condition :

$$\frac{\xi}{\eta_i} \rightarrow z^{a-v} \rightarrow \infty \quad (15.14)$$

nécessaire pour que l'espace d'intégration en (14.2) soit infini même pour les particules de masses infinie κ_i intervenant dans la définition de \bar{D}_u^s .

Remarquons qu'il est possible de supprimer une part d'arbitraire du moment magnétique en posant à la place de la relation :

$$\alpha_0(\kappa_u, \kappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_0(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) = A_0(\kappa_u, \kappa_\varphi) \quad (15.6)$$

plus simplement :

$$\sum_1^N c_i \beta_0(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i) = 0 \quad (15.16)$$

Cela a l'avantage de ne pas introduire la fonction arbitraire $A_0(\kappa_u, \kappa_\varphi)$ dans l'expression des c_i , et de donner au moment magnétique la valeur :

$$\mu^{ik}(\vec{k}'' n'' / \vec{k}' n') = (32 \pi^2 \kappa_n \cdot g^2 \alpha_0(\kappa_n, \kappa_\varphi)) \frac{\varepsilon}{2 x_u} S^{ik}(\vec{k}'' n'' / \vec{k}' n') \quad (15.15)$$

qui est parfaitement définie avant la substitution de $D_u^s(x)$ par $\bar{D}_u^s(x)$: c'est simplement le terme indépendant de P (ou ξ) dans le développement de μ^{ik} analogue à (15.3). Les c_i sont encore donnés par (15.7), mais avec $\alpha_4'(\kappa_n, \kappa_\varphi) = 0$.

16. *Remarques et conclusion.*

La première observation que nous voulons faire a pour objet l'invariance du procédé d'évaluation des coefficients $c_i(\eta_K)$, invariance par rapport à la méthode de calcul employée. Précisons: aux paragraphes 12 et 13, nous avons montré que le moment magnétique du neutron peut s'écrire:

$$\mu^{ik}(\vec{k}''n''/\vec{k}'n') = m \cdot S^{ik}(\vec{k}''n''/\vec{k}'n'). \quad (16.1)$$

$$m = G(\kappa_n, \kappa_\varphi) \frac{\varepsilon}{2 \kappa_u}$$

Dans cette expression, le facteur m est scalaire invariant par rapport au groupe de LORENTZ. C'est ce facteur scalaire m qui s'écrit sous la forme d'une somme d'intégrales quadridimensionnelles:

$$m = \sum_{(\alpha)} G^{(\alpha)}; \quad G^{(\alpha)} = \lim_{\eta_i \rightarrow \infty} \int_{\infty}^{\infty} (dp)^4 \cdot g^{(\alpha)}(\kappa_u, \kappa_\varphi, c_i, \eta_i) \quad (16.2)$$

fonctions linéaires des coefficients c_i , eux-mêmes constants par rapport à l'intégration.

Pour calculer ces intégrales, nous avons écrit:

$$\int_{\infty}^{\infty} (dp)^4 \dots = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^4 \cdot \int_0^{2\varphi} d\varphi_p \cdot \int_{-1}^{+1} d\xi \int_0^P dP \cdot P^2 \dots$$

$$\text{avec } P = |\vec{p}| \cdot \vec{p} = (p^1, p^2, p^3) \cdot \varphi_p = \text{arctg} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \xi_p = \frac{p^3}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \quad (16.3)$$

puis choisi les $c_i(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)$ de manière que l'expression reste finie, en précisant les passages à la limite $P \rightarrow \infty$ et $\eta_i \rightarrow \infty$ par (15.8) et (15.13).

Ce sont ces dernières conditions qui assurent l'indépendance (vis-à-vis du choix des variables (16.3) pour calculer les intégrales) du résultat trouvé pour les $c_i(\kappa_u, \kappa_\varphi, \eta_i)$, puisque le facteur m s'exprime alors comme le résultat d'un passage à la limite unique:

$$m = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^{f(z)} dp F(p, z) \quad f(z) = \xi_0 z^a$$

expression dont les coefficients du développement dans les puissances de z s'annulent pour les puissances positives de z , et $\text{Log } z$.*)

Revenons maintenant à la question soulevée au § 13 par l'existence d'une contribution non diagonale dans l'expression du moment magnétique. Nous avons vu que pour conserver au neutron

*) Mais il est clair que le résultat dépend des relations (15.8) et (15.13).

sa propriété d'être dépourvu de charge électrique, il fallait satisfaire à la condition :

$$c_a + d_a = 0 \quad (13.9)$$

c_a et d_a étant les coefficients numériques des opérateurs $\mathbf{L}^{\alpha\beta} + 2\mathbf{S}^{\alpha\beta}$ et $\mathbf{L}^{\alpha\beta}$ intervenant dans le terme non diagonal.

Si l'on calcule ces coefficients par la même méthode que nous avons utilisée pour la partie diagonale, on voit qu'il faut, pour satisfaire à (13.9) imposer de nouvelles conditions pour les coefficients $c_1 \dots c_N$, analogues à celles que nous avons en (15.4).

La condition d'annulation de la charge du neutron peut donc toujours être remplie pour autant que les nouvelles conditions pour les coefficients $c_1 \dots c_N$ sont compatibles avec les anciennes.

Mais cela doit être le cas. Au lieu de résoudre le système (15.6), pour trouver les fonctions $c_i = c_i(\kappa_u, \kappa_\varphi \dots \kappa_i^2 \dots)$ nous résolvons maintenant le système formé du système initial (15.6) auquel on joint les conditions nouvelles entraînant (13.9). La compatibilité de toutes les équations (linéaires dans les $c_1 \dots c_N$) que l'on obtient ainsi est assurée d'une part par le nombre N arbitrairement grand (mais fini) des coefficients $c_1 \dots c_N$ et d'autre part par la liberté relative dans le choix des constantes η_i .

Voici maintenant une remarque sur le procédé d'élimination des divergences. Pour respecter la causalité avant le passage à la limite $y_t \rightarrow \infty$, il est clair qu'il faut poser :

$$D_\times^c(x) = D^c(x) + \lim_{y_t \rightarrow \infty} \sum_1^N c_i D_{y_i}^c(x)$$

au lieu de (11.6). Mais alors nous modifierions non seulement la fonction $D_\times^c(x)$, mais encore la fonction homogène $D_\times^1(x)$ et par elle toutes les autres, en particulier $D_\times^+(x)$. Autrement dit, nous porterions atteinte à la relation de saturation des paquets d'ondes (1.18), ce qui est très discutable. En effet cela pourrait s'interpréter de deux manières : ou bien on modifie les lois de commutation (ce que l'expérience ne justifie pas), ou bien on introduit des champs auxiliaires à masse infinie κ_i avec des coefficients de couplage $\sqrt{c_i} g$, ce qui n'a de sens physique que si l'on peut montrer que ces coefficients peuvent être choisis positifs ; or cela ne paraît pas possible. C'est d'ailleurs cette dernière raison qui exclut la possibilité de rendre finies les grandeurs divergentes en introduisant des champs auxiliaires de masses finies : ceux-ci ne sont plus causals si les coefficients c_i sont négatifs, car il devrait, pour les masses κ_i correspondantes, exister des états d'énergie négative.

Il est d'ailleurs intéressant de noter l'analogie existant à ce point de vue entre nos résultats et ceux obtenus par M. STUECKELBERG²⁾ en théorie classique, et aussi avec ceux de M. PAYS⁸⁾ acquis par l'introduction d'un champ f'' .

En guise de conclusion, relative en particulier à l'indétermination à laquelle nous aboutissons pour les grandeurs caractérisant les particules élémentaires (il est clair que la méthode est générale, et s'applique au calcul d'autres grandeurs) nous dirons:

La théorie des champs quantifiés constitue un cadre cohérent dans lequel vient se placer la description des phénomènes liés aux particules élémentaires. Mais ce cadre, essentiellement constitué par les principes de covariance relativiste et de causalité d'une part, et par le principe d'incertitude d'autre part, ce cadre semble trop vaste, ou plutôt incomplet. Que l'indétermination soit liée à la fonction inhomogène $D_{\times}^s(x)$, et non aux fonctions homogènes $D_{\times}^{'0}(x)$, semble montrer bien que c'est la notion même de particule élémentaire qu'il faut préciser*).

En terminant ce travail, je tiens particulièrement à exprimer ma grande reconnaissance à M. STUECKELBERG, mon maître, l'auteur de la méthode suivie; ses conseils, ses critiques et ses encouragements furent inappréciables.

MM. W. PAULI, M. FIERZ, A. HOURIET, A. KIND et J. PIRENNE ont bien voulu, à divers degrés, s'intéresser à ce travail; j'ai parfois largement tenu compte de leurs critiques et suggestions; qu'ils veuillent bien accepter ici mes remerciements.

Enfin, ma gratitude va à la Commission Suisse pour l'Energie Atomique qui s'est matériellement intéressée à mes recherches.

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.

BIBLIOGRAPHIE.

- ⁰⁾ E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **11**, 3, 221 (1938) (éq. 5. 3.).
- ¹⁾ E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **18**, 1, 21 (1945).
- ²⁾ E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **18**, 3, 19 (1945).
- ³⁾ E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **19**, 4, 241 (1946).
- ⁴⁾ E. C. G. STUECKELBERG, Physical Society Cambridge Conf. Report p. 199 (1947).
- ⁵⁾ Q. MAJORANA, Nuov. Cim. (1931).
- ⁶⁾ W. PAULI, Ann. Inst. Poincaré **6** (1936).
- ⁷⁾ TOMONAGA, Process in Theoretical Physics **1** (1946).
- ⁸⁾ PAYS, Phys. Rev. (1947).
- ⁹⁾ D. RIVIER and E. C. G. STUECKELBERG, Phys. Rev. **74**, 2, 218 (1948).

*) On peut remarquer qu'il subsiste un arbitraire dans la valeur de $D^s(x)$ au point $x = 0$ (cf. 11.1).

APPENDICE.

Notations, formules et définitions.

I. Groupe de Lorentz continu.

Notations: $x^\alpha = (\tilde{x}, x^4 = t)$ ($x, y = x_\alpha y^\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta y^\alpha$; $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$;
 $\partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta$.

Tenseur fondamental: $g^{\alpha\beta} - g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{44} = 1$; $g^{\alpha\beta} = 0 \alpha \neq \beta$.

Transformations de coordonnées:

identique: $x^{*\mu} = \delta^\mu_\nu x^\nu = \varphi(0) x^\mu = 1 x^\mu$

infinitésimale: $x^{*\mu} = \delta a^\mu + (\delta^\mu_\nu - \delta \psi^\mu_\nu) x^\nu = \varphi(\delta a^\mu, \delta \psi^\mu_\nu) x^\nu = \varphi(x)$

finie: $x^{*\mu} = a^\mu + a^\mu_\nu x^\nu = \varphi(a^\mu, \psi^\mu_\nu) x^\nu$.

Opérateurs correspondants:

identique: $\varphi(0) = 1$

infinitésimal: $\varphi(\delta \tau^i) = 1 - \sum_1^{10} P_{(i)} \cdot \delta \tau^{(i)} = \varphi(\delta a^\mu, \delta \psi^\mu_\nu) = 1$
 $- i p_\mu \delta a^\mu - \frac{i}{2} M_\mu^\nu \delta \psi^\mu_\nu$

fini: $\varphi(\tau^i) = \varphi(a_\mu, \psi^\mu_\nu)$; $\psi^\mu_\nu = -\alpha^\mu_\nu + \delta^\mu_\nu$.

Relations de LIE entre les générateurs

$$i[p_\mu, p_\nu] = 0 \quad (I.1)$$

$$i[M_{\lambda\mu}, M_{\nu\rho}] = g_{\lambda\rho} M_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} M_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu} M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} M_{\lambda\nu} \quad (I.2)$$

$$i[p_\lambda, M_{\mu\nu}] = g_{\lambda\mu} p_\nu - g_{\lambda\nu} p_\mu \quad (I.3)$$

Autres commutateurs:

$$i[p_\alpha, x_\beta] = g_{\alpha\beta} 1 \quad (I.4)$$

$$i[M_{\alpha\beta}, x_\gamma] = g_{\beta\gamma} x_\alpha - g_{\alpha\gamma} x_\beta \quad (I.5)$$

Expressions des générateurs

$$p_\alpha = \frac{1}{i} \partial_\alpha \quad (I.6)$$

$$M_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad L_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha \quad (I.7)$$

Représentations de $S_{\alpha\beta}$

$$\text{appliqué sur un scalaire } S_{\alpha\beta} u = 0 \quad (I.8)$$

$$\text{un vecteur } S_{\alpha\beta} t^\mu = S_{\alpha\beta}^\mu{}_\nu t^\nu; S_{\alpha\beta}^\mu{}_\nu = \frac{1}{i} (g_{\alpha\nu} \delta_\beta^\mu - g_{\beta\nu} \delta_\alpha^\mu) \quad (I.9)$$

$$\text{un spineur } S_{\alpha\beta} u^A = S_{\alpha\beta}^A{}_B u^B; S_{\alpha\beta}^A{}_B = -\frac{i}{4} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_-^A{}_B \quad (I.10)$$

II. Fonctions particulières.

$$\theta^+(z) = \begin{cases} 1 & z > 1 \\ 0 & z < 1 \end{cases} \quad (II.1)$$

$$\theta^-(z) = \theta^+(-z). \quad (II.2)$$

$$\theta^+(z) + \theta^-(z) = 1 \quad (II.3)$$

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} +1 & z > 1 \\ -1 & z < 1 \end{cases} \quad \varepsilon(z) = \frac{|z|}{z} = \theta^+(z) - \theta^-(z) \quad (II.4)$$

$$\delta(z) = \frac{\partial}{\partial z} \theta^+(z) \quad (II.5)$$

$$\delta(z) = 0 \text{ pour } z \neq 0; \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \delta(z) = 1 \quad z \delta(z) = 0 \quad (II.6)$$

$$\delta_{\pm}(z) = \frac{1}{2} \left[\delta(z) \mp \frac{1}{i\pi z} \right] \quad \delta_+(z) + \delta_-(z) = \delta(z) \quad (II.7)$$

$$\delta(x) = \prod_1^4 \delta(x^{\alpha}); \quad (II.8)$$

$$\delta_{\alpha}(x) = \partial_{\alpha} \delta(x) \quad (II.9)$$

$$\delta'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \delta(z) = -\frac{\delta(z)}{z} + A\delta(z); \quad A \text{ arbitraire} \quad (II.10)$$

III. Les fonctions $D_{\kappa}(x)$.a) Dans l'espace temps x .

$$\text{Notations } \square = \partial^{\alpha} \partial_{\alpha}, \quad (x, x) = R^2 = -T^2 = r^2 - t^2; \quad r = |\tilde{x}| \quad (III.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} D(x''/x') = D_{;\alpha'}(x''/x'); \quad \frac{\partial}{\partial x^{\alpha''}} D(x''/x') = D_{;\alpha''}(x''/x'); \\ D(x''/x') = D(x'' - x') \quad (III.2)$$

$$\text{Fonctions homogènes } D^{\text{hom}}: \quad D^0, D^1, D^+, D^-;$$

$$\text{Equation différentielle } (\square - \kappa^2) D^{\text{hom}} = 0 \quad (III.3)$$

Définitions et propriétés:

$$D^0(x) = -D^0(-x); \quad \int_{\tau(x)} d\sigma^{\alpha} \partial_{\alpha} D^0(x) = 1 \quad \tau(x) \text{ hypersurface telle} \\ \text{que } \tau(0) = 0 \quad (III.4)$$

$$D^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } R^2 > 0 \\ +\varepsilon(t) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \delta(r - |t|) & \text{pour } R^2 = 0 \\ -\varepsilon(t) \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{T} J_1(\kappa T) & \text{pour } R^2 < 0 \end{cases} \quad (III.5)$$

$$D^0(x) \delta(x^4) = 0; \quad \partial_4 D(\tilde{x}, 0) = \delta(\tilde{x}) \quad (III.6)$$

$$D^0(x) = \frac{i}{2} [D^+(x) - D^-(x)] \quad (III.7)$$

$$D^1(x) = D^1(-x), \quad 4\pi\kappa \int_0^\infty dR \cdot R^2 D^1(x) = 1 \quad (\text{III.8})$$

$$D^1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{R} H_1^{(1)}(i\kappa R) & \text{pour } R^2 > 0 \\ -\infty & \text{pour } R^2 = 0 \\ +\frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{T} N_1(\kappa T) & \text{pour } R^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

$$D^1(x) = \frac{1}{2} [D^+(x) + D^-(x)] \quad (\text{III.10})$$

$$D^+(x) = D^1(x) + \frac{1}{i} D^0(x) = D^-(-x) = (D^-(x))^+ \quad (\text{III.11})$$

$$D^-(x) = D^1(x) - \frac{1}{i} D^0(x) = D^+(-x) = (D^+(x))^- \quad (\text{III.12})$$

Fonctions potentielles D^{pot} : D^s , D^{ret} , D^{av} , D^c , D^a

$$\text{Equation différentielle } (\square - \kappa^2) D^{\text{pot}} = -\delta(x) \quad (\text{III.13})$$

Définitions et propriétés:

$$D^s(x) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) D^0(x) \quad (\text{III.14})$$

$$D^s(x) = \frac{1}{4\pi} [\delta(T^2) - \frac{1}{2} \theta^+(T^2) \frac{\kappa}{T} J_1(\kappa T)] \quad (\text{III.15})$$

$$D^s(-x) = D^s(x) \quad (\text{III.16})$$

$$D^{\text{ret}}(x) = D^s(x) + \frac{1}{2} D^0(x) = \theta^+(t) D^0(x) \quad (\text{III.17})$$

$$D^{\text{av}}(x) = D^s(x) - \frac{1}{2} D^0(x) = -\theta^-(t) D^0(x) \quad (\text{III.18})$$

$$D^c(x) = D^s(x) + \frac{i}{2} D^1(x) = \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D^+(x) + \theta^-(x^4) D^-(x)] \quad (\text{III.19})$$

$$D^a(x) = D^s(x) - \frac{i}{2} D^1(x) = \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D^-(x) + \theta^-(x^4) D^+(x)] \quad (\text{III.20})$$

$$D^c(x) - i D^1(x) = D^a(x) = 0 \quad (\text{III.21})$$

$$D^c(-x) = D^c(x); D^a(-x) = D^a(x); (D^c(x))^+ = D^a(x) \quad (\text{III.22})$$

$$D_{;\alpha}^c(x) = \pm \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D_{;\alpha}^{\pm}(x) + \theta^-(x^4) D_{;\alpha}^{\mp}(x)]; \quad (\text{III.23})$$

$$D_{;\alpha\beta}^c(x) = \pm \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D_{;\alpha\beta}^{\pm}(x) + \theta^-(x^4) D_{;\alpha\beta}^{\mp}(x)] + \delta_\alpha^\dagger \delta_\beta^\dagger \delta(x) \quad (\text{III.24})$$

b) Représentation dans l'espace de Fourier à 3 dimensions.

$$D^0(x) = (2\pi)^{-3} \frac{i}{2} \int dV(\vec{k}) [e^{+i(k,x)} - e^{-i(k,x)}] \quad (\text{III.25})$$

$$D^1(x) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \int dV(\vec{k}) [e^{+i(k,x)} + e^{-i(k,x)}] \quad (\text{III.26})$$

$$D^+(x) = (2\pi)^{-3} \int dV(\vec{k}) e^{+i(k,x)} \quad (\text{III.27})$$

$$D^-(x) = (2\pi)^{-3} \int dV(\vec{k}) e^{i(kx)} \quad (\text{III.28})$$

$$\delta_{\pm}(z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dk e^{\pm i k z} \quad \delta(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{\pm i k z} \quad (\text{III.29})$$

c) Représentation dans l'espace de Fourier à 4 dimensions.

$$D(x) = (2\pi)^{-2} \int (dp)^4 e^{i(p x)} \Delta(p) \quad (\text{III.30})$$

$$\Delta^0(p) = \frac{i}{2\pi} \varepsilon(p^4) \delta((p, p) + \kappa^2) \quad (\text{III.31})$$

$$\Delta^1(p) = \frac{1}{2\pi} \delta((p, p) + \kappa^2) \quad (\text{III.32})$$

$$\Delta^s(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(pp) + \kappa^2} \quad (\text{III.33})$$

$$\Delta^{\pm}(p) = \frac{\theta^{\pm}(p^4)}{\pi} \delta((p, p) + \kappa^2) \quad (\text{III.34})$$

$$\Delta^{\text{ret}}_{\text{av}}(p) = \pm \varepsilon(p^4) \frac{i}{2\pi} \delta_{\pm}[\varepsilon(p^4) ((p, p) + \kappa^2)] \quad (\text{III.35})$$

$$\Delta^c_a(p) = \pm \frac{i}{2\pi} \delta_{\mp}((p, p) + \kappa^2) \quad (\text{III.36})$$

d) Les fonctions $D(x)$ spinorielles.

Les matrices (γ^{α}) $\alpha = 1, 2, 3, 4$

$\gamma^{\alpha A}{}_B$ $A, B = 1, 2, 3, 4$

$$[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]_{+} = \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} + \gamma^{\beta} \gamma^{\alpha} = 2 g^{\alpha\beta} \quad (\gamma^{\alpha})^{+} = \gamma^{\alpha} \quad (\text{III.37})$$

$$\text{représentation réelle de Majorana (5)} \quad (\gamma^{\alpha})^{+} = (\gamma^{\alpha}) \quad (\text{III.38})$$

$$\xi_{AB} = \xi^{AB} = -\gamma^A{}_B \quad (\text{III.39})$$

$$\gamma^{\alpha AB} = \gamma^{\alpha A}{}_A \xi^{A'B} \quad \gamma^{\alpha}_{AB} = \xi_{AA'} \gamma^{\alpha A'}{}_B \quad (\text{III.40})$$

$$D^{\sigma A''}{}_{A'}(x''/x') = (\gamma, \partial'' - \kappa)^{A''}{}_{A'} D^{\sigma}(x''/x'); \quad (\gamma, \partial'') = \gamma^{\alpha} \partial''_{\alpha''} \quad (\text{III.41})$$

$$\sigma = 0, 1, \pm s, \overset{\text{ret}}{\underset{\text{av}}{s}}, \overset{a}{c} \quad (\text{III.41})$$

$$D^{-A''A'}(x''/x') = -D^{+A''A'}(x''/x') \quad (\text{III.42})$$

$$D^{1A''A'}(x''/x') = -D^{1A'A''}(x''/x') \quad (\text{III.43})$$

$$D^{0A''A'}(x''/x') = D^{0A'A''}(x''/x') \quad (\text{III.44})$$

$$(\gamma, \partial + \kappa)^A{}_B D^{\text{hom}}{}^B{}_{A'}(x) = 0 \quad (\gamma, \partial + \kappa)^A{}_B D^{\text{pot}}{}^B{}_{A'}(x) = -\delta(x) \delta^A{}_{A'} \quad (\text{III.45})$$

$$D^{sA''A'}(x''/x') = -D^{sA'A''}(x''/x') \quad (\text{III.46})$$

$$(D^{cA''A'}(x''/x'))^{+} = -D^{cA'A''}(x''/x') \quad (\text{III.47})$$

Classification invariante des termes de la matrice S

par A. Houriet et A. Kind.

(18. III. 1949.)

Pour éliminer les divergences que la théorie des perturbations introduit dès le second ordre, il est utile de décomposer les termes de chaque ordre en classes invariantes pour une transformation de LORENTZ. C'est le but de ce travail, qui repose sur la théorie des graphes.

La méthode proposée est générale. Cependant nous l'exposerons sur un exemple particulier. Soient deux ensembles de particules de spin 0, les premières chargées et de masse κ , les secondes neutres et de masse μ . Elles sont décrites par les champs scalaires $u^+(x)$ et $u(x)$, respectivement $\varphi(x)$. Ce sont des fonctions d'espace-temps: $x = (\tilde{x}, t)$. Si les deux champs ne sont pas couplés, l'équation de SCHROEDINGER est stationnaire et s'écrit

$$H_0 F_0 = E_0 F_0$$

où H_0 est l'hamiltonien du système total et E_0 son énergie. Le vecteur énergie-impulsion de chaque particule est constant. Le système n'évolue pas.

Introduisons un hamiltonien d'interaction $\varepsilon H'$, ε désigne la constante de couplage. Le système est devenu évolutif. L'état au temps t différera de l'état initial. Cette évolution obéit à l'équation

$$i \frac{\partial}{\partial t} F(t) = \varepsilon H'(t) F(t) \text{ avec } F(t) = e^{-i E_0 t} F_0 \quad (1)$$

où $H'(t)$ désigne l'hamiltonien dépendant du temps.

Si l'on intègre l'équation différentielle (1) par rapport au temps, on la transforme en une équation intégrale. L'état du système au temps t s'exprimera à partir de l'état initial par une matrice d'évolution $S(t, -\infty) = S(t)$ que l'on obtient en développant la solution suivant les puissances de ε .

$$F(t) = S(t) F(-\infty) \text{ avec} \quad (2)$$

$$S(t) = 1 + S_1(t) + S_2(t) + \dots \quad (3)$$

$$S_m(t) = (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt_m \int_{-\infty}^{t_m} dt_{m-1} \dots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 H'(t_m) H'(t_{m-1}) \dots H'(t_1) \quad (4)$$

Il est commode d'introduire ici les fonctions

$$\begin{aligned} \theta^+(j \cdot i) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t_j < t_i \\ 1 & \text{si } t_j > t_i \end{cases} \\ \theta^-(j \cdot i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t_j < t_i \\ 0 & \text{si } t_j > t_i \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

telles que

$$\theta^+(j \cdot i) + \theta^-(j \cdot i) = 1 \quad (6)$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} S_m(t) &= (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt_m \int_{-\infty}^t dt_{m-1} \cdots \int_{-\infty}^t dt_1 \theta^+(m \cdot m-1) \theta^+(m-1 \cdot m-2) \\ &\quad \cdots \theta^+(2 \cdot 1) H'(t_m) \cdots H'(t_1) \end{aligned} \quad (7)$$

Précisons le terme de couplage que nous adoptons:

$$H'(t) = \int (d\vec{x})^3 u^+(x) u(x) \varphi(x) \quad (8)$$

L'intégrale s'étend à tout l'espace tridimensionnel. Les champs $u^+(x)$, $u(x)$ et $\varphi(x)$ développés suivant un système complet d'ondes planes s'écrivent

$$\begin{aligned} u^+(x) &= \frac{1}{(2V_u)^{1/2}} \sum_k \frac{1}{k_0^{1/2}} \{a_k^+ e^{-i(kx)} + b_k e^{i(kx)}\} \\ u(x) &= \frac{1}{(2V_u)^{1/2}} \sum_k \frac{1}{k_0^{1/2}} \{a_k e^{i(kx)} + b_k^+ e^{-i(kx)}\} \\ \varphi(x) &= \frac{1}{(2V_\varphi)^{1/2}} \sum_n \frac{1}{n_0^{1/2}} \{c_n e^{i(nx)} + c_n^+ e^{-i(nx)}\} \end{aligned} \quad (9)$$

avec

$$(kk) = -\kappa^2, \quad (nn) = -\mu^2$$

les a_k^+ , a_k , b_k^+ , b_k , c_n^+ , c_n sont les opérateurs connus de la théorie des champs quantifiés, par exemple

$$\begin{aligned} a_k^+ F(\cdots, N_k, \cdots) &= \sqrt{N_k + 1} F(\cdots, N_k + 1, \cdots) \\ [a_k^+, a_{k'}] &= -\delta_{k,k'} \end{aligned} \quad (10)$$

Pour simplifier l'écriture, convenons d'écrire $u^+(i)$, $u(i)$, $\varphi(i)$ pour $u^+(x_i)$, $u(x_i)$, $\varphi(x_i)$; $u^+ u \varphi(i)$ pour $u^+(i) u(i) \varphi(i)$. Nous omettons aussi de noter les intégrales spatiales et nous abrégeons les m intégrales sur le temps par une seule sur la variable t' . S_m devient

$$S_m(t) = (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(m \cdot m-1) \cdots \theta^+(2 \cdot 1) u^+ u \varphi(m) \cdots u^+ u \varphi(1) \quad (11)$$

La définition de S_m montre que cette matrice est déterminée par m éléments $u^+ u \varphi(i)$. Chacun d'eux décrit un ensemble d'absorptions et d'émissions localisées en x_i dans l'espace-temps. Ces éléments se suivent dans un ordre opératoire, qui coïncide avec l'ordre temporel de l'intégration représenté par les fonctions θ^+ . Nous supposons que dans chaque élément $u^+ u \varphi(i)$, tous les opérateurs d'émission sont à gauche des opérateurs d'absorption. Notre but est de trouver tous les termes que l'on obtient à partir de S_m , lorsqu'on y place les opérateurs d'émission à gauche des opérateurs d'absorption.

À cet effet, examinons le produit $u^+(j) u(i)$. Nous pouvons déplacer les opérateurs de telle manière que les opérateurs d'émission soient à gauche de ceux d'absorption. C'est ce que nous appellerons un terme ordonné. Mais cette opération fait apparaître un nouveau terme, qui résulte de la commutation des b_k et des b_k^+ , de sorte qu'on a

$$u^+(j) u(i) = u^+(j) u(i)_{\text{ord.}} + \underbrace{u^+(j) u(i)}_{\text{contraction}} \quad (12)$$

Le premier terme $u^+(j) u(i)_{\text{ord.}}$ décrit tous les processus qui se passent en x_j indépendamment de ceux qui ont x_i pour siège. Le second terme représente l'émission d'une particule en x_i , suivie de son absorption en x_j . Nous le nommerons terme contracté et contraction le processus qu'il décrit. Il ne contient plus d'opérateurs et vaut:

$$\underbrace{u^+(j) u(i)}_{\text{contraction}} \equiv \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{V_u k_0} e^{i(k \cdot x_j - x_i)} \equiv \frac{1}{2} D_u^+(j \cdot i) \quad (13)$$

De même, nous transformons les produits $u(x_j) u^+(x_i)$ et $\varphi(x_j) \varphi(x_i)$ en produits ordonnés auxquels nous ajoutons les termes contractés correspondants

$$\begin{aligned} u(x_j) u^+(x_i) &= u(x_j) u^+(x_i)_{\text{ord.}} + \underbrace{u(x_j) u^+(x_i)}_{\text{contraction}} \\ \varphi(x_j) \varphi(x_i) &= \varphi(x_j) \varphi(x_i)_{\text{ord.}} + \underbrace{\varphi(x_j) \varphi(x_i)}_{\text{contraction}} \end{aligned} \quad (14)$$

On peut aisément interpréter les contractions que nous venons d'introduire. Chacune représente l'émission d'une particule en x_i suivie de son absorption en x_j , soit:

$$\begin{aligned} \underbrace{u^+(x_j) u(x_i)}_{\text{contraction}} &= \frac{1}{2} D_u^+(j \cdot i) && \text{particule } \kappa \text{ négative} \\ \underbrace{u(x_j) u^+(x_i)}_{\text{contraction}} &= \frac{1}{2} D_u^+(j \cdot i) && \text{particule } \kappa \text{ positive} \\ \underbrace{\varphi(x_j) \varphi(x_i)}_{\text{contraction}} &= \frac{1}{2} D_\varphi^+(j \cdot i) && \text{particule } \mu \text{ neutre} \end{aligned} \quad (15)$$

Pour simplifier les notations, nous convenons d'écrire :

$$u^+ u_{\text{ord.}} = u^+ u \quad (16)$$

pour les produits ordonnés. Autrement dit, dans le terme général S_m , nous n'indiquerons que les contractions, sous-entendant par là que tous les opérateurs qui ne sont pas touchés par elles sont ordonnés, c'est-à-dire que les opérateurs d'absorption sont à droite des opérateurs d'émission. Ceci fixé, on voit que toute combinaison de contractions effectuées sur le terme général S_m , (11), en extrait un terme particulier. Désignons par α une combinaison déterminée de contractions, et $S_m(\alpha)$ le terme ordonné qui lui correspond, il est clair que la correspondance est biunivoque entre α et $S_m(\alpha)$.

Considérons par exemple le terme général S_2 , qui contient le produit des deux éléments

$$u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)$$

Il se décompose dans les termes suivants α_r correspondant chacun à une combinaison donnée de contractions.

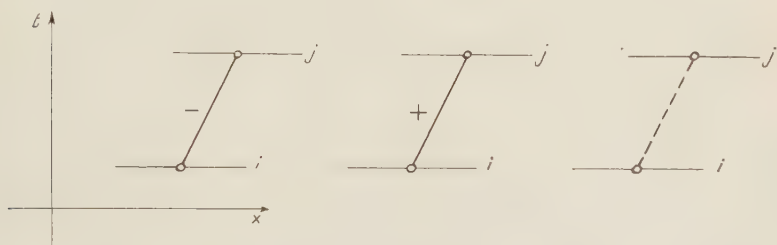
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)_{\text{ord.}} = u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1) \\ \alpha_1 &= \underbrace{u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)}_{\text{contraction}} & \alpha_2 &= u^+ u \underbrace{\varphi(2) u^+ u \varphi(1)}_{\text{contraction}} \\ \alpha_3 &= u^+ u \underbrace{\varphi(2) u^+ u \varphi_1(1)}_{\text{contraction}} & \alpha_4 &= u^+ u \underbrace{\varphi(2) u^+ u \varphi(1)}_{\text{contraction}} \\ \alpha_5 &= \underbrace{u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)}_{\text{contraction}} & \alpha_6 &= u^+ u \underbrace{\varphi(2) u^+ u \varphi(1)}_{\text{contraction}} \\ \alpha_7 &= \underbrace{u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)}_{\text{contraction}} \end{aligned} \quad (17)$$

Il est possible de donner une représentation graphique pour chaque terme α et par conséquent pour chaque $S_m(\alpha)$. Pour cela, observons que chaque élément $u^+ u \varphi(i)$ correspond à un point de l'espace-temps: x_i . Comme les trois dimensions spatiales sont équivalentes, nous n'en considérerons qu'une x associée au temps t . Nous placerons chaque point x_i dans le plan x, t , en tenant compte de l'ordre temporel donné par les fonctions θ^+ . Puis, nous réunirons par une ligne les points ou nœuds ou sommets entre lesquels existe

une contraction. Chaque contraction sera représentée par une ligne différente, correspondant aux trois types de contractions de (15). Ainsi à

$$\underbrace{u^+(j) u(i)} \quad \underbrace{u(j) u^+(i)} \quad \underbrace{\varphi(j) \varphi(i)} \quad (18)$$

correspondront



qui décrivent les échanges de particules π négatives, π positives, et μ . Si entre deux nœuds il y a plusieurs contractions, chacune sera portée dans le diagramme ou graphe correspondant. Voici quelques exemples :

A la matrice $S_3(\alpha_0)$, où α_0 désigne le terme ordonné sans contraction

$$S_3(\alpha_0) = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(3 \cdot 2) \theta^+(2 \cdot 1) u^+ u \varphi(3) u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1) \quad (19a)$$

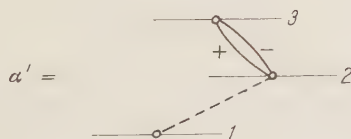
correspond le graphe



tandis qu'à

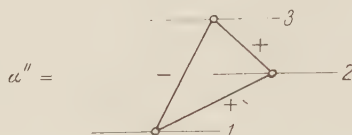
$$S_3(\alpha') = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(3 \cdot 2) \theta^+(2 \cdot 1) \underbrace{u^+ u \varphi(3)} \underbrace{u^+ u \varphi(2)} \underbrace{u^- u \varphi(1)} \quad (19b)$$

correspond



et à

$$S_3(\alpha'') = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta^+(3 \cdot 2) \theta^+(2 \cdot 1) \underbrace{u^+ u \varphi(3)}_{-3} \underbrace{u^+ u \varphi(2)}_{-2} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{-1} \quad (19c)$$



Il est manifeste que la correspondance est biunivoque entre un terme α ou $S_m(\alpha)$ et le diagramme représentatif. Ce dernier comporte m points ou sommets ou nœuds, qui peuvent être reliés par des lignes. C'est le graphe représentatif de α .

Nous disposerons les $S_m(\alpha)$ en groupes invariants pour une transformation de LORENTZ. Au lieu de regarder l'indice i lié à l'ordre temporel représenté par les fonctions θ^+ , on peut définir une numérotation intrinsèque des sommets. Définissons la permutation de deux sommets j et i . Par cette opération, nous entendons le produit ordonné que l'on obtient en permutant les deux éléments $u^+ u \varphi(j)$ et $u^+ u \varphi(i)$, en laissant subsister les contractions qui les lient. Quelques exemples feront comprendre cette opération: soit P_{ji} l'opération en question, on aura:

$$\begin{aligned} P_{ji} \left\{ \underbrace{u^+ u \varphi(j) u^+ u \varphi(i)} \right\} &= \underbrace{u^+ u \varphi(i) u^+ u \varphi(j)} \\ P_{ji} \left\{ \underbrace{u^+ u \varphi(j) u^+ u \varphi(i)} \right\} &= \underbrace{u^+ u \varphi(i) u^+ u \varphi(j)} \\ P_{ji} \left\{ \underbrace{u^+ u \varphi(j) u^+ u \varphi(i)} \right\} &= \underbrace{u^+ u \varphi(i) u^+ u \varphi(j)} \end{aligned} \quad (20)$$

ou encore, si l'on utilise les graphes représentatifs:

$$\begin{aligned} P_{ji} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right\} &= \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \\ P_{ji} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right\} &= \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \\ P_{ji} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right\} &= \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \end{aligned} \quad (21)$$

On voit que cette opération échange les contractions κ^+ et κ^- , tandis qu'elle laisse la contraction μ inchangée. Donnons

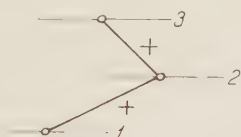
un autre exemple. En permutant les sommets 2 et 3 de (19c), il vient:

$$S_3(\alpha''') = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(2 \cdot 3) \theta^+(3 \cdot 1) \underbrace{u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(3) u^+ u \varphi(1)}_{(22)}$$

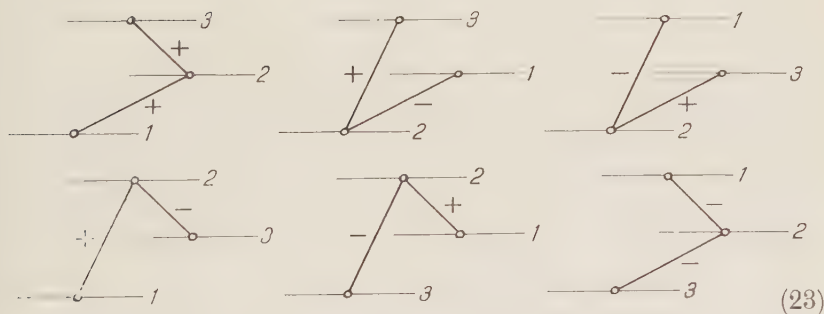
et son graphe



Nous définirons deux termes α_1, α_2 de S_m comme équivalents quand l'un se déduit de l'autre par des permutations de ses sommets. Nous grouperons tous les termes équivalents entre eux en groupes. Soit un terme α , $[\alpha]$ désignera α et tous les éléments qui lui sont équivalents. On voit facilement que $[\alpha]$ contient $m!$ éléments. Par exemple, le groupe des termes équivalents à



est



(23)

A chaque graphe α de $[\alpha]$, on pourra naturellement faire correspondre une matrice $S_m(\alpha)$, et au groupe $[\alpha]$, on associera la matrice

$$S_m([\alpha]) = \sum_{[\alpha]} S_m(\alpha) \quad (24)$$

où α parcourt les $m!$ éléments équivalents à un élément donné α .

Si α est un graphe donné, et $S_m(\alpha)$ la matrice correspondante, $[\alpha]$ contenant $m!$ graphes équivalents, $S_m([\alpha])$ sera formée de la

somme de $m!$ matrices. Or, il importe de remarquer qu'il n'y a pas en général $m!$ matrices équivalentes dans le terme général S_m (11). Pour le montrer, définissons l'égalité de deux graphes. Nous dirons que deux graphes α_1, α_2 sont égaux entre eux quand ils sont superposables et qu'ils ne diffèrent que par leur numérotation. Divisons le groupe $[\alpha]$ des termes équivalentes à α en classes de restes dont chacune contiendra tous les termes égaux entre eux. Soit $\{\alpha\}$ la classe de reste des termes égaux au terme α . Comme le nombre des termes égaux entre eux ne dépend que de la structure du graphe, il est clair que chacune des classes de restes $\{\alpha\}$ de $[\alpha]$ contiendra le même nombre de termes: N_α . Chaque classe de restes $\{\alpha\}$ correspond à une et une seule matrice $S_m(\alpha)$, réellement présente dans le terme général (11). Il y a correspondance biunivoque entre les classes de restes $\{\alpha\}$ et les matrices $S_m(\alpha)$ du terme général.

On peut encore exprimer la décomposition qui précède de la façon suivante. L'ensemble des $m!$ permutations forment un groupe $[\alpha]$ qui contient $m!$ éléments, dont chaque graphe est un représentant. L'ensemble des permutations, que nous appelons renumérotation d'un graphe donné, forme un sous-groupe de $[\alpha]$, sous-groupe que nous désignons par $\{1\}$. C'est le sous-groupe des automorphismes d'un graphe déterminé. Soit N_α le nombre des éléments de $\{1\}$. Une décomposition du groupe en classes de restes module $\{1\}$, et, suivant les éléments $\alpha', \alpha'' \dots, s'$ écrit

$$[\alpha] = \{1\} + \alpha' \{1\} + \alpha'' \{1\} + \dots \quad (25)$$

Cette décomposition est univoque et chacune des $m!/N_\alpha$ classes de restes contient N_α éléments. D'après la définition des matrices $S_m(\alpha)$ à partir du terme général (11), dans lequel on effectue une certaine combinaison de contractions, la correspondance est bi-univoque entre les classes de restes et les $S_m(\alpha)$ équivalentes et réellement présentes dans (11).

La correspondance entre α et les mêmes matrices n'est donc bi-univoque que dans le cas où chaque classe de restes ne contient qu'un élément. Alors $\{1\}$ ne contient qu'un élément, l'unité. C'est le cas, par exemple, du groupe (23), dont chaque élément forme une classe de restes.

Dans le cas général, si $\langle \alpha \rangle$ désigne l'ensemble des matrices équivalentes entre elles et réellement présentes dans (11), on aura pour la matrice

$$S_m(\langle \alpha \rangle) = \sum_{\langle \alpha \rangle} S_m(\alpha) \quad (26)$$

où α parcourt tous les éléments équivalents du terme général (11):

$$S_m(<\alpha>) = \frac{1}{N_\alpha} S_m([\alpha]) \quad (27)$$

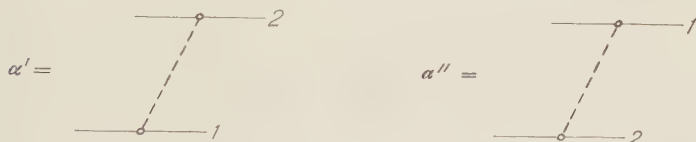
Donnons quelques exemples: soit le terme α'

$$S_2(\alpha') = (-i\varepsilon)^2 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(2 \cdot 1) \underbrace{u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)}$$

La permutation des nœuds 1 et 2 donne α''

$$S_2(\alpha'') = (-i\varepsilon)^2 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(1 \cdot 2) \underbrace{u^+ u \varphi(1) u^+ u \varphi(2)}$$

qui n'est rien d'autre que le premier terme, dans lequel on a renuméroté les nœuds. Les deux graphes correspondants

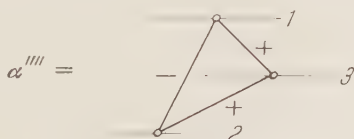


sont superposables et appartiennent donc à une même classe de restes. Le nombre N_α correspondant est 2.

Reprenons aussi les termes (19c) et (22). Leurs graphes ne sont pas superposables. Ils appartiennent à des classes de restes différentes et correspondent à deux termes réellement présents dans la matrice S_3 . Par contre, toute permutation cyclique appliquée à l'un d'eux redonne le même terme: ainsi la permutation cyclique (231) appliquée à (19c) donne

$$S_3(\alpha''') = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(1 \cdot 3) \theta^+(3 \cdot 2) \underbrace{u^+ u \varphi(1) u^+ u \varphi(3) u^+ u \varphi(2)} \quad (28)$$

qui est le terme (19c) à la numérotation près des variables d'intégration. Le graphe correspondant



est superposable au graphe (19c) et les deux termes sont égaux.

Ils appartiennent à la même classe de restes. Le sous-groupe $\{1\}$ est ici le groupe cyclique d'ordre 3, et l'on a $N_\alpha = 3$.

Chacune des matrices $S_m([\alpha]) = N_\alpha S_m(<\alpha>)$ est invariante pour une transformation de LORENTZ. En effet, toute transformation de LORENTZ transforme un graphe donné en un graphe qui lui est équivalent. Le groupe des graphes équivalents se transforme en lui-même et la proposition est démontrée.

Un graphe étant donné et par lui le groupe des graphes qui lui sont équivalents, il nous reste à trouver la structure analytique de la matrice $S_m([\alpha])$ ou $S_m(<\alpha>)$ correspondante. Reprenons le terme général (11). Au lieu de fixer la succession temporelle des m points ou nœuds par les $m - 1$ fonctions θ^+ , on peut compléter cette description en introduisant des fonctions en surnombre. Ainsi nous fixerons la position de chaque nœud relativement aux autres :

$$\begin{aligned} S_m(t) &= (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(m \cdot m - 1) \theta^+(m \cdot m - 2) \dots \\ &\theta^+(m \cdot 1) \theta^+(m - 1 \cdot m - 2) \dots \theta^+(m - 1 \cdot 1) \dots \\ &\theta^+(2 \cdot 1) u^+ u \varphi(m) \dots u^+ u \varphi(1) \end{aligned} \quad (29)$$

Au lieu des $m - 1$ fonctions θ^+ , on a maintenant $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions, dont la plupart sont en surnombre. Soit un ensemble de contractions effectuées sur S_m et définissant un terme α . Au lieu de noter ces contractions dans le terme général, comme nous l'avons fait dans (19b) ou (19c), nous remplacerons la contraction par son expression analytique correspondante $D_u^+(j \cdot i)$ définie par (15). Ces contractions

ont pour effet de réduire le nombre des champs des éléments $u^+ u \varphi(i)$. Désignons par $R(i)$ les champs restants liés au point i . Comme il y a coïncidence entre l'ordre temporel des fonctions $\theta^+(j \cdot i)$ et l'ordre opératoire des différents éléments $u^+ u \varphi(i)$, les fonctions $\theta^+(j \cdot i)$ et $D_u^+(j \cdot i)$ correspondant à deux points j et i , entre lesquels il y a une contraction, apparaîtront toujours dans la combinaison :

$$\theta^+(j \cdot i) D_u^+(j, i)$$

L'ordre $(j \cdot i)$ est le même dans la fonction $\theta^+(j \cdot i)$ et dans la fonction $D_u^+(j \cdot i)$.

Définissons encore par analogie avec (5) :

$$\begin{aligned} \theta^-(j \cdot i) &= \theta^+(i \cdot j) \\ D_u^-(j \cdot i) &= D_u^+(i \cdot j) \end{aligned} \quad (30)$$

et notons par j et i les couples de nœuds entre lesquels il n'y a pas de contraction, par p et q les couples de nœuds entre lesquels il y a contraction. Le terme correspondant à α s'écrira :

$$S_m(\alpha) = (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt' \prod_{j,i} \theta^+(j \cdot i) \prod_{p,q} \theta^+(p \cdot q) \frac{1}{2} D_u^+(p \cdot q) \prod_{l=1}^m R(l) \quad (31)$$

Dans cette formule, lorsque, entre un couple de points p et q , il y a plusieurs contractions, il suffit de faire apparaître les produits $\theta^+(p \cdot q) \frac{1}{2} D_u^+(p \cdot q)$ correspondants.

A partir de $S_m(\alpha)$, essayons de former la matrice $S_m([\alpha])$ correspondant au groupe de termes équivalents à α . Pour cela, considérons la somme suivante :

$$S_m(\sum \theta^\pm) = (-i\varepsilon)^m \sum_{\pm} \int_{-\infty}^t dt' \prod_{j,i} \theta^\pm(j \cdot i) \prod_{p,q} \theta^\pm(p \cdot q) \frac{1}{2} D_u^\pm(p \cdot q) \prod_{l=1}^m R(l) \quad (32)$$

où la somme est à effectuer sur toutes les combinaisons possibles des fonctions θ^+ et θ^- . Chaque fonction $\theta(r \cdot s)$ pouvant devenir θ^+ ou θ^- , il y aura au moins $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ termes dans cette somme. Considérons l'un d'entre eux, en supposant qu'il est différent de 0. Comme nous avons conservé les mêmes expressions résiduelles $R(l)$, et que les contractions sont fixées par les couples de nœuds p et q , le fait de changer un certain nombre de fonctions θ^+ de (31) en fonctions θ^- , revient à redistribuer les nœuds dans le temps. C'est simplement une permutation, qui conduit à un terme équivalent à α . Cette remarque montre que tout terme de (32) différent de 0 peut être réinterprété sous la forme d'un graphe, équivalent au graphe représentatif du terme primitif α , (31). Or, nous savons qu'il y a $m!$ graphes équivalents entre eux qui forment le groupe $[\alpha]$. Nous en concluons que la somme (32) ne contient que $m!$ termes différents de 0, et qu'elle se réduit donc à $S_m([\alpha])$. Il est facile de comprendre que les termes nuls proviennent des relations d'incompatibilité des différentes fonctions θ^+ et θ^- présentes dans chaque terme de la somme (32). Ainsi, si l'on reprend le terme (23), on constate qu'en plus des 6 termes indiqués, la somme $S_m(\sum \theta^\pm)$ correspondante introduit deux termes nuls, qui contiennent les combinaisons de fonctions

$$\theta^+(3 \cdot 1) \theta^-(3 \cdot 2) \theta^-(2 \cdot 1) \equiv 0$$

$$\theta^-(3 \cdot 1) \theta^+(3 \cdot 2) \theta^+(2 \cdot 1) \equiv 0$$

Nous définirons enfin la fonction $D_u^c(p \cdot q)$, où i est l'unité imaginaire:

$$D_u^c(p \cdot q) = \frac{i}{2} \left\{ \theta^+(p \cdot q) D_u^+(p \cdot q) + \theta^-(p \cdot q) D_u^-(p \cdot q) \right\}^* \quad (33)$$

de sorte que l'on aura, en observant que

$$\sum_{(\pm)} \prod_{j, i} \theta^{\pm}(j \cdot i) = \prod_{j, i} \{ \theta^+(j \cdot i) + \theta^-(j \cdot i) \} = 1$$

$$S_m(<\alpha>) = \frac{1}{N_\alpha} S_m([\alpha]) = \frac{(-i\epsilon)^m}{N_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \prod_{p, q} \frac{1}{i} D_u^c(p \cdot q) \prod_{l=1}^m R(l) \quad (34)$$

Il apparaît donc que, le graphe représentatif de α étant donné, il est possible d'écrire immédiatement la matrice $S_m(<\alpha>)$, somme de toutes les matrices équivalentes à $S_m(\alpha)$, présentes dans $S_m(11)$. Cette matrice partielle est invariante d'après ce qui précède.

Nous tenons à remercier ici M. le Professeur E. STUECKELBERG et M. le Dr D. RIVIER de l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail, ainsi que la Commission Suisse pour les recherches atomiques qui l'a encouragé.

Institut de Physique de l'Université de Genève,

*) La fonction D^c , introduite par MM. STUECKELBERG et RIVIER: Phys. Rev. 74, 1948, p. 218, est notée D_F dans le travail de M. F. DYSON: Phys. Rev. 75, 1949, p. 486.

Dualer Zerfall von In^{114}

von F. Boehm und P. Preiswerk.

(18. III. 1949.)

Einleitung und Zusammenfassung.

Nach der Arbeit von LAWSON und CORK¹⁾ zerfällt das 72sekündige In^{114} , welches aus dem 50tägigen isomeren Zustand gebildet wird, durch β -Emission in Sn^{114} . Das β -Spektrum des In^{114} besitzt eine obere Grenze von 1,98 MeV und steht in gutem Einklang mit der Fermischen Theorie für erlaubte Übergänge, weshalb es verschiedentlich als Eichspektrum benützt worden ist.

Wir konnten indessen feststellen, dass der Zerfall von In^{114} komplexer ist als bisher angenommen wurde. Dual zum β -Übergang führen $(3 \pm 1)\%$ der Umwandlungen durch K-Einfang auf ein angeregtes Niveau von Cd^{114} . Auf den K-Einfang folgt die Emission zweier γ -Linien in Kaskade mit (715 ± 10) keV und (548 ± 10) keV Energie. Es wurden ferner Anzeichen für einen Positronenübergang mit einer Häufigkeit von 10^{-4} pro Elektron und einer Grenzenergie von (650 ± 100) keV gefunden.

Messergebnisse.

Das 50tägige In^{114} wurde im Cyclotron durch Protonenbestrahlung von Cd gewonnen und ist im chemisch abgetrennten²⁾ In-Anteil einen Monat nach der Bestrahlung praktisch rein vorhanden. Die Stärke unserer Präparate betrug 0,1 mC. Zur Kontrolle über mögliche Verunreinigungen haben wir die Halbwertszeit über eine Zeitspanne von 14 Monaten kontrolliert und in Übereinstimmung mit den Messungen von LAWSON und CORK¹⁾ zu (50 ± 1) d gefunden.

Zunächst wurde das In-Präparat mit verschiedenen Methoden auf die Anwesenheit von γ -Strahlung untersucht. Die sehr empfindliche, mehr qualitative Methode der Koinzidenzmessung der durch γ -Strahlung ausgelösten Sekundärelektronen (Bothe-Koinzidenzen) zeigt sofort, dass neben dem 192 keV- γ -Strahl vom isomeren Übergang (50tägig) noch mindestens eine härtere Strahlung vorhanden

ist. Die Reichweite dieser Sekundärelektronen in Aluminium ($R \approx 0,7$ mm) lässt auf eine primäre γ -Energie von etwa 700 keV schliessen (Fig. 1). Es sind ferner Anzeichen einer schwächeren, noch energiereicheren Strahlung zu erkennen. Die Absorptionsmessungen der γ -Strahlung mit Bleiabsorbieren bestätigen die Anwesenheit einer Komponente von zirka 700 keV (Fig. 2), lassen aber wegen der

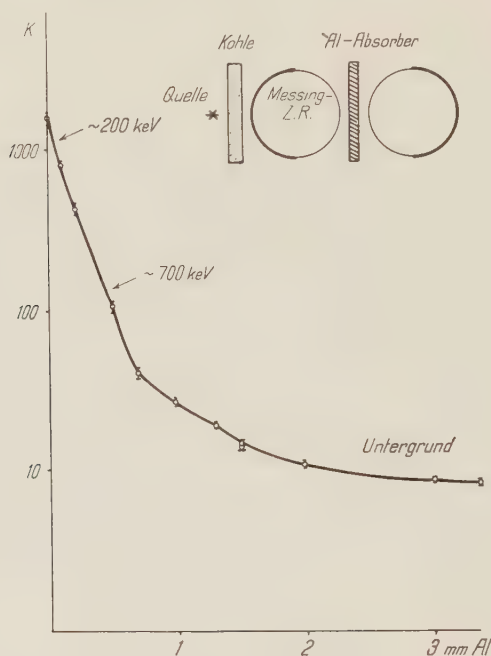


Fig. 1.

Absorptionskurve der Bothe-Koinzidenzen (Koinzidenzen der durch γ -Strahlung ausgelösten Sekundärelektronen) in Aluminium.

durch geringe Intensität dieses γ -Strahls bedingten schlechten Geometrie auch keine genaue Energiebestimmung zu.

Wir haben hierauf mit einem starken Präparat im magnetischen Linsenspektrographen nach Compton- und Photoelektronen gesucht. Das Präparat befindet sich für diese Messung in einer Goldkapsel (2 g/cm^2 Wandstärke), welche die Elektronen des β -Spektrums wegfiltert. Diese Goldkapsel ist ihrerseits von einer 100 mg/cm^2 starken Aluminiumkapsel umgeben, aus welcher die Comptonelektronen ausgelöst werden. Das Spektrum der Comptonelektronen (Fig. 3) bestätigt das Auftreten einer γ -Linie von zirka 700 keV und

zeigt ausserdem eine weniger energiereiche Komponente an. Zur Messung der Photoelektronen wurde die Aluminiumhülle mit einer Bleifolie von 17 mg/cm^2 bedeckt. Aus dem Spektrum der Photo-

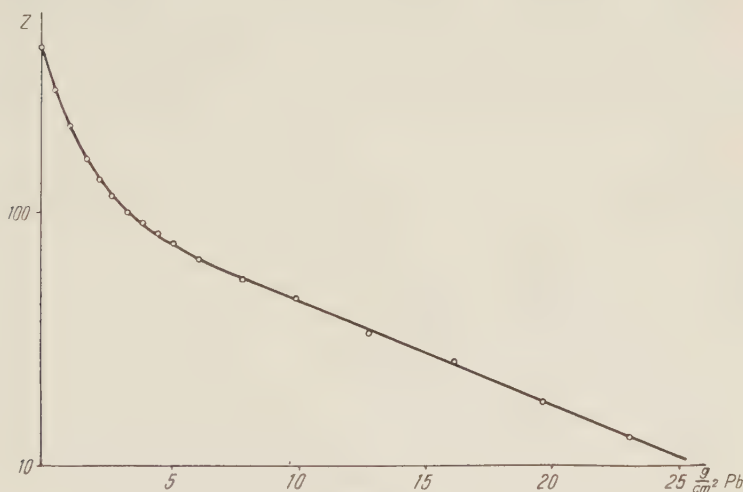


Fig. 2.

Absorptionskurve der γ -Strahlung von In^{114} in Blei.

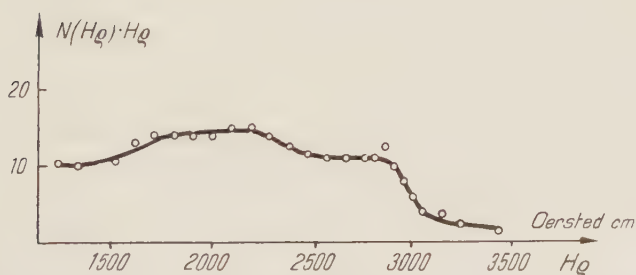


Fig. 3.

Spektrum der in Al ausgelösten Comptonelektronen von In^{114} im magnetischen Linsenspektrographen.

elektronen (Fig. 4) findet man unter Zurechnung der Bindungsenergie des K -Elektrons von Blei für die Energien der beiden γ -Linien

$$E_{\gamma_1} = (715 \pm 10) \text{ keV}, \quad E_{\gamma_2} = (548 \pm 10) \text{ keV}.$$

$(\gamma\gamma)$ -Koinzidenzmessungen zeigen, dass die beiden γ -Linien in Kaskade emittiert werden. Bei kleineren HQ -Werten treten zwei weitere Elektronenlinien auf, welche als K - und L -Photolinien der

unkonvertierten 192 keV γ -Strahlen vom ersten isomeren Übergang gedeutet werden müssen.

Aus der Absorptionsmessung (Fig. 2) kann die relative Intensität der 715- und 548-keV-Linie im Vergleich zur 192-keV-Strahlung ermittelt werden. Die Absorptionskurve lässt sich in zwei Komponenten zerlegen, die der 192-keV-Linie und dem Mittelwert der gleichintensiven 715- und 548-keV-Linien entsprechen. Unter Be-

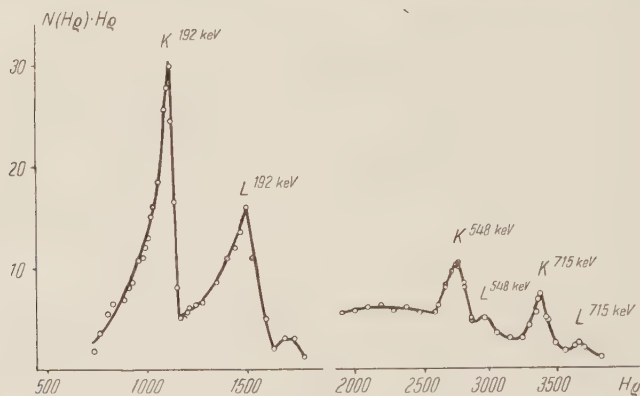


Fig. 4.

Spektrum der in Pb ausgelösten Photoelektronen von In^{114} .

rücksichtigung der energieabhängigen Zählrohrsensibilität ergibt sich das Intensitätsverhältnis

$$\delta = \frac{N_{\gamma}^{715} + N_{\gamma}^{548}}{2 N_{\gamma}^{192}} = (15 \pm 2) 10^{-2}.$$

Die absolute Intensität der γ -Kaskade können wir bei Kenntnis des Raumwinkels und der Sensibilität für die γ -Zählrohre aus der Absorptionskurve (Fig. 2) ermitteln und mit der Intensität des β -Spektrums vergleichen. Wir erhalten für dieses Verhältnis

$$\eta = \frac{N_{\gamma}^{715} + N_{\gamma}^{548}}{2 N_{\beta}} = (3 \pm 1) 10^{-2}.$$

Für das Folgende ist es wichtig, über die Stärke der Konversion der 192 keV- γ -Linie Bescheid zu wissen. Wir haben die Konversionselektronen und das β -Spektrum im magnetischen Linsenspektrographen gemessen und durch Ausplanimetrieren und Vergleich der beiden Flächen für den Konversionskoeffizienten $\kappa = \frac{N_e}{N_e + N_{\gamma}}$

gefunden $\kappa = (80 \pm 5) \cdot 10^{-2}$. Die Intensität der Konversionslinien wurde dabei auf Rückstreuielektronen im Präparat korrigiert³⁾. Das Verhältnis der Konversion in K - und L -Schale κ_K/κ_L beträgt $1,1 \pm 0,1$. Unsere Werte sind in Übereinstimmung mit den Messungen von LAWSON und CORK¹⁾ ($\kappa = (100 \pm 30) \cdot 10^{-2}$; $\kappa_K/\kappa_L = 1,0 \pm 0,1$).

Das Verhältnis η kann zur Kontrolle auch aus dem Konversionskoeffizienten gebildet werden. In der Tat liefert $\eta = \delta(1 - \kappa)$ dasselbe Resultat.

Da die Intensität der γ -Kaskade sehr gering ist, scheint es uns angezeigt, bei den Absorptionsmessungen die innere und die äussere Bremsstrahlung in Betracht zu ziehen. Durch magnetische Weglenkung der Elektronen haben wir verifiziert, dass bei Verwendung von Kohleabsorbieren zum Wegfiltern der Elektronen die äussere Bremsstrahlung zu vernachlässigen ist. Die Zahl der durch innere Bremsstrahlung beim Indium emittierten γ -Quanten pro β -Teilchen wurde nach den Formeln von KNIPP und UHLENBECK⁴⁾ berechnet. Die Rechnung ergab, dass pro 300 β -Zerfälle 1 Quant im Energieintervall von 100 keV bis zur Grenzenergie des Spektrums emittiert wird. Dies bedeutet, dass auch die innere Bremsstrahlung für unsere Zwecke vernachlässigt werden darf.

Das Vorhandensein von Kern- γ -Strahlung beim In^{114} lässt die Möglichkeit offen, dass das β -Spektrum nicht einfach ist. Da aber im Kurie-plot das β -Spektrum bis etwa 300 keV geradlinig verläuft, wird man eher vermuten, dass die γ -Linien bei einem dualen Zerfall emittiert werden. Zur Prüfung dieser Frage wurde in der Wilsonkammer nach Positronen gesucht*). Es konnten jedoch mit dieser Methode keine gefunden werden. Dagegen zeigen Messungen im Trochoidenspektrographen⁵⁾ nach 4tägiger photographischer Exposition ein Positronenspektrum mit einer Grenzenergie von (650 ± 100) keV. Die Intensität dieses Spektrums ist äusserst gering: die Häufigkeit eines Positrons bezogen auf einen β -Übergang beträgt 10^{-4} . Ob es sich dabei um Zerfallspositronen handelt, kann nicht mit Sicherheit erkannt werden. Die Häufigkeit der durch Paarbildung erzeugten Positronen⁷⁾ dürfte nämlich von nahezu gleicher Grössenordnung sein wie der beobachtete Effekt.

Da diese Zahl der Positronen nicht ausreicht, die gefundene γ -Kaskade einzuordnen, wurde durch folgende Messungen nach einem dualen Zerfall durch K -Einfang gesucht. Die intensive In - K -Strah-

*) Die Wilsonkammeraufnahmen sind von Herrn Hamuda ausgeführt worden, wofür wir ihm bestens danken.

lung, welche als Folge des hochkonvertierten 192 keV-Überganges auftritt, erschwert den Nachweis einer etwa 30mal schwächeren Cd-K-Strahlung durch Absorptionsmessung. Man findet nämlich bei Absorption der Röntgenstrahlung mit Hilfe von kritischen Absorbern nur das Vorherrschen einer In-K-Strahlung. Dagegen zeigen Absorptionsmessungen der Koinzidenzen zwischen den Röntgenstrahlen und den energiereichen γ -Strahlen die Anwesenheit einer Cd-K-Strahlung. Die folgende Tabelle zeigt, dass bei Verwendung von Ag, Rh, Ru und Mo als kritische Absorber der experimentell bestimmte Absorptionskoeffizient $\frac{\mu}{\rho}$ für die Einzelstösse

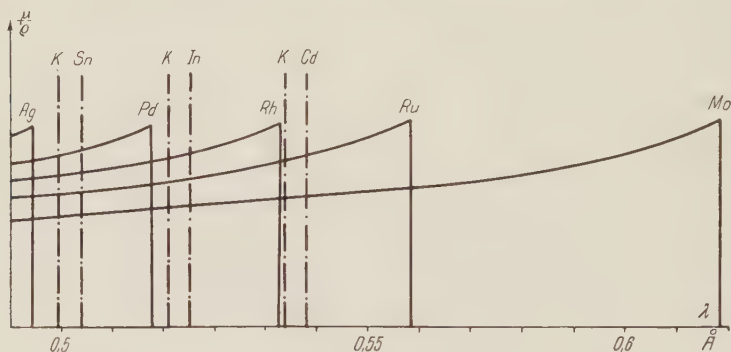


Fig. 5.

Skizze zur kritischen Absorption der Cd- und In-K-Strahlung.

im Röntgenzählrohr zwischen den Rhodium- und den Silber- K_{α} -Linien eine Kante aufweist, für die Koinzidenzen dagegen zwischen den Rhodium und den Ruthenium K_{α} -Linien eine Sprungstelle zeigt. Aus Fig. 5 erkennt man, dass es sich im ersten Fall um eine In-K-Strahlung handelt, die in Koinzidenz auftretende Röntgenstrahlung dagegen Cd-K-Strahlung darstellt.

Absorber 40 mg/cm ²	μ/ρ experimentell		μ/ρ berechnet für	
	Einzelstösse	Koinzidenzen	In	Cd
Ag	15	17	11	11
Rh	38	13	60	9
Ru	45	38	58	58
Mo	46	40	55	55

Die beiden Niveaux, von denen die Kern- γ -Strahlung ausgeht, gehören also zum Cd¹¹⁴-Kern.

Zerfallschema und Diskussion.

Nach unseren Messungen muss das Zerfallschema von In^{114} folgendermassen dargestellt werden (Fig. 6).

Aus dem Konversionsverhältnis zwischen K - und L -Schale $\kappa_K/\kappa_L = 1,1$ sowie aus dem Konversionskoeffizienten für die K -Schale $\kappa_K = N_{eK}/(N_{eK} + N_{\gamma}) = (71 \pm 5) \cdot 10^{-2}$ kann geschlossen werden, dass der Strahlungscharakter des isomeren Überganges derjenige eines 2^4 -Poles ist⁶⁾.

Die Reihenfolge der beiden energiereichen γ -Strahlen ist in Fig. 6 willkürlich eingezeichnet. Es kann auch nicht entschieden

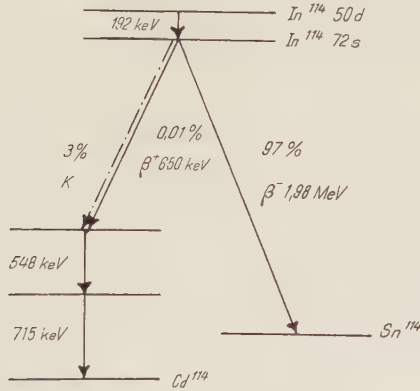


Fig. 6.

werden, ob jeder Zerfall über das Niveau von 1263 keV Anregungsenergie führt.

Dem Termschema der Fig. 6 liegt die Annahme zugrunde, dass es sich bei den beobachteten Positronen um Zerfallspositronen handelt. Berechnet man aus dem experimentell ermittelten Verzweigungsverhältnis des dualen Zerfalls $f_{\beta^+}/f_{\beta^-} = 10^{-4}$ die Grenzenenergie des Positronenspektrums nach der β -Theorie⁸⁾, so erhält man bei Annahme eines erlaubten Überganges einen Wert von zirka 500 keV. (Für ein einfach verbotenes Spektrum findet man eine Grenzenenergie von zirka 1000 keV.) Das β^+/K -Verhältnis errechnet sich für 500 keV und für einen erlaubten Übergang zu $f_{\beta^+}/f_K \simeq 0,6 \cdot 10^{-2}$. Für das K/β^- -Verhältnis findet man $f_K/f_{\beta^-} \simeq 2 \cdot 10^{-2}$. Dieses Resultat stimmt innerhalb der Fehlergrenze mit dem gemessenen K/β^- -Verhältnis überein. Der zum β^- -Spektrum duale Übergang ist danach ein erlaubter Übergang mit einer Zerfallsenergie $W_0 + mc^2 + W_{\gamma} = 1,6 \text{ MeV} + 1,3 \text{ MeV} = 2,9 \text{ MeV}$.

Herrn Prof. Dr. Scherrer danken wir für das Interesse an dieser Arbeit. Den Herren J. P. Blaser und P. Marmier sind wir für Mithilfe bei den Messungen und für viele wertvolle Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Literatur.

- ¹⁾ LAWSON und CORK, Phys. Rev. **57**, 982 (1940).
 - ²⁾ JACOBI, H. P. A. **22**, 66 (1949).
 - ³⁾ EKLUND, Ark. Mat. Astr. Fysik, **33**, A (1946).
 - ⁴⁾ KNIPP und UHLENBECK, Physica III, 434 (1936).
 - ⁵⁾ THIBAUD, Quelques Techniques Actuelles en Physique Nucléaire, Paris 1938.
 - ⁶⁾ ROSE et al., Private Mitteilung.
 - ⁷⁾ SIEGBAHN und SLÄTIS, Ark. Mat. Astr. Fysik, **34** A (1946).
 - ⁸⁾ KONOPINSKI, Rev. mod. Phys. **15**, 209 (1943).
-

On the elastic scattering of neutrons by deuterons

by Mario Verde

Swiss Federal Institute of Technology.

(March 18, 1949.)

Introduction.

The knowledge of the interaction potential between two nucleons is of fundamental importance in nuclear physics, and every experimental result giving a clue to it is of great interest.

Especially important are the collision experiments which concern two nucleons and those concerning the bound states of the deuteron. These serve most directly to limit the theoretical possibilities for the nucleon-nucleon potential, because the processes involving more than two nucleons are so difficult from the mathematical point of view, that one is forced to make use of simplifications which are perhaps not fully justified. The difficulties involved in connection with the so called "many body forces" are also avoided by dealing with only two-nucleon systems.

The charge independence and short range of the nuclear forces are now rather well established facts. On the other hand, the so called "exchange" character of the forces remains (apart from preliminary experiments on proton-proton scattering) an open question.

The potential (between two nucleons, 2 and 3) may be either of the form

$$-U_{23} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} g \right) + \frac{1}{2} g (\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(3)}) \right\} \quad (1)$$

which is suggested by neutral meson theory, or

$$+ \frac{1}{3} U_{23} (\boldsymbol{\tau}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(3)}) \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} g \right) + \frac{1}{2} g (\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(3)}) \right\} \quad (2)$$

which is suggested by the symmetrical meson theory.

The two body scattering experiments have not yet been able to distinguish definitely between these two possibilities. One reason for this is that when the *P*-wave scattering becomes important the above static forces are no longer permissible. The proton-deuteron

(P-D) or the neutron-deuteron (N-D) scattering on the other hand, is suitable to this purpose because the large size of the deuteron gives an appreciable P-wave scattering for relatively small energies (a few MeV). The experimental curves for the angular dependence of the P-D scattering for proton energies from 1.5 to 3.5 MeV¹) and for the N-D scattering for a neutron energy of 2.5 MeV²), have in common a strong maximum at 180° in the center of mass system. This maximum becomes more pronounced with increasing P. energy.

An adequate theory must be able to furnish on the basis of these experimental results arguments for one of the two potentials given above¹⁰).

The purpose of this paper is to present a theory of the N-D scattering. The three main results are:

1. Rigorous treatment of spin and isotopic spin.
2. The generalization of the well known integral form for the scattering phases for the case of three particles.
3. The extension of the variational method for the calculation of these phases, which has already been successfully applied by HULTHÉN³) for the two-body problem.

Inspection of these exact integral formulae allows one to draw conclusions about the exchange nature of the forces.

A detailed comparison with experiment is unfortunately not possible because the experimental results on N-D scattering are rather poor. On the other hand those for P-D scattering are excellent, and a theoretical investigation of this more complicated problem is now under way.

I. Interaction and equations of motion.

Our considerations apply to any potential between two bodies 2 and 3 which have the form

$$V_{23} = U_{23} \cdot \{w \cdot + b(23)_\sigma + h(23)_\tau + m(23)_{\sigma\tau}\} \quad (3)$$

where w, b, h, m are constants. (23) is the permutation of the spacial coordinates of 2 and 3 and $(23)_\sigma$ is the permutation of coordinates of spin, $(23)_\tau$ that of isotopic spin and $(23)_{\sigma\tau}$ is simultaneously the permutation of the spin and isotopic spin of the particles 2 and 3. U_{23} depends only on the distance between 2 and 3.

Since

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(3)}) = 2(23)_\sigma - 1 \quad (\boldsymbol{\tau}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(3)}) = 2 \cdot (23)_\tau - 1$$

the two interactions 1) and 2) are particular cases of this type.

In the three body problem an important part is played by the symmetry operators T^s , T' , T'' which are defined as follows

$$\left. \begin{aligned} T^s &= (23) + (13) + (12) \\ T' &= \frac{\sqrt{3}}{2} \{ (13) - (12) \} \\ T'' &= - (23) + \frac{1}{2} \{ (13) + (12) \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

These operators can operate on a single species of coordinates, i. e. on the spacial, spin or isotopic spin coordinates, or act at the same time at both spin and isotopic spin coordinates. This will be indicated by a subscript, as already used in (3) for the simple permutation.

Applied to a function symmetric in the coordinates of 2 and 3, these three operators generate three functions, the first of which is completely symmetrical in the coordinates of 1, 2, 3, while the other two functions transform by permutation of two of the coordinates, 1, 2, 3, according to the two-dimensional unitary representation D.

$$(12) = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \end{pmatrix} \quad (23) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \quad (13) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \end{pmatrix}$$

Thus for example, if one operates on the spacial potential U_{23} , the three following potentials are obtained

$$\left. \begin{aligned} U^s &= T^s U_{23} = U_{23} + U_{21} + U_{13} \\ U' &= T' U_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2} (U_{21} - U_{13}) \\ U'' &= T'' U_{23} = -U_{23} + \frac{1}{2} (U_{21} + U_{13}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

of these U^s is completely symmetrical in 1, 2, 3 and U' , U'' transform according to the representation D. In particular U' is antisymmetrical in 2, 3, while U'' is symmetrical. If the distance of particle 1 to particles 2 and 3 increases, the potential U' goes rapidly to zero, whereas U'' reduces to $-U_{23}$. It may be readily proved that the potentials U^s , U' , U'' are mutually orthogonal, i. e.

$$\int U^s \cdot U' dv - \int U^s \cdot U'' dv - \int U' \cdot U'' dv = 0$$

where $dv = d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3$ is the volume element in the space of the nucleon coordinates \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 . The integrals are extended over all space.

Assuming the additivity of the potentials, the total interaction of the three bodies may now be written:

$$W = U^s O^s + U' O' + U'' O'' \quad (6)$$

where the operators O operate on the spin and isotopic spin coordinates only and are defined as follows

$$\left. \begin{aligned} O^s &= -\frac{1}{3} (bT_{\sigma}^s + hT_{\tau}^s + mT_{\sigma\tau}^s) + w \\ O' &= -\frac{2}{3} (bT_{\sigma}^{\prime} + hT_{\tau}^{\prime} + mT_{\sigma\tau}^{\prime}) \\ O'' &= +\frac{2}{3} (bT_{\sigma}^{\prime\prime} + hT_{\tau}^{\prime\prime} + mT_{\sigma\tau}^{\prime\prime}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Three body potentials, i. e. potentials depending simultaneously on the coordinates of the three nucleons, the existence of which is as yet not established, could be treated by the formalism just described; one would have only to change the significance of U^s , U' and U'' .

The next step is to find in the spin and isotopic spin space a basis in which the operators O are represented by irreducible matrices.

Both spin and isotopic spin of the nucleons have the values $1/2$. Hence the total spin S and the total isotopic spin T of three nucleons can assume the values $3/2$ and $1/2$. Four eigenfunctions χ^s belong to $S = 3/2$ and to $S = 1/2$ another four eigenfunctions, namely two pairs (χ'_+, χ''_+) and (χ'_-, χ''_-) , each of which can be chosen in such a way that as to transform by permutations according to the representation D .

To obtain for instance the pair (χ'_+, χ''_+) which corresponds to $S_z = 1/2$, one has to operate with T'_{σ} and T''_{σ} on the symmetrical spin eigenfunction

$$\chi_{23} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) \cdot \alpha_1$$

where

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z^{(1)} \alpha_1 &= \alpha_1 \\ \sigma_z^{(1)} \beta_1 &= -\beta_1 \end{aligned} \right.$$

The same applies for the isotopic spin eigenfunctions. To the total isotopic spin $T = 3/2$ belong four symmetrical eigenfunctions ζ^s , and to the spin $T = 1/2$ the two pairs (ζ'_+, ζ''_+) and (ζ'_-, ζ''_-) , which may be obtained in the same way as the corresponding spin eigenfunctions.

The functions $\chi^s, (\chi', \chi''); \zeta^s, (\zeta', \zeta'')$ are mutually orthogonal and normalized. In the product space of spin and charge (for $S = T = 1/2$), the direct product representation $D \times D$ decomposes into a sum of three representations^{4) 5)}, viz.

$$D \times D = I + A + D$$

a completely symmetrical one I , a completely antisymmetrical one A , and a two-dimensional one D . Therefore, one can choose in the product space of spin and charge, for $S = T = 1/2$, the basis

$$\begin{aligned} \xi^s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\chi' \zeta' + \chi'' \zeta''), & \xi^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta'' - \chi'' \zeta'), \\ \xi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta'' + \chi'' \zeta'), & \xi'' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta' - \chi'' \zeta'') \end{aligned}$$

of which the ξ'_s are orthogonal eigenfunctions normalized to unity. The latter transform under permutation of the variables according to the corresponding representation I , A , and D .

As the interaction W is an invariant with respect to rotation in spin and isotopic spin space, the total spin and the total isotopic spin are constants of motion. Only the case in which the isotopic spin $T = 1, 2$ has to be taken into account for N - D scattering, because the deuteron is antisymmetrical in the charge in its ground state. The isotopic spin eigenfunctions are therefore

$$\begin{aligned} \zeta'_- &= T'_\tau \cdot \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} (b_2 a_3 + a_2 b_3) a_1 \right\} \\ \zeta''_- &= T''_\tau \cdot \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} (b_2 a_3 + b_3 a_2) a_1 \right\} \end{aligned} \quad \text{where} \quad \begin{cases} \tau_z^{(1)} a_1 = a_1 \\ \tau_z^{(1)} b_1 = -b_1 \end{cases}$$

They correspond to a total charge

$$\varepsilon = e \cdot \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sum \tau_z \right]$$

equal to e .

Hence, the total eigenfunction may be written as follows

$$\left. \begin{aligned} \text{for } S = \frac{3}{2} \quad & \psi = (\psi' \zeta'' - \psi'' \zeta') \cdot \chi^s \\ \text{for } S = \frac{1}{2} \quad & \psi = \psi^a \xi^s - \psi^s \xi^a + \psi' \xi'' - \psi'' \xi' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$(\psi' \cdot \psi'')$ and (ψ^s, ψ^a) depend on the spacial coordinates only. To satisfy the PAULI principle, ψ^s must be totally symmetrical, ψ^a totally antisymmetrical and finally (ψ', ψ'') must transform according

to the D representation. We notice, in particular, that ψ' is anti-symmetrical in 2 and 3, while ψ'' is symmetrical in these coordinates.

The operators T' , T'' are represented in the space of $(\chi^s \zeta', \chi^s \zeta'')$ by

$$\left. \begin{aligned} T_{\sigma}^s &= 3 & T_{\tau}^s &= 0 & T_{\sigma\tau}^s &= 0 \\ T'_{\sigma} &= 0 & T'_{\tau} &= -\frac{3}{2} \sigma_1 & T'_{\sigma\tau} &= -\frac{3}{2} \sigma_1 \\ T''_{\sigma} &= 0 & T''_{\tau} &= \frac{3}{2} \sigma_3 & T''_{\sigma\tau} &= \frac{3}{2} \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ are the usual two-dimensional PAULI matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In the product space of the ξ 's one has

$$\left. \begin{aligned} T_{\sigma}^s &= 0 & T_{\tau}^s &= 0 & T_{\sigma\tau}^s &= 3 \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T'_{\sigma} &= -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} & T'_{\tau} &= -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & T'_{\sigma\tau} &= -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \\ T''_{\sigma} &= +\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} & T''_{\tau} &= +\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & T''_{\sigma\tau} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

these matrices having four rows and columns. The operators T form, for three-body problems, a most natural generalization of the usual exchange operators.

For the operators O defined by (7) one has for $S = 3/2$

$$\left. \begin{aligned} O^s &= w + b \\ O' &= (h + m) \cdot \sigma_1 \\ O'' &= (h + m) \cdot \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

for $S = 1/2$

$$O^s = w + \begin{pmatrix} m\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O' = \begin{pmatrix} 0 & h + b\sigma_3 \\ h + b\sigma_3 & m\sigma_1 \end{pmatrix} \quad O'' = \begin{pmatrix} 0 & b\sigma_1 + i h \sigma_2 \\ b\sigma_1 - i h \sigma_2 & m\sigma_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

In the SCHROEDINGER equation of our problem

$$(E - T) \psi = W \psi$$

E is the total energy, equal to the sum

$$E = E_k - E_d$$

where E_k is the kinetic energy of the impinging neutron and $-E_d = -2.19$ MeV the binding energy of the deuteron; T the operator for the total kinetic energy, viz:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = -\frac{\hbar^2}{2M} \cdot (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$$

We have chosen as spacial coordinates those generated by operating with the usual symmetry-operators T on one of the nucleon radius vector, e. g. \vec{r}_1

$$\left. \begin{aligned} \vec{q}^s &= \frac{1}{3} T^s \vec{r}_1 = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \\ \vec{r} &= T^s \vec{r}_1 = \frac{1}{2} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \\ \vec{q} &= T^s \vec{r}_1 = -\vec{r}_1 + \frac{1}{2} (\vec{r}_3 + \vec{r}_2) \end{aligned} \right\}$$

\vec{q}^s is the center of mass (C. M.) coordinate, \vec{r} is proportional to the distance of 2 from 3, and \vec{q} is the distance of nucleon 1 from the C. M. of 2 and 3. Any pair of components of the two vectors \vec{r} and \vec{q} transforms according to D . The volume element $d\tau = d^3 r \cdot d^3 q$ is invariant with respect to permutation of 1, 2, 3. In this coordinate system, the kinetic energy has the form

$$T = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{qs} - \frac{3\hbar^2}{4M} (\Delta_r + \Delta_q)$$

In the C. M. system, which moves with respect to the rest system with a kinetic energy $E_s = \frac{1}{3} E_k$, putting

$$k^2 = \frac{8}{9} \frac{M}{\hbar^2} E_k \quad k_d^2 = \frac{4}{3} \frac{M}{\hbar^2} E_d$$

the SCHROEDINGER equation reads:

$$(\Delta_r + \Delta_q + k^2 - k_d^2) \psi = \frac{4}{3} \frac{M}{\hbar^2} (U^s O^s + U' O' + U'' O'') \psi \quad (13)$$

Eliminating the spin and isotopic spin coordinates, by means of (11) and (12) one obtains the following systems of differential equations for the spacial wave functions:

$$\text{for } S = \frac{3}{2} \quad \left. \begin{aligned} \mathfrak{T} \psi' &= (w+b) U^s \psi' - (h+m) \cdot (U' \psi'' + U'' \psi') \\ \mathfrak{T} \psi'' &= (w+b) U^s \psi'' - (h+m) \cdot (U' \psi' - U'' \psi'') \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\text{for } S = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{T} \psi^a &= (w+m) U^s \psi^a - (b+h) (U' \psi'' - U'' \psi') \\ \mathfrak{T} \psi^s &= (w-m) U^s \psi^s + (b-h) (U'' \psi'' - U' \psi') \\ \mathfrak{T} \psi' &= (b+h) U'' \psi^a + (b-h) U' \psi^s - m(U' \psi'' + U'' \psi') + w U^s \psi' \\ \mathfrak{T} \psi'' &= -(b+h) U' \psi^a + (b-h) U'' \psi^s + m(U'' \psi'' - U' \psi') - w U^s \psi'' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

From now on all the potentials are understood to be multiplied by $\frac{4}{3} \frac{M}{\hbar^2}$ and \mathfrak{T} stands for the operator

$$\mathfrak{T} = \Delta_r + \Delta_q + k^2 - k_d^2 \quad (16)$$

In our coordinate system the total angular momentum is given by

$$\frac{\hbar}{i} \Sigma [\vec{r}_\pi \cdot \vec{\nabla}_{r_\pi}] = \frac{\hbar}{i} \{ [\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r] + [\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_q] \}.$$

This operator commutes with \mathfrak{T} . As further the potentials U belong to a total angular momentum zero, any one of the equations forming the systems admits the group of the rotations in the space of \vec{r} and \vec{q} . Every component ψ belong therefore to a given total angular momentum.

For our collision problem one must now satisfy the following requirements:

a) for $S = 3/2$, a solution ψ' , ψ'' of the system (14) must be found such that ψ' go rapidly to zero as nucleon 1 leaves the ranges of interaction of 2 and 3, while ψ'' has for large q 's the following asymptotic behaviour

$$\psi'' \simeq \varphi(r) \left(e^{ikq \cos \vartheta} + f^{(3/2)}(\vartheta) \frac{e^{ikq}}{q} \right) \quad (17)$$

$\varphi(r)$ is the eigenfunction of the deuteron in the ground state and ϑ is the angle by which the impinging neutron is scattered.

b) for $S = 1/2$ a solution ψ^s , ψ^a , ψ' , ψ'' of the system (15) must be found such that (ψ^a, ψ') go to zero for large q 's, and ψ^s , ψ'' behave asymptotically as follows

$$\left. \begin{aligned} \psi^s &\simeq + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(r) \left(e^{ikq \cos \vartheta} + f^{(1/2)}(\vartheta) \frac{e^{ikq}}{q} \right) \\ \psi'' &\simeq - \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(r) \cdot \left(e^{ikq \cos \vartheta} + f^{(1/2)}(\vartheta) \frac{e^{ikq}}{q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

In fact the deuteron must be left, once the neutron is elastically scattered, in its ground state. This corresponds to the spin and isotopic spin eigenfunction

$$\chi'' \zeta' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi' - \xi^a)$$

For evaluating the total cross-section $\sigma(\vartheta)$ one needs only to know the functions $f^{(3/2)}(\vartheta)$, $f^{(1/2)}(\vartheta)$ being

$$\sigma(\vartheta) = \frac{2}{3} |f^{(3/2)}(\vartheta)|^2 + \frac{1}{3} |f^{(1/2)}(\vartheta)|^2 \quad (19)$$

II. Integral relation for the determination of the phases.

The equation of motion, written in the form (14), (15) makes it possible to generalize, for the three-body case, well known integral relations⁶⁾ which gives the phases of the scattered waves in two-body problems.

Let us put

$$I_l^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2kq}} J_{l+1/2}(kq), \quad I_l^- = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi}{2kq}} J_{-l-1/2}(kq)$$

where $J_{l+1/2}(kq)$ and $J_{-l-1/2}(kq)$ are Bessel functions of order $l+1/2$ and $-l-1/2$ respectively. One has then for large q 's

$$I_l^+ \simeq \frac{\sin(kq - l\pi/2)}{kq}, \quad I_l^- \simeq \frac{\cos(kq - l\pi/2)}{kq}$$

By a known property of these functions, one has furthermore

$$I_l^- \frac{\partial I_l^+}{\partial q} - I_l^+ \frac{\partial I_l^-}{\partial q} = \frac{1}{kq^2} \quad (20)$$

Calling φ_l^+ , φ_l^- the two functions defined as follows

$$\left. \begin{aligned} \varphi_l^+(r, q) &= \varphi(r) \cdot i^l (2l+1) e^{i\delta_l} & I_l^+(kq) \cdot P_l(\cos \vartheta_q) \\ \varphi_l^-(r, q) &= \varphi(r) \cdot i^l (2l+1) e^{i\delta_l} & I_l^-(kq) \cdot P_l(\cos \vartheta_q) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

where $\vec{q} \cdot \vec{k} = q \cdot k \cos \vartheta_q$ and P_l is the Legendre polynomial of order l . Denoting by Ω the operator

$$\Omega = \mathfrak{T} + U_{23} = \Delta_r + \Delta_a + k^2 - k_a^2 + U_{23}$$

one has

$$\left. \begin{aligned} \Omega \varphi_l^+ &= 0 \\ \Omega \varphi_l^- &= 0 \end{aligned} \right\}$$

We shall now prove that the following formula

$$\sin \delta_l = \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \int \varphi_l^+ * \Omega \psi d\tau \quad (22)$$

applies to any function which is regular over all space and which behaves asymptotically with respect to q

$$\psi \simeq -(\varphi_l^+ \cos \delta_l + \varphi_l^- \sin \delta_l)$$

In order to show this, let us integrate, in the space of \vec{r} and \vec{q} , the following identity:

$$\begin{aligned} \varphi_l^+ * \Omega \psi - \psi \Omega \varphi_l^+ &= \varphi_l^+ * (\Delta_r + \Delta_a) \psi - \psi (\Delta_r + \Delta_a) \varphi_l^+ = \\ &= \text{Div}_r (\varphi_l^+ * \nabla_r \psi - \psi \nabla_r \varphi_l^+) + \text{Div}_a (\varphi_l^+ * \nabla_a \psi - \psi \nabla_a \varphi_l^+) \end{aligned}$$

taking into account that φ_l^+ and $V_r \varphi_l^-$ go for large \tilde{r} rapidly enough to zero and making use of the relation (20); $\varphi(r)$ is understood to be normalized as follows

$$\int |\varphi(r)|^2 d^3r = 1 \quad (23)$$

Starting from the identity

$$\varphi_l^{-*} \Omega \psi - \psi \Omega \varphi_l^{-*} = \text{Div}_r (\varphi_l^{-*} V_r \psi - \psi V_r \varphi_l^{-*}) + \\ \text{Div}_q (\varphi_l^{-*} V_q \psi - \psi V_q \varphi_l^{-*})$$

we obtain in analogous way a similar relation for the cos of the phases:

$$(\omega_l - 1) \cos \delta_l = \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \int (\varphi_l^{-*} \Omega \psi - \psi \Omega \varphi_l^{-*}) d\tau \quad (24)$$

where ω_l is a constant as defined by

$$\omega_l = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \int \left(\varphi_l^{-*} \frac{\partial \psi}{\partial q} - \psi \frac{\partial \varphi_l^{-*}}{\partial q} \right) d^3r d\omega_q \cdot q^2 \quad (25)$$

This constant is finite only if ψ vanishes rapidly enough for small values of q . $\varphi(r)$ is here again supposed to be normalized according to (23). We can now apply the integral relation (22) and (24) to the particular case of a solution of the systems of differential equations (14), (15) discussed in the preceding section, as these solutions are of the required form. These systems of equations yield likewise $\Omega \psi$ as function of the potentials and the same ψ 's.

For $S = 3/2$ it is the function ψ'' corresponding to a given angular momentum which has the right asymptotic behaviour, while in the case of $S = 1/2$, for the same reason, the linear combination

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi'' - \psi^s)$$

must be used. One has
for $S = 3/2$

$$\Omega \psi'' = \left(w + b + \frac{h+m}{2} \right) \bar{U} \psi'' - (h+m) U' \psi' \quad (26)$$

for $S = 1/2$

$$\Omega \psi = \left\{ \left(w + \frac{m}{2} - \frac{b-h}{2} \right) \frac{\psi''}{\sqrt{2}} - \left(w - m - \frac{b-h}{2} \right) \frac{\psi^s}{\sqrt{2}} \right\} \cdot \bar{U} \\ - \left\{ (b-h+m) \frac{\psi'}{\sqrt{2}} + (b+h) \frac{\psi^a}{\sqrt{2}} \right\} U', \quad (26)'$$

where $\bar{U} = U_{13} + U_{23}$

Consequently, the following rigorous integral formulae are obtained for the sines of the phases

$$S = 3/2$$

$$\sin \delta_l = \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \left\{ \left(w + b + \frac{h+m}{2} \right) \int \varphi_l^{+*} \bar{U} \psi'' d\tau - (h+m) \int \varphi_l^{+*} U' \psi' d\tau \right\} \quad (27)$$

$$S = 1/2$$

$$\begin{aligned} \sin \delta_l = & \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(w + \frac{m}{2} - \frac{b-h}{2} \right) \int \varphi_l^{+*} \bar{U} \psi'' d\tau - \right. \\ & \left(w - m - \frac{b-h}{2} \right) \int \varphi_l^{+*} \bar{U} \psi' d\tau - (b-h+m) \int \varphi_l^{+*} U' \psi' d\tau - \\ & \left. (b+h) \int \varphi_l^{+*} U' \psi'' d\tau \right\} \quad (27)' \end{aligned}$$

Analogous formulae for the cosine of the phases are obtained starting from (24) and are omitted here for sake of brevity.

The above integral relations (27), (27)' are very useful, because they permit the calculations of the phases for large energies of the impinging neutrons or whenever the phases are expected to be small. Furthermore, they yields a powerful device for checking the exactness of solutions obtained by approximate methods. One can also obtain with their help, as it will be apparent from a subsequent discussion, a fair general idea of the scattering, the latter depending mainly on the exchange properties of the interaction.

III. The variational method for the evaluation of the phases.

In view of the complexity of our problem, the best means of evaluating the phases at small energies as in the two body problem where the situation is far simpler, is offered by a variational method.

The usual variational principle which is based on the fact that the Hamiltonian is a Hermitian operator, and which has been successfully applied in the two body problem by L. HULTHÉN³⁾, can be generalized for our problem in a quite natural way.

The fact of having put systematically into evidence the symmetry properties of the eigenfunctions and of the potentials brings about considerable simplifications in the calculations and makes a numerical calculation possible. The systems of equations (14), (15) can be rewritten in the form

$$\mathfrak{T} \psi_i = \sum_{\kappa} U_{i\kappa} \psi_{\kappa}$$

in which no distinction appears to exist between the two cases of $S = 3/2$ and $S = 1/2$. This means simply that for $S = 3/2$ one has

two ψ 's, namely ψ' and ψ'' whereas for $S = 1/2$ there are four ψ 's i. e. $\psi^s, \psi^a, \psi', \psi''$. \mathfrak{T} is the symmetrical and Hermitian operator defined by (16) and $U_{i\kappa}$ is a real and symmetrical matrix.

The integral

$$J = \sum_{i\kappa} \int \psi_i^* (\delta_{i\kappa} \mathfrak{T} - U_{i\kappa}) \psi_\kappa d\tau \quad (28)$$

is stationary if ψ_i is a solution of the system (14) or (15) belonging to a given angular momentum and if the variations $\delta\psi_i$ vanish rapidly enough at $\varrho = \infty$ $q = \infty$, which implies that the varied functions have the same asymptotic behaviours. One has indeed

$$\begin{aligned} \delta J &= \sum_{i\kappa} \int \{ \delta\psi_i^* (\delta_{i\kappa} \mathfrak{T} - U_{i\kappa}) \psi_\kappa + \psi_i^* (\delta_{i\kappa} \mathfrak{T} - U_{i\kappa}) \delta\psi_\kappa \} d\tau \\ &= \sum_{i\kappa} \int \delta\psi_i^* (\delta_{i\kappa} \mathfrak{T} - U_{i\kappa}) \psi_\kappa + \delta\psi_i (\delta_{i\kappa} \mathfrak{T} - U_{i\kappa}) \psi_\kappa^* \} d\tau \end{aligned}$$

and if the ψ 's are solution of (14) or (15) i. e.

$$\mathfrak{T} \psi_i - \sum_\kappa U_{i\kappa} \psi_\kappa = 0 \quad \mathfrak{T} \psi_i^* - \sum_\kappa U_{i\kappa} \psi_\kappa^* = 0$$

it follows that

$$\sum \delta\psi_i^* (\mathfrak{T} \psi_i - \sum_\kappa U_{i\kappa} \psi_\kappa) = 0 \quad \sum \delta\psi_i (\mathfrak{T} \psi_i^* - \sum_\kappa U_{i\kappa} \psi_\kappa^*) = 0$$

hence

$$\delta J = 0$$

Conversely if $\delta J = 0$ for any variation $\delta\psi_i$ such that $(\delta\psi_i) = 0$ $q = \infty$ one has

$$\mathfrak{T} \psi_i - \sum U_{i\kappa} \psi_\kappa$$

Though ψ' and ψ'' are not independent functions it follows nevertheless from the relation

$$\int \{ \delta\psi'^* (\mathfrak{T} \psi' - \sum U \psi) + \delta\psi''^* (\mathfrak{T} \psi'' - \sum U \psi) \} d\tau = 0$$

both that $\mathfrak{T} \psi' = \sum U \psi$ and that $\mathfrak{T} \psi'' = \sum U \psi$, because of the equality of the two integrals

$$\int \delta\psi'^* (\mathfrak{T} \psi' - \sum U \psi') d\tau = \int \delta\psi''^* (\mathfrak{T} \psi'' - \sum U \psi'') d\tau \quad (29)$$

This equality follows immediately from the symmetry characteristics of the integrated functions.

Once a trial function is chosen for a particular angular momentum, the choice being such that it belongs to the correct symmetry class,

has the right asymptotic behaviour, and depends from a certain number of variational parameters c_i besides the phase δ_i , one determines the constants c_i and δ_i by means of the equations

$$\left. \begin{aligned} J &= 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

We can now write down explicitly the integrals to be made stationary. In the case $S = 3/2$ we can limit ourselves in view of the identity (29) to the integral

$$J^{(3/2)} = \int \psi_l''^* \{ \mathfrak{T} \psi_l'' - (w + b) U^s \psi_l'' + (h + m) (U' \psi_l' - U'' \psi_l'') \} d\tau \quad (31)$$

and for $S = 1/2$ to the integral:

$$\begin{aligned} J^{(1/2)} &= \int \psi^a{}^* \{ \mathfrak{T} \psi^a - (w + m) U^s \psi^a + 2(b + h) (U' \psi'' - U'' \psi') \} d\tau \\ &+ \int \psi^s{}^* \{ \mathfrak{T} \psi^s - (w - m) U^s \psi^s - (b + h) (U' \psi' + U'' \psi'') \} d\tau \quad (32) \\ &+ 2 \int \psi''^* \{ \mathfrak{T} \psi'' - (b - h) U'' \psi^s + m (U' \psi' - U'' \psi'') - w U^s \psi'' \} d\tau \end{aligned}$$

We shall write also for $S = 3/2$ $\psi_l' = T' \cdot \psi_l$ and $\psi_l'' = T'' \cdot \psi_l$ where ψ_l is a function symmetrical with respect to the permutation of 2 and 3. This way of writing is by no means restrictive; indeed for any two functions ψ' , ψ'' which transform according to D one has

$$\begin{aligned} \psi' &= T' \cdot \left(-\frac{2}{3} \psi'' \right) \\ \psi'' &= T'' \cdot \left(-\frac{2}{3} \psi' \right) \end{aligned}$$

Conversely it is true, as we have mentioned earlier, that an arbitrary function symmetrical in the coordinates of 2 and 3 leads to a pair of functions which transform according to D , when acted upon by the operators T' and T'' .

For the case $S = 3/2$, we can write $J^{(3/2)} = 0$ in the form

$$\int \psi_l''^* \Omega \psi_l d\tau = \left(w + b + \frac{h + m}{2} \right) \int U \psi_l''^* \psi_l d\tau - (h + m) \int U' \psi_l'^* \psi_l \cdot d\tau \quad (33)$$

To this purpose one has to observe that

$$2 \psi_l'' = T^s \cdot \psi_l - 3 \psi_l$$

that $T^s \cdot \psi_l$ is orthogonal to ψ_l'' and finally that the potential U_{23} has been split up. The symbols in (33) have the usual significance. In virtue of analogous considerations, we can write for $S = 1/2$, putting

$$\psi_l^s = T^s \psi_l \quad \Phi_l' = T' \Phi_l \quad \Phi_l'' = T'' \cdot \Phi_l$$

instead of

$$J^{(1/2)} = 0$$

the equality:

$$\begin{aligned} & \int \psi_l^{s*} \Omega \psi_l d\tau - \int \Phi_l''^* \Omega \Phi_l d\tau + \frac{1}{3} \int \psi_l^{a*} \Omega \psi_l^a d\tau = \\ & - \left(w - m - \frac{b-h}{2} \right) \int \psi_l^{s*} \bar{U} \psi_l d\tau - \left(w + m - \frac{b-h}{2} \right) \int \Phi_l''^* \bar{U} \Phi_l d\tau \\ & + (b-h+m) \cdot \int \Phi_l'^* U' \Phi_l d\tau + (b-h) \int (\psi_l - \Phi_l) [U''(\psi_l^s + \Phi_l''^*) \\ & + U' \Phi_l'^*] \cdot d\tau + \frac{1}{3} (w+m) \int U^s |\psi^a|^2 d\tau - \frac{2}{3} (b+h) \int (U' \psi_l'^* \\ & - U'' \psi_l''^*) \psi_l^a d\tau \end{aligned} \quad (33)'$$

IV. The interactions according to neutral and symmetrical theories.

We can use the integral relations (27) and (27)' derived for the phases to get a rigorous integral formula for the total cross-section. To do this one has to use the well-known formula

$$f(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) \frac{\sin \delta_l e^{i\delta_l}}{k} P_l(\cos \vartheta)$$

where $f(\vartheta)$ is the function which appears in (17) or (18).

Considering (22) one has

$$f(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} \varphi(r) \cdot \Omega \psi d\tau$$

$\Omega \psi$ is independent from the azimuthal angle about \vec{k} , \vec{k}' is a vector of intensity k and forming an angle ϑ with \vec{k} . In view of (26) and (26)' one has finally

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot f^{(1/2)}(\vartheta) &= \left(w + b + \frac{h+m}{2} \right) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} \bar{U} \psi'' d\tau - (h+m) \\ &\quad \cdot \int \varphi(r) \cdot e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U' \psi' d\tau \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot \sqrt{2} \cdot f^{(1/2)}(\vartheta) &= \left(w - \frac{m}{2} - \frac{b-h}{2} \right) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} \bar{U} \psi'' d\tau \\ &\quad - \left(w - m - \frac{b-h}{2} \right) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U \psi^s d\tau \\ &\quad - (b-h+m) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U' \psi' d\tau + (b+h) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U' \psi^a d\tau \end{aligned} \quad (34')$$

These formulae become in the particular cases of a symmetrical or neutral interaction, as respectively given by (1) and (2).

Symmetrical theory

$$\left. \begin{aligned} f^{(3/2)}(\vartheta) &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U' \psi' d\tau \\ f^{(1/2)}(\vartheta) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} g \cdot \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} \bar{U} (\psi'' + \psi^s) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left(g - \frac{2}{3} \right) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} (\psi' - \psi^a) U' d\tau \right\} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Neutral theory

$$\left. \begin{aligned} f^{(3/2)}(\vartheta) &= -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} \cdot \varphi(r) U' \psi'' d\tau \\ f^{(1/2)}(\vartheta) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{3}{2} g - 1 \right) \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U (\psi'' - \psi^s) d\tau \right. \\ &\quad \left. + g \cdot \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U'' (\psi' + \psi^a) d\tau \right\} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

It is a quite noteworthy fact that for $S = 3/2$ the scattering by interactions of the symmetrical type results from the eigenfunction ψ' only, whereas with neutral interactions it comes from the eigenfunction ψ'' alone.

ψ' is antisymmetrical in the coordinates of the nucleons 2 and 3 and this implies necessarily an exchange of the impinging neutron with one of the nucleons of the initial deuteron. As a consequence of the conservation of momentum which is particularly apparent in the momentum space of \vec{r} and \vec{q} , especially at high energies, the neutron will preferentially scattered backwards.

ψ'' is symmetrical in the coordinates of 2 and 3, reduces to the deuteron eigenfunction times a plane wave when the neutron 1 is at large distances from the deuteron 2, 3; in this case a scattering without exchange is also allowed, becoming preponderant at higher energies and giving an important contribution to forward scattering. For $S = 1/2$ one can follow an analogous argument. Assuming symmetrical theories, there is now a wave $\psi'' + \psi^s$ which appears in the first integral and vanishes rapidly at large distances from 1 to 2 and 3, by interference (Cfr. 18) whereas in the case of neutral theories there appears on the contrary a wave $\psi'' - \psi^s$ which obviously does not cancel out. This fact accounts again for a preferential scattering in the forward direction.

The eigenfunction ψ^a which is antisymmetrical in all three nuclear coordinates implies a strong polarisation of the initial deuteron and should be of importance at very low energies only. The variational

formulae for calculating the phases individually (35) and (33)' have a structure similar to that of the formulae just discussed, inasmuch as the same constants appear as factors of the various integrals, our arguments should have an even more general significance. It is owing to this feature that the N-D scattering becomes particularly interesting.

The formulae (27) and (27)' for evaluating the phases read for the particular cases of symmetrical and neutral theories as follows

$$\begin{aligned} S = 3/2 \quad \sin \delta_l &= -\frac{2}{3} \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \int \varphi_l^{+*} U' \psi'_l d\tau \\ S = 1/2 \quad \sin \delta_l &= -\frac{k}{4\pi} \frac{1}{2l+1} \cdot \int \varphi_l^{+*} \bar{U} \psi''_l d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

Neutral theory

$$\begin{aligned} S = 3/2 \quad \sin \delta_l &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \left\{ \frac{1}{2} g \cdot \int \varphi_l^{+*} \bar{U} (\psi''_l + \psi^s_l) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left(g - \frac{2}{3}\right) \cdot \int \varphi_l^{+*} U' (\psi'_l - \psi^a_l) d\tau \right\} \\ S = 1/2 \quad \sin \delta_l &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{1}{2l+1} \cdot \left\{ \left(\frac{3}{2} g - 1\right) \int \varphi_l^{+*} \bar{U} (\psi'' - \psi^s) d\tau \right. \\ &\quad \left. + g \int \varphi_l^{+*} U' (\psi'_l + \psi^a_l) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

V. Preliminary numerical calculations.

In analogy to the two-body problem the evaluation of the phases is quite simple if one can make use of the unperturbed solution in the formulae (37) and (38). This may be certainly be done for small phases. For small energies the phases corresponding to higher orbital momenta and for high energies all the phases are small. For neutrons of 2.5 MeV for instance the phase δ_1 can be calculated in this way without introducing an appreciable error.

Putting

$$\psi(r, q) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} \cdot \varphi(r)$$

one can write in this case for $S = 3/2$

$$\psi' = T' \cdot \psi; \quad \psi'' = T'' \cdot \psi$$

and for $S = 1/2$

$$\psi^s = T^s \cdot \psi \quad \psi' = T' \cdot \psi \quad \psi'' = T'' \cdot \psi \quad \psi^a = 0$$

Denoting by J_1, J_2, J_3 the integrals

$$J_1 = \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U_{13} \cdot \psi d\tau,$$

$$J_2 = \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U_{23} \cdot (23) \psi d\tau; J_3 = \int \varphi(r) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{q}} U_{13} (13) \psi d\tau$$

(37) and (38) can be written in the following form

Symmetrical theories

$$f^{(3/2)}(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} (J_3 - J_2)$$

$$f^{(1/2)}(\vartheta) = \frac{1}{8\pi} \cdot (J_2 + (3g - 1) J_3) \quad (39)$$

Neutral theories*)

$$f^{(3/2)}(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \cdot (2J_1 - J_2 - J_3)$$

$$f^{(1/2)}(\vartheta) = \frac{1}{8\pi} \cdot (2(2 - 3g) J_1 + J_2 + (1 - 3g) J_3) \quad (39)'$$

The integration to be carried out are straightforward if one chooses Gaussian functions both for the potentials and for the eigenfunction of the ground state of the deuteron, as has been already done by various authors⁷⁾⁸⁾.

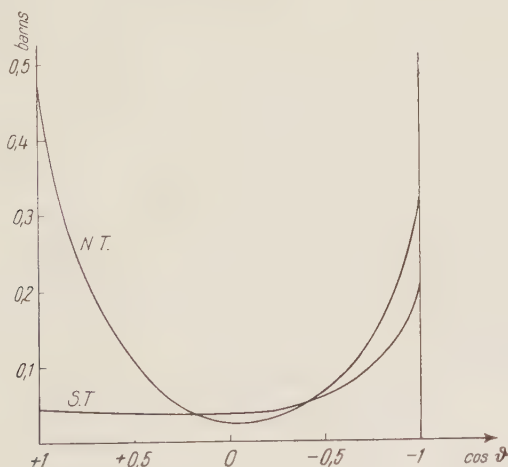


Fig. 1.

Angular dependence in the C. M. system of the scattering of 20 MeV neutrons by deuterons. The upper curve refers to neutral (N.T.) and the lower one to symmetrical theories (S.T.). The ordinates are in barns (10^{-24} cm²). The total cross-section is 1.54 barns for N.T. and 0.71 barns for S.T.

*) These formulae have been given also by T. Y. WU and J. ASHKIN⁷⁾. This is not the case for the symmetrical theories, because these authors have failed to use rigorously the isotopic spin formalism.

For the case of neutrons of 20 MeV, where this approximation is expected to be a good one, the neutral and the symmetrical theories lead to the two curves shown in fig. 1.

The numerical constants which we have adopted are

$$\kappa^{-1} = 1.9 \times 10^{-13} \text{ cm. (range of the forces)}$$

$$\kappa^{-2} U_{23} = 5.22 e^{-\kappa^2 r_3 - r_2^2}$$

and this corresponds to a potential of 45 MeV for the deuteron in the 3S state.

$$\varphi(r) = \left(\mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{3/2} e^{-\mu^2 r^2}$$

The constant $\mu^2 = 0.347 \kappa^2$ is determined by minimizing the energy of the deuteron in the ground state. With these values one has

$$\kappa J_1 = 29.0 e^{-0.74 k^2 (1 - \cos \theta)}; \quad \kappa J_2 = 58.0 e^{-k^2 (1.45 + 1.16 \cos \theta)};$$

$$\kappa J_3 = 24.2 e^{-k^2 (0.49 + 0.0085 \cos \theta)}$$

A pronounced maximum only at 180° is a characteristic feature of the symmetrical theories and is also produced at smaller energies. Therefore the results of BUCKINGHAM and MASSEY⁹), who find for neutrons of 11.5 MeV a pronounced maximum only in the forward direction for symmetrical as well as for neutral theories, are hard to reconcile with the considerations made above.

Our curves have been calculated using values of $g = 0.2$ (N.T.) and $g = 1.4$ (S.T.) which accounts for the energy difference between the two S states of the deuteron, a ratio of 0.6 of the potential in the 3S state to that in the 1S state being assumed. On the other hand, in doing this one ignores the tensor force, which is predominantly responsible in the symmetrical theories for the difference between the 3S and the 1S levels.

Using $g = 0.1$ the angular dependence of the scatterings (S.T.) is still of the same type, but the total cross-section is lowered from 0.71 barns (corresponding to $g = 1.4$) to 0.2 barns.

In conclusion we wish to indicate in detail the formulae by which the phases can be evaluated using the variational method.

In the case $S = 3/2$, we may, putting

$$\psi_l = \varphi_l^+ G_l^+ \cos \delta_l + \varphi_l^- G_l^- \sin \delta_l$$

where φ_l^+ , φ_l^- are defined by (21), make use of the ansatz

$$\psi_l' = T' \cdot \psi; \quad \psi_l'' = T'' \cdot \psi_l$$

The functions ψ'_l and ψ''_l have the right symmetry character, belong to an angular momentum $l(l+1)\hbar$ and show an asymptotic behaviour as given by (17). The trial functions G_l^+ and G_l^- must be chosen so as to approach unity rapidly when q goes to infinity. Furthermore q_l^- must also vanish rapidly enough for $q=0$ to make ψ_l finite everywhere. The functions G contain the variational parameters which are determined by means of the equations (30).

For the actual calculation one must evaluate the following five integrals

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \psi_l^* U_{13} \psi_l d\tau & J_2 &= \int \psi_l^* U_{13} (12) \psi_l d\tau & J_3 &= \int \psi_l^* U_{13} (13) \psi_l d\tau \\ J_4 &= \int \psi_2^* \Omega \psi_l d\tau & J_5 &= \int [(12) \psi_l^*] \cdot \Omega \psi_l d\tau \end{aligned} \quad (40)$$

It is useful to transform J_4 in the following manner. As one has

$$\begin{aligned} J_4 &= \cos^2 \delta_l \int (\varphi_l^+ G_l^+)^* \Omega (\varphi_l^+ G_l^+) \cdot d\tau + \\ &- \frac{1}{2} \sin 2\delta_l \int [(\varphi_l^- G_l^-)^* \Omega (\varphi_l^- G_l^-) + (\varphi_l^- G_l^-)^* \Omega (\varphi_l^+ G_l^+)] \cdot d\tau \\ &+ \sin^2 \delta_l \int (\varphi_l^- G_l^-)^* \Omega (\varphi_l^- G_l^-) d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

and the identity

$$\begin{aligned} &(\varphi_l^+ G_l^+)^* \Omega (\varphi_l^- G_l^-) - \\ &(\varphi_l^- G_l^-) \Omega (\varphi_l^+ G_l^+) = (\varphi_l^+ G_l^+)^* (\Delta_r + \Delta_q) (\varphi_l^- G_l^-) - \\ &(\varphi_l^- G_l^-)^* (\Delta_r + \Delta_q) (\varphi_l^+ G_l^+) = \text{Div}_r [(\varphi_l^+ G_l^+)^* \cdot \nabla_r (\varphi_l^- G_l^-) - \\ &(\varphi_l^- G_l^-)^* \nabla_r (\varphi_l^+ G_l^+)] + \text{Div}_q [(\varphi_l^+ G_l^+)^* \nabla_q (\varphi_l^- G_l^-) - \\ &(\varphi_l^- G_l^-)^* \nabla_q (\varphi_l^+ G_l^+)] \end{aligned}$$

one obtains integrating over all space, taking into account (20)

$$\int (\varphi_l^+ G_l^+)^* \Omega (\varphi_l^- G_l^-) d\tau = \int (\varphi_l^- G_l^-)^* \Omega (\varphi_l^+ G_l^+) d\tau - \frac{4\pi}{k} (2l+1).$$

The integral

$$\int (\varphi_l^- G_l^-)^* \Omega (\varphi_l^+ G_l^+) d\tau$$

can be written

$$\begin{aligned} & \int (\varphi_l^- G_l^-)^* \Omega (\varphi_l^+ G_l^+) d\tau = \int (\varphi_l^- G_l^-)^* \varphi_l^+ (\Delta_r + \Delta_q) G_l^+ d\tau \\ & + 2 \int (\varphi_l^- G_l^-)^* \{ \nabla_r \varphi_l^+ \nabla_r G_l^- + \nabla_q \varphi_l^+ \nabla_q G_l^+ \} d\tau = \\ & = \frac{4\pi}{k} (2l+1) \int_0^\infty G_l^-^* \frac{\partial G_l^-}{\partial q} \cdot dq = 4\pi (2l+1) \int_0^\infty I_l^+ (kq) I_l^- (kq) \\ & \cdot \left(\frac{\partial G_l^+}{\partial r} \cdot \frac{\partial G_l^-^*}{\partial r} + \frac{\partial G_l^+}{\partial q} \cdot \frac{\partial G_l^-^*}{\partial q} \right) q^2 dq \end{aligned}$$

One obtains finally using in analogous way Green's theorem for the integrals which appear in (41) as factors of $\cos^2 \delta_l$ and $\sin^2 \delta_l$

$$\begin{aligned} J_4 = & -\cos^2 \delta_l \int |\varphi_l^+|^2 [|\nabla_r G_l^+|^2 + |\nabla_r G_l^-|^2] d\tau \\ & + \frac{4\pi}{k} (2l+1) \sin 2\delta_l \cdot \left\{ \int_0^\infty G_l^-^* \frac{\partial G_l^+}{\partial q} dq \right. \\ & - k \int_0^\infty I_l^+ I_l^- \left(\frac{\partial G_l^+^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial G_l^-}{\partial r} + \frac{\partial G_l^+^*}{\partial q} \cdot \frac{\partial G_l^-}{\partial q} \right) q^2 dq - \frac{1}{2} \Big\} \\ & - \sin^2 \delta_l \cdot \int |\varphi_l^-|^2 [|\nabla_r G_l^-|^2 + |\nabla_r G_l^+|^2] \cdot d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

This form is more appropriate for numerical calculations. For the integral J_5 one can proceed in a similar manner and one finds

$$\begin{aligned} J_5 = & \cos^2 \delta_l \cdot \int (\varphi_l^+ G_l^+)^* [(\Delta_r + \Delta_q) G_l^+ + 2 (\nabla_r \varphi_l^+ \cdot \nabla_r G_l^+ \\ & + \nabla_q \varphi_l^+ \nabla_q G_l^+)] d\tau \\ & + \sin 2\delta_l \cdot \int (\varphi_l^- G_l^-)^* [(\Delta_r + \Delta_q) G_l^+ + 2 (\nabla_r \varphi_l^+ \nabla_r G_l^+ \\ & + \nabla_q \varphi_l^+ \nabla_q G_l^+)] \cdot d\tau \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\delta_l \int (\varphi_l^+ G_l^+)^* (U_{13} - U_{23}) (12) (\varphi_l^- G_l^-) d\tau \\ & + \sin^2 \delta_l \int (\varphi_l^- G_l^-)^* [(\Delta_r + \Delta_q) G_l^- + 2 (\nabla_r \varphi_l^- \cdot \nabla_r G_l^- \\ & + \nabla_q \varphi_l^- \nabla_q G_l^-)] d\tau \end{aligned} \quad (43)$$

Equation (33) is written explicitly
Symmetrical theories

$$J_5 = J_4 + J_2 - J_3 = 0 \quad (44)$$

Neutral theories

$$J_5 - J_4 - 2 J_1 + J_2 + J_3 = 0 \quad (44)'$$

Very great simplifications would result by choosing functions G_l independent of the coordinate r , i. e. disregarding the polarisation of the deuteron, and also using Gaussian potentials by taking for G linear combinations of Hermite functions. In the case $S = 1/2$ in the approximation where ψ is disregarded, we may put as above

$$\begin{aligned} \psi_l &= q_l^+ G_l^+ \cos \delta_l + q_l^- G_l^- \sin \delta_l & \psi_l^s &= T^s \psi_l & \psi_l^a &= 0 \\ \Phi_l &= q_l^+ Q_l^+ \cos \delta_l + q_l^- Q_l^- \sin \delta_l & \Phi' &= T' \cdot \Phi_l & \Phi'' &= T'' \cdot \Phi_l \end{aligned}$$

where the Q 's can be of the same form as the G 's but contain other variational parameters. The integrals are still the same ones, as in the case of $S = 3/2$, one has to add the integral

$$J_0 = \int \psi_l^* U_{23} \psi_l d\tau$$

The relation (33)' may be written then in an explicit form as follows

$$\begin{aligned} (2 J_5 - J_4)_{\psi, \psi} - (J_5 - J_4)_{\Phi, \Phi} &= -g (J_1 + J_2 + J_3)_{\psi, \psi} + g (J_1 + J_2 \\ &\quad - 2 J_3)_{\Phi, \Phi} + (J_3 - J_2)_{\Phi, \Phi} \\ &\quad + \frac{1}{3} (g - 2) \{ (J_1 - J_2 + J_3 - J_0)_{\psi, \psi} + (J_1 - J_2 + J_3 - J_0)_{\Phi, \Phi} \\ &\quad - 2 (J_1 + J_3 - J_0)_{\psi, \Phi} + 4 \Phi (J_2)_{\psi, \Phi} - 2 (J_2)_{\Phi, \psi} \} \end{aligned} \quad (45)$$

Neutral theories

$$\begin{aligned} (2 J_5 - J_4)_{\psi, \psi} - (J_5 - J_4)_{\Phi, \Phi} &= (3g - 2) (J_1 + J_2 + J_3)_{\psi, \psi} + (3g - 2) \\ &\quad (J_1)_{\Phi, \Phi} - (3g - 1) (J_2)_{\Phi, \Phi} + (J_3)_{\Phi, \Phi} \\ &\quad - g \{ (J_1 - J_2 + J_3 - J_0)_{\psi, \psi} + (J_1 - J_2 + J_3 - J_0)_{\Phi, \Phi} \\ &\quad - 2 (J_1 + J_3 - J_0)_{\psi, \Phi} + 4 (J_2)_{\psi, \Phi} - 2 (J_2)_{\Phi, \psi} \} \end{aligned} \quad (45)'$$

The notation used is almost selfexplanatory, e. g.

$$(J_2)_{\psi, \Phi} = \int \psi_l^* U_{13} (12) \Phi_l d\tau$$

In a forthcoming paper we shall take up in great detail the actual evaluation of the integrals and of the phases δ_0 for smaller energies.

Acknowledgement.

I take this opportunity to express my sincerest gratitude to Prof. Dr. PAUL SCHERRER for some very interesting discussions, for his continuous encouragement and for material help. My thanks are also due to my theoretical colleagues at this institute Drs. JOST, LUTTINGER and VILLARS, for several discussions.

References.

- ¹⁾ R. SHERR et al. Phys. Rev. **72**, 662 (1947).
 - ²⁾ J. H. COON and H. H. BARSCHALL, Phys. Rev. **70**, 592 (1946).
 - ³⁾ L. HULTHEN, Kungl. Fys. Lund, **14**, 8 (1944).
 - ⁴⁾ W. DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode der Quantenmechanik, **57** (p. 57).
 - ⁵⁾ F. VILLARS, Helv. Phys. Acta **20**, 476 (1947) and F. VILLARS and A. THELLUNG, Helv. Phys. Acta **21**, 355 (1948).
 - ⁶⁾ L. HULTHEN, Kungl. Fys. Lund **14**, 21 (1944).
 - ⁷⁾ T. R. WU and J. ASHKIN, Phys. Rev. **73**, 986 (1948).
 - ⁸⁾ K. H. HÖCKER, Phys. Z. S. **43**, 236 (1942).
 - ⁹⁾ H. S. W. MASSEY and R. A. BUCKINGHAM, Proc. Roy. Soc. (A) **179**, 123 (1941).
 - ¹⁰⁾ H. S. W. MASSEY and R. A. BUCKINGHAM, Phys. Rev. **71**, 558 (1947).
-

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft

in Brienz, am 7. Mai 1949.

Präsident: Prof. Dr. E. MIESCHER (Basel),

Vizepräsident: Prof. Dr. H. MÜGELI (Neuchâtel),

Sekretär: Prof. Dr. G. BUSCH (Zürich).

Geschäftlicher Teil.

Als ordentliche Mitglieder der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft werden aufgenommen:

HH. H. BICHSEL (Basel); H. GRÄNICH (Zürich); W. HÄBERLI (Basel); J.-J. JAN (Lausanne); W. POPPELBAUM (Glion); G. PORRETTI (Bern); Dr. A. RYTZ (Bern); R. SCHAFROTH (Zürich); H. SCHNEIDER (Zürich); Dr. L. WEGMANN (Zürich); R. ZBINDEN (Basel); J. ZIVY (Basel).

Die S.P.G. zählt zur Zeit 341 Mitglieder.

Der Jahresbericht, die Jahresrechnung und der Revisorenbericht werden verlesen und genehmigt. — Der von Herrn Prof. Dr. M. FIERZ erstattete Bericht der Redaktionskommission der Helvetica Physica Acta wird verlesen und unter bester Verdankung genehmigt.

Der Vorstand der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft wird wie folgt neu gewählt:

Präsident: Prof. Dr. H. MÜGELI (Neuchâtel),

Vizepräsident: Prof. Dr. A. MERCIER (Bern),

Sekretär: Dr. P. DINICHERT (Neuchâtel).

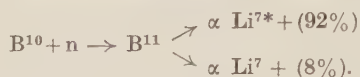
Als Rechnungsrevisoren werden die bisherigen Herren Prof. Dr. E. STAHEL (Biel) und P.-D. Dr. H. SCHILT (Biel) bestätigt.

Die nächste Sitzung wird im Rahmen der 129. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Lausanne stattfinden.

Wissenschaftlicher Teil. **$B^{10}(n, \alpha) Li^7$ -Reaktion mit langsamen Neutronen**

von A. STEBLER, P. HUBER und H. BICHSEL, Basel.

Die ihres grossen Wirkungsquerschnittes wegen interessante und auch oft untersuchte (n, α) -Reaktion in B^{10} mit langsamen Neutronen zeigt nach Messungen von BOGGILD¹⁾ und GILBERT²⁾ zwei α -Gruppen. Sie führen zu einem Li^7 -Endkern im Grundzustand (Energietönung Q) und im angeregten Zustand (Energietönung Q^*):



Die von verschiedenen Autoren³⁾ bestimmte Anregungsenergie beträgt in guter Übereinstimmung 479 ± 2 keV. Die bisher gemessenen Q -Werte dagegen zeigen ziemlich grosse Unterschiede. Von BOGGILD wird angegeben: $Q = 2,82$ MeV, $Q^* = 2,40$ MeV. GILBERT findet: $Q = 2,78$ MeV, $Q^* = 2,28$ MeV. Beide Untersuchungen wurden in der Wilsonkammer ausgeführt.

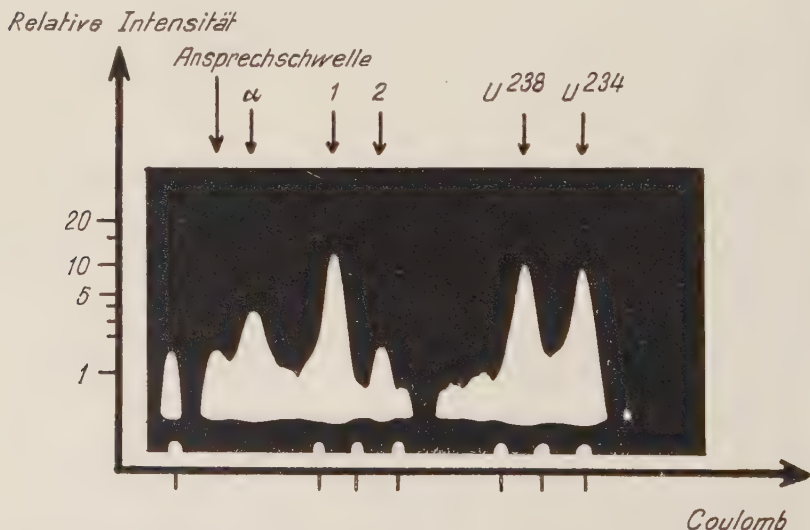


Fig. 1.

Spektrogramm der Reaktion $B^{10}(n, \alpha) Li^7$ und der α -Teilchen von U^{238} und U^{234} .
Eichmarken: 0; 12,5; 17,5; 23,7; 26,2; 28,7 $\cdot 10^{-15}$ Coulomb.

1. Übergang nach dem angeregten Li^{7*} ;

2. Übergang in den Grundzustand von Li^7 .

α : α -Teilchen der $B^{10}(n, \alpha) Li^7$ -Reaktion aus einer an den Elektroden adsorbierten BF_3 -Schicht.

Zufolge dieser Situation war es angezeigt, eine nochmalige Q -Bestimmung durchzuführen. Wir benutzten dazu eine mit BF_3 und einem Fremdgaszusatz gefüllte Ionisationskammer und bestimmten wie in früheren Untersuchungen⁴⁾ die durch die Reaktionsprodukte erzeugte Ladung mit Impulsverstärker und Impulsspektrograph (Fig. 1). Zur Energieeichung wurde diese Ladung mit der von U^{238} - α -Teilchen ($E = 4.180 \text{ MeV}$) produzierten verglichen, unter der Annahme, dass eine energieunabhängige mittlere Arbeit zur Erzeugung eines Ionenpaares vorliegt. Eine Extrapolation der gemessenen Ladungen auf Sättigung wurde vorgenommen. Diese Sättigungskorrektur beträgt zwischen 2 und 7%. Mit den nachstehenden Gasfüllungen wurden folgende Q -Werte bestimmt:

Füllung ata	Q MeV	Q^* MeV
3,5 O_2 + 0,2 BF_3	$2,68 \pm 0,02$	$2,19 \pm 0,02$
4,0 N_2 + 0,12 BF_3	$2,68 \pm 0,02$	$2,19 \pm 0,02$
4,0 A + 0,12 BF_3	$2,73 \pm 0,02$	$2,24 \pm 0,02$

Dieses Ergebnis von verschiedenen Q -Werten zeigt, dass die zugrunde gelegte Annahme einer energieunabhängigen mittleren Arbeit pro Ionenpaar unrichtig ist.

Relative Intensität

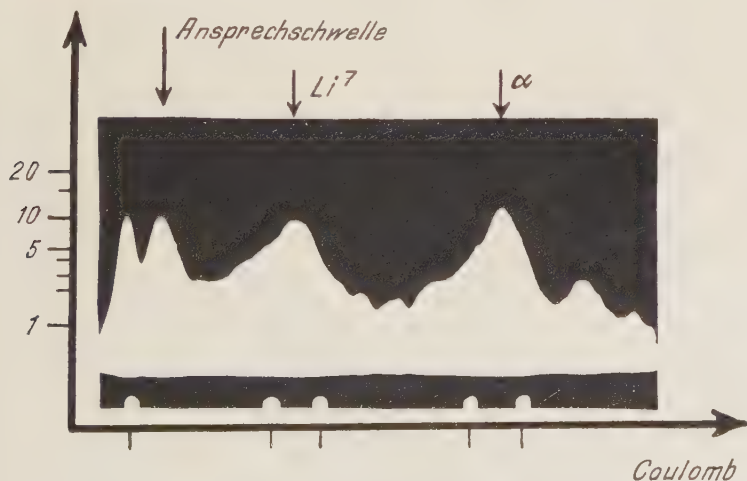


Fig. 2.

Spektrogramm der α -Teilchen und der Li^7 -Kerne aus einer Borschicht.
Eichmarken: 0; 4,0; 5,0; 8,25; 9,25 $\cdot 10^{-15}$ Coulomb.

Eine weitere Prüfungsmöglichkeit dieser Verhältnisse bietet die separate Untersuchung der in der Reaktion entstehenden Li-Kerne und α -Teilchen. Dazu wurden Bestrahlungen von langsamen Neutronen an dünnen Borschichten vorgenommen. Im Gegensatz zur BF_3 -Gasfüllung werden bei Schichtenbestrahlungen die Reaktionsendprodukte Li^7 und He^4 getrennt registriert. Fig. 2 zeigt eine Spektrographenaufnahme, Fig. 3 eine Verteilungskurve. In den

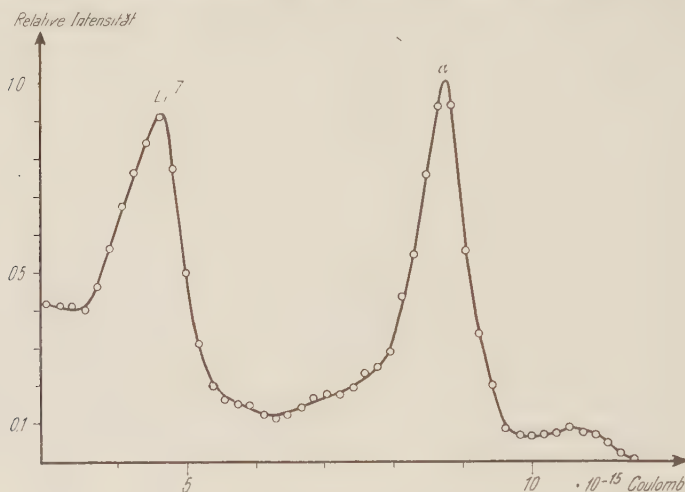


Fig. 3.

Linear entzerrtes Spektrogramm von Fig. 2.

Gasfüllungen Argon und O_2 wird für

$$\frac{E(\alpha)}{E(\text{Li})} \text{ Argon} = 1,89 \pm 0,02; \quad \frac{E(\alpha)}{E(\text{Li})} \text{ O}_2 = 1,94 \pm 0,02$$

gemessen. Auch hier zeigt sich eindeutig ein verschiedenes Verhalten der beiden Füllgase bezüglich der mittleren Arbeit zur Bildung eines Ionenpaares. Das in Argon bestimmte Verhältnis ist um 2,5% kleiner als das im Sauerstoff gemessene. Dies steht im Einklang mit den von GRAY⁵⁾ gemachten Angaben, wenn Li wie ein α -Teilchen gleicher Geschwindigkeit behandelt wird. Die angegebenen Werte für $\frac{E(\alpha)}{E(\text{Li})}$ sind nicht auf die in der Borschicht erlittenen Energieverluste der Teilchen korrigiert.

Literatur.

- 1) BÖGGILD, Mat. Fys. Med. **23**, Nr. 4 (1945).
- 2) GILBERT, Proc. Cambr. Phil. Soc. **44**, 447 (1948).
- 3) ELLIOT u. a., Phys. Rev. **74**, 1869 (1948).
- 4) STEBLER und HUBER, HPA **21**, 59 (1948).
- 5) GRAY, Proc. Cambr. Phil. Soc. **40**, 95 (1944).

Bestimmung der α -Energie von U^{235} und der Halbwertszeit von U^{234}

von E. BALDINGER und P. HUBER, Basel.

Mit Hilfe von Ionisationskammer, Verstärker und Impulsspektrographen wurde die Energie der α -Teilchen des U^{235} relativ zu den α -Energien von U^{238} und U^{234} bestimmt. Durch Messung der Zahl der α -Teilchen lassen sich ferner die verschiedenen Halbwertszeiten miteinander vergleichen. Da es sich um Vergleichsmessungen handelt, können die Relativwerte ziemlich genau ermittelt werden.

In einer mit 5 Atm. Stickstoff gefüllten Ionisationskammer mit parallelen Platten (Plattendistanz 1 cm, Kammerspannung 9 kV) und Ionensammlung wurde auf einer Platte eine sehr dünne Schicht

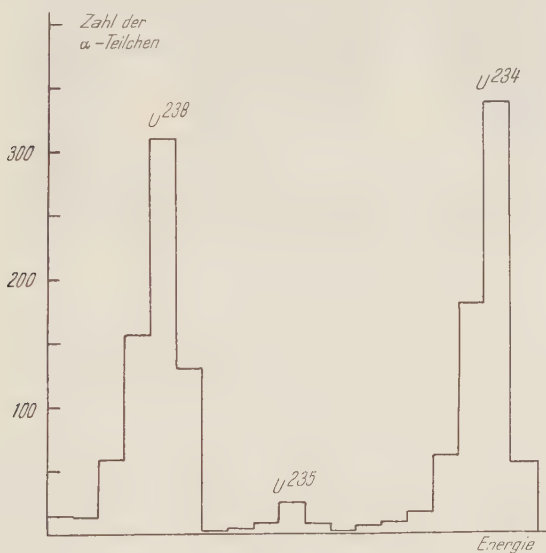


Fig. 1a.

Spektrogramm der U- α -Teilchen.

Aufgenommen durch Impulsspektrograph mit 19 Kanälen.

Uran elektrolytisch aufgetragen. Als Elektrolyt dient eine 1-Pro-mille-Lösung von Uranylsulfat (Stromdichte ca. 5 mA pro cm²). Um eine homogene U-Schicht zu erhalten, ist es wichtig, die Platte sorgfältig zu reinigen und die bei der Elektrolyse entstehenden Gasbläschen mit einem wandernden Gasstrahl (Stickstoff) zu entfernen¹⁾. Die Registrierung der Kammerimpulse geschah gleichzeitig mit zwei Impulsspektrographen. Der eine arbeitet mit 19 Kanälen und Zählwerken²⁾ und erlaubt eine exakte Bestimmung der Im-

pulszahlen, während die genaue Lage der Maxima umständlicher zu ermitteln ist. Beim Impulsspektrographen mit Kathodenstrahlröhre und photographischer Registrierung³⁾⁴⁾ lassen sich die Maxima gut messen, während in der Zahl der Impulse eine gewisse Unsicherheit besteht. Eine Kombination dieser beiden Verfahren scheint uns deshalb günstig zu sein.

Relative Intensität

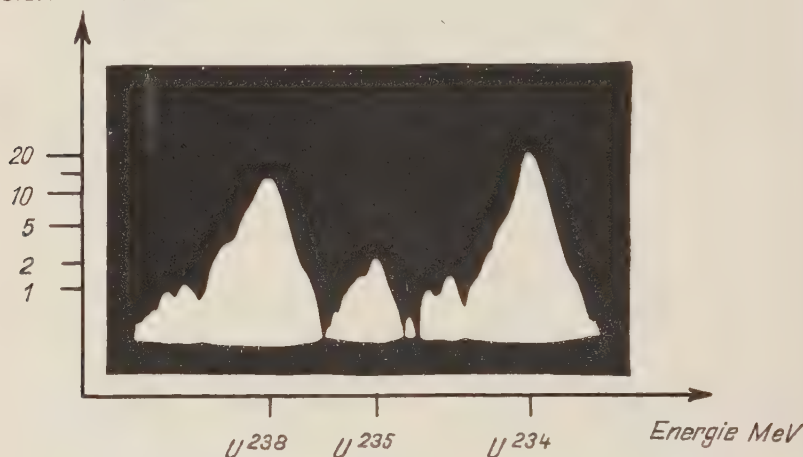


Fig. 1b.

Spektrogramm der U- α -Teilchen.

Aufgenommen durch Impulsspektrograph mit photographischer Registrierung.

Fig. 1a und 1b zeigen die Ergebnisse derselben Teilmessung. Die drei Gruppen von α -Teilchen sind getrennt und gut erkennbar. Dies ist selbstverständlich nur möglich, wenn die Breite einer α -Linie genügend klein ist, damit die wenig zahlreichen α -Teilchen des U^{235} nicht im Abfall der U^{234} α -Linie verschwinden. Fig. 2 stellt die Auswertung einer Reihe solcher Teilmessungen dar. Die Übereinstimmung der beiden voneinander unabhängigen Registrierungen ist sehr befriedigend. Beim Impulsspektrographen mit 19 Kanälen ist die genaue Lage und die Form der Amplitudenverteilung so ermittelt, dass der Registrierbereich von Teilmessung zu Teilmessung leicht verschoben wurde. Bei der photographischen Methode fällt vor allem die gute Übereinstimmung der Impulszahlen mit der rein elektronisch ermittelten auf. Eine Abweichung tritt nur bei kleinen Zahlen in Erscheinung und ist durch die Unsicherheit in der Lage der Nulllinie bedingt. Bringt man eine entsprechende Korrektur an, so fallen beide Kurven praktisch zusammen.

Insgesamt wurden 9424 α -Teilchen des U^{238} , 9313 α -Teilchen des U^{234} und 376 α -Teilchen des U^{235} registriert. Die Auswertung führte zu folgenden Ergebnissen:

1. Energie: Die Energiedifferenz der α -Teilchen von U^{235} und U^{238} zur Energiedifferenz von U^{234} und U^{238} ergibt

$$\frac{E_{235} - E_{238}}{E_{234} - E_{238}} = 0,365 \pm 0,015.$$

Wird die Energie der α -Teilchen von U^{238} zu 4,180 MeV⁵⁾⁶⁾ und diejenige von U^{234} zu 4,763 MeV⁵⁾⁶⁾ festgelegt, so folgt daraus die Energie der α -Teilchen des U^{235} zu

$$E_{235} = 4,393 \pm 0,01 \text{ MeV.}$$

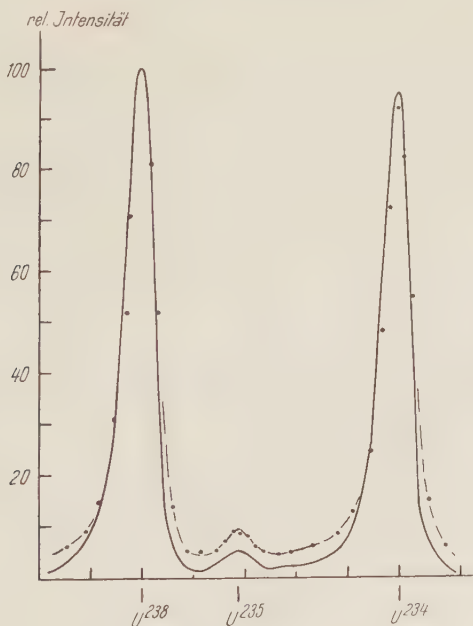


Fig. 2.

— Impulsspektrograph mit 19 Kanälen.

--- Impulsspektrograph mit photographischer Registrierung.

Auswertung einer Reihe von Teilmessungen, von denen eine in Fig. 1 dargestellt ist. (Total 7840 Impulse.)

Dieser Wert steht in sehr guter Übereinstimmung mit dem in der Tabelle von G. T. SEABORG und J. PERLMAN⁷⁾ angegebenen Wert von 4,396 MeV⁶⁾.

2. Halbwertszeiten: Wir beobachten

$$\frac{\text{Zahl der Zerfälle von } U^{238}}{\text{Zahl der Zerfälle von } U^{234}} = 1,013 \pm 0,03.$$

Der Fehler ist bedingt durch den mittleren statistischen Fehler und durch kleine Korrekturen zur Ermittlung der Zahl der α -Teilchen. Legen wir für die Häufigkeit der Uranisotope die Werte⁷⁾

$$U^{238}: 99,28\% \quad U^{235}: 0,71\%; \quad U^{234}: 0,0051\%$$

und für die Halbwertszeit⁷⁾ von U^{238} den Wert $T = 4,5 \cdot 10^9$ Jahre zugrunde, so folgt für die Halbwertszeiten von U^{234} und U^{235}

$$T_{U^{234}} = (2,33 \pm 0,1) \cdot 10^5 \text{ a}$$

$$T_{U^{235}} = (8 \pm 1,5) \cdot 10^8 \text{ a}.$$

Der erste Wert stimmt sehr gut überein mit demjenigen von CHAMBERLAIN u. a.⁸⁾ und ist merklich kleiner als die von NIER⁷⁾ angegebene Halbwertszeit. Der grosse Fehler für $T_{U^{235}}$ ist bedingt durch die geringe Statistik und die Unsicherheit in der Korrektur der α -Teilchenzahl infolge Überlagerung der α -Linien.

Literatur.

- 1) R. SCHIEDT, S. B. Akad. Wiss. Wien, 2a, **144**, 191 (1935).
- 2) E. BALDINGER und R. CASALA, HPA XXI, 173 (1948).
- 3) D. MAEDER, HPA XX, 139 (1947).
- 4) D. MAEDER, P. HUBER und A. STEBLER, HPA XX, 230 (1947).
- 5) F. ALDER, P. HUBER und F. METZGER, HPA XX, 234 (1947).
- 6) F. L. CLARK, H. J. SPENCER-PALMER and R. N. WOODWARD, Brit. Atomic Energy Projects Reports BR-521, 522.
- 7) G. T. SEABORG and J. PERLMAN, Rev. Mod. Phys. **20**, 585 (1948).
- 8) O. CHAMBERLAIN, D. WILLIAMS and P. YUSTER, Phys. Rev. **70**, 580 (1946).

Eine Methode zur Bestimmung der absoluten Intensität einer Ra-Be-Neutronenquelle

von F. ALDER und P. HUBER, Basel.

Die bisherigen Messungen zur Bestimmung der absoluten Intensität von Neutronenquellen benutzen meistens folgendes Prinzip: Die aus der Quelle austretenden Neutronen werden in einem Moderator, der gleichzeitig als Absorber wirkt, verlangsamt. Wenn der Moderator genügend gross ist um alle Neutronen zu absorbieren, so ist das Volumenintegral über die im Moderator pro sec absor-

bierten Neutronen gleich der absoluten Intensität der untersuchten Neutronenquelle.

Die erste derartige Messung führten AMALDI und FERMI 1936 durch¹⁾. Ihre Methode basiert weitgehend auf der Diffusionstheorie und erfordert die Kenntnis mehrerer Grössen (z. B. mittlere freie Weglänge in Wasser, Zahl der mittleren freien Weglängen, die die Neutronen bis zum Einfang durchlaufen), die z. T. nur ungenau bekannt sind. Das Resultat selbst ist daher mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet.

R. L. WALKER²⁾ benützt eine wesentlich übersichtlichere Methode. Die Neutronen werden in Borsäure, deren Absorptionsvermögen mit einer BF_3 -Kammer gemessen wird, verlangsamt. Die mechanisch durchgeführte Integration über das ganze Volumen ist aber umständlich.

Recht einfach ist der von G. R. GAMERTSFELD und M. GOLDHABER³⁾ benützte Gedanke. Die mechanische Integration wird durch sorgfältiges Umrühren ersetzt. Als Moderator dient eine MnSO_4 -Lösung. Die Aktivität der Lösung ist ein Mass für die Zahl der absorbierten Neutronen. Durch Hinzufügen von Mn-Pulver wird diese Zahl geändert. Aus dieser Änderung sowie der absoluten Aktivität des Mn-Pulvers kann die Intensität der Quelle berechnet werden. Das Verfahren verlangt eine möglichst homogene Aktivierung des Pulvers.

Die von uns benützte Methode stimmt mit der eben beschriebenen weitgehend überein. An Stelle der Zugabe von Mn-Pulver wird aber die Aktivität der MnSO_4 -Lösung bei zwei verschiedenen Konzentrationen gemessen.

Als Moderator wird ein kugelförmiger Behälter von 50 cm Durchmesser mit einer MnSO_4 -Lösung gefüllt und in einen grossen Wassertrog gesetzt. Die Ra-Be-Quelle befindet sich im Zentrum des Behälters.

In der folgenden Rechnung bedeuten:

- Q Zahl der Neutronen, die pro sec die Quelle verlassen,
- A Zahl der Neutronen, die pro sec vom MnSO_4 absorbiert werden,
- B Zahl der Neutronen, die pro sec den Moderator verlassen,
- C Zahl der Neutronen, die pro sec vom Wasser absorbiert werden,
- N MnSO_4 -Konzentration (willkürliche Einheit),
- M H_2O -Konzentration (willkürliche Einheit),
- a, b, c Konstanten.

Da $Q = A + B + C$, ist es zweckmässig zu schreiben:

$$A = \frac{a N Q}{a N + b + c M}; \quad B = \frac{b Q}{a N + b + c M}; \quad C = \frac{c M Q}{a N + b + c M}$$

Hieraus folgt

$$\frac{Q - A - B}{A} = \frac{c M}{a N}.$$

Schreibt man diesen Ausdruck für zwei verschiedene Konzentrationen N_1 und N_2 bzw. M_1 und M_2 , so folgt für die Intensität Q :

$$Q = \frac{M_1 N_2 A_1 (A_2 + B_2) - M_2 N_1 A_2 (A_1 + B_1)}{M_1 N_2 A_1 - M_2 N_1 A_2}.$$

Die Bestimmung der Konzentrationen N_1 , N_2 , M_1 und M_2 bereitet keine Schwierigkeiten und kann sehr genau erfolgen.

Die absoluten Aktivitäten A_1 und A_2 werden folgendermassen ermittelt: Eine MnSO_4 -Lösung wird mit den Neutronen eines D-D-Generators aktiviert und die Aktivität der Lösung mit einem Tauchzählrohr für eine bestimmte Geometrie bestimmt. Dann wird ein Teil der Lösung als MnCO_3 gefällt und die absolute Aktivität pro mg MnCO_3 mit dem bereits früher beschriebenen Schichtenzählrohr⁸⁾ gemessen. Damit ist die Tauchzählrohr-Anordnung geeicht und es kann die absolute Aktivität jeder MnSO_4 -Lösung gleicher Konzentration sofort angegeben werden.

Da bei diesen Messungen jeweils nur die Mn-Aktivität gemessen wird, ist für den im Schwefel absorbierten Anteil noch eine kleine Korrektur anzubringen. Es folgt ohne weiteres, dass die gemessenen Aktivitäten noch mit dem Faktor⁹⁾ $\frac{\sigma_{Mn}}{\sigma_{Mn} - \sigma_s}$ zu multiplizieren sind. Eine genaue Kenntnis von σ_s/σ_{Mn} ist aber nicht erforderlich.

Zur Bestimmung der Zahl der Neutronen B , die pro Sekunde aus dem Moderator austreten und draussen absorbiert werden, wird mit einem Detektor die Neutronendichte an der Oberfläche der Kugel mit derjenigen einer wassergefüllten Kugel verglichen. Da die Neutronenverteilung in reinem Wasser sehr genau bekannt ist, kann für den Fall einer wassergefüllten Kugel der Anteil B_0 angegeben werden. Da es sich nur um eine Korrektur handelt, ist es ohne weiteres gestattet, die an der Oberfläche ermittelten Neutronendichten proportional zu den Verlusten B zu setzen.

Berücksichtigt man alle Korrekturen, so müssen etwa 12 verschiedene Grössen ermittelt werden. Es ist daher erlaubt, die Fehler als unabhängige statistische Schwankungen anzusehen und den mittleren quadratischen Fehler zu berechnen.

Dann finden wir für die Intensität der Instituts Ra-Be-Quelle (96,49 mC)

$$Q = 610,000 \pm 45,000 \text{ Neutronen/sec.}$$

Für eine 1 mC-Quelle folgt

$$Q = 6,300 \pm 7,5 \% \frac{\text{Neutronen}}{\text{mC} \cdot \text{sec}}$$

Ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Autor	Absorber	Quelle	q, mC·sec	Literatur
AMALDI und FERMI	Wasser	Rn Be	27 000	1)
BAKKER	Wasser	Rn Be	21 000	4)
PANETH	Bor	Ra Be	≥ 6700	5)
LADENBURG	?	Ra Be	6000	6)
WALKER	Bor	Ra Be	11 840	2)
SEIDL	Bor	Ra Be	11 000	7)
GAMERTSFELDER u. GOLDBABER	Mangan	Ra Be	6800	3)
Vorliegende Messung	Mangan	Ra Be	6300	

Die grossen Abweichungen können wohl kaum nur durch ungleiche Ra-Be-Mischungen erklärt werden. Es macht vielmehr den Anschein, dass die Zuverlässigkeit der verschiedenen Methoden sehr unterschiedlich ist. Es wäre daher erwünscht, 2 nach verschiedenen Methoden geeichte Quellen miteinander zu vergleichen.

Wir danken Herrn Prof. FIERZ für wertvolle Diskussionen; Herrn Dr. HOFFMANN von der Ciba A.G., Basel, sind wir für die Zurverfügungstellung des MnSO_4 zu Dank verpflichtet.

Literatur.

- 1) E. AMALDI und E. FERMI Phys. Rev. **50**, 899 (1936).
- 2) R. L. WALKER, MDDC **414**.
- 3) G. R. GAMERTSFELDER und M. GOLDBABER, Phys. Rev. **69**, 368 (1946).
- 4) C. J. BAKKER, Physica **4**, 723 (1937).
- 5) F. A. PANETH, E. GLÜCKAUF und H. LOEIT, Proc. Roy. Soc. London **157**, 412 (1936).
- 6) P. LADENBURG und M. H. KANNER, Phys. Rev. **51**, 1022 (1937).
- 7) F. G. P. SEIDEL und S. P. HARRIS, Rev. Sci. Inst. **18**, 897 (1947).
- 8) F. METZGER, F. ALDER und P. HUBER, H. P. A. **21**, 278 (1948).
- 9) σ_{Mn} und σ_s bedeuten die Einfangwirkungsquerschnitte für Mn und S.

Nachweis der Reaktion $D(H^3, n)He^4$ mit der Photoplatte

von P. HUBER und L. JENNY, Basel.

(Kein Manuskript eingegangen.)

Über die tiefsten Anregungszustände der Atomkerne

von PETER PREISWERK (ETH. Zürich).

Es ist öfters die Frage aufgeworfen worden, ob Rotationen des Gesamtkernes mögliche Anregungsstufen seien (siehe u. a. TELLER, WHEELER¹), GUGGENHEIMER²). Die Daten über Kernspektren sind in letzter Zeit wesentlich erweitert worden, besonders hat auch die Technik γ -Linien niedriger Energie zu messen Fortschritte gemacht. Aus einer Analyse dieses Materials lässt sich ableiten, dass das Modell des Rotators brauchbar ist. Es erlaubt einen Teil der Anregungsstufen des Atomkerns quantitativ zu beschreiben und gibt die Möglichkeit prüfbare Voraussagungen zu machen. Die folgenden Kriterien führen zu diesem Schluss.

Es gibt eine grosse Anzahl von γ -Linien, deren Energie übereinstimmt mit der aus dem Rotatormodell errechneten. Der Berechnung ist dabei als erste Näherung das Modell des starren symmetrischen Rotators zugrunde gelegt. Die Energieniveaux liegen somit bei

$$E_J = \frac{h^2}{2 \cdot 0,4 M_0 A^{5/3} r_0^2} J(J+1)$$

Für den Trägheitsradius ist $R = r_0 A^{1/3}$ eingesetzt, wobei A die Massenzahl bedeutet. Es kommen keine willkürlich wählbaren Konstanten vor, da auch die Konstante r_0 innerhalb einer Grenze von 10% bereits festliegt. Bestimmungen dieser Grösse aus der Bindungsenergie der Kerne oder aus Kernreaktionen liefern den Wert $r_0 = 1,4 \pm 0,1 \cdot 10^{-13}$ cm. Die aus der Bindungsenergie gewonnene Grösse hat am ehesten die Bedeutung eines Trägheitsradius.

Wenn Rotationen auftreten können, so wird das eine allgemeine Eigenschaft der Kerne sein, und es muss sich zeigen, dass die Lage der Rotationsniveaux bei verschiedenen Kernen mit $A^{-5/3}$ variiert. In Fig. 1 ist die mit

$$r_0 = 1,38 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

errechnete Lage des ersten Rotationsniveau ($J = 1$) als Funktion

der Massenzahl eingezeichnet. Die geforderte Abhängigkeit erweist sich für eine Reihe von bekannten Energieniveaux als erfüllt. Die Übereinstimmung ist nicht nur quantitativ gut, sondern es sind bis jetzt auch keine tieferen Niveaux bekannt, die unterhalb der Kurve $E_{J=1}(A)$ liegen. Dass bei den leichten Kernen Ausnahmen auftreten, ist verständlich. Obschon eine solche Übereinstimmung auch bei höheren J gezeigt werden kann, beschränken wir uns hier

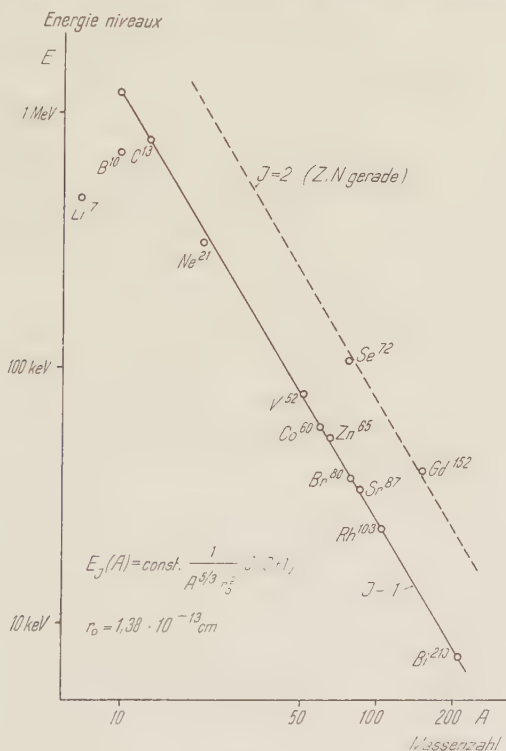


Fig. 1.

auf $J = 1$. Es fällt auf, dass beim Kernen mit gerader Protonen- und gerader Neutronenzahl bis jetzt keine Niveaux bekannt sind, die tiefer als die Rotationsniveaux $J = 2$ liegen. Möglicherweise fallen bei dieser Kernklasse ungeradzahlige J aus.

Nach dem Modell können höhere Rotationsniveaux angeregt werden. Es müssen deshalb Differenzlinien beobachtet werden, die Übergängen in die tiefer liegenden Zwischenniveaux entsprechen. Um zu zeigen, dass auch diese Bedingung erfüllt ist, seien nur zwei Beispiele angeführt. Bei der Umwandlung $RaD \rightarrow RaE$ sind fol-

gende γ -Linien beobachtet worden: 46,7 keV, 37 keV, 32 keV, 23,2 keV, 7,3 keV³). Sämtliche Linien sind interpretierbar als Differenzlinien der Rotationsniveaux $J = 0, 1, 2, 3, 4$. Zahlenmässige Übereinstimmung — die mit $r_0 = 1,35 \cdot 10^{-13}$ cm berechneten Werte sind 46,5 keV, 38,7 keV, 31,0 keV, 23,2 keV und 7,7 keV — ist innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen vorhanden. Als weiteres Beispiel, welches gleichzeitig auf auftretende Komplikationen hinweisen soll, seien die γ -Linien der $\text{Se}^{75} - \text{As}^{75}$ - Umwandlung angeführt: 405 keV, 283 keV, 267 keV, 137 keV, 123 keV, 99 keV, 76 keV⁴). Von diesen Linien stimmen die Linien 405 keV, 283 keV und 123 keV genau mit berechneten überein. Die 137 keV-Linie ist nicht als Rotationslinie deutbar, zumindest nicht ohne Annahme von Aufspaltungen der Niveaux. Bei den restlichen besteht die Möglichkeit, dass es sich um Differenzlinien zwischen dem 137 keV-Niveau und den Rotationsniveaux $J = 4, 3, 2, 1$ handelt. Ist diese Deutung richtig, so müsste eine 40 keV γ -Linie gefunden werden können, einem $J = 1 \rightarrow J = 0$ Übergang entsprechend.

Die Prüfung, ob die Multipolordnung der emittierten γ -Strahlung mit der aus dem Modell resultierenden J -Änderung verträglich ist, lässt sich am vorliegenden Material nicht eindeutig durchführen.

Eine Reihe von beobachteten γ -Linien und Energieniveaux fallen in das Gebiet zwischen $E_{J=1}$ und $E_{J=2}$. Die meisten davon entsprechen Isomeren — Übergängen, für welche auch ein anderer Anregungsmechanismus wahrscheinlich ist. Einige entsprechen der Energiedifferenz $E_{J=2} - E_{J=1}$, ohne dass bis jetzt der Übergang in den Grundzustand beobachtet worden wäre. Beispiele sind die 35 keV-Linie des Te^{121} und die 32,5 keV-Linie des Te^{123} ⁵). In diesen Fällen würde das Auffinden der weicheeren Linien des Überganges in den Grundzustand, 18 keV bzw. 16 keV für den Fall des Beispiels, eine Bestätigung der Richtigkeit der Interpretation bringen können. Bei den restlichen γ -Linien, deren Energie in das Gebiet zwischen $E_{J=2}$ und $E_{J=1}$ fallen, ist nicht sicher, ob es sich um Differenzlinien höherer Anregungsniveaux handelt. Ihre Einordnung in Termschemata fehlt noch.

Die vorliegende Analyse weicht von derjenigen GUGGENHEIMERS vor allem darin ab, dass nur Rotationen des Gesamtkernes in Betracht gezogen werden und dass die Konstante r_0 als — in engen Grenzen — bereits fixierte Grösse angesehen wird. Mit dem Wert $r_0 = 2,03 \cdot 10^{-13}$ cm, zu welchem GUGGENHEIMER gelangt, ist die Forderung verbunden, dass viel tiefere Niveaux existieren müssten, als tatsächlich bekannt sind, und dass den beobachteten Niveaux,

die am tiefsten liegen, schon höhere Rotationsquantenzahlen entsprächen. Auch müssten die beobachteten γ -Linien eine unwahrscheinlich hohe Multipolordnung haben.

Es bleibt zu untersuchen, inwiefern die Differenzen zwischen den wirklichen Niveaux und den berechneten einer Abweichung der Kerne vom symmetrischen Rotator bzw. Aufspaltungen der Niveaux entsprechen. Das Rotatormodell ermöglicht eine Klassifizierung der Energieniveaux und erleichtert eine systematische Untersuchung der übrigen Anregungsstufen.

Eine ausführlichere Diskussion wird in den H.P.A. erscheinen.

Literatur.

- ¹⁾ TELLER, WHEELER, Phys. Rev. **53**, 778 (1937).
- ²⁾ GUGGENHEIMER, Proc. Roy. Soc. **181**, 169 (1943).
- ³⁾ FRILLEY, SURUGUE, TSIEN SAN TSIANG, J. de Physique Radium (Sér. 8) **7**, 350 (1946).
- ⁴⁾ TER-POGOSSIAN, ROBINSON, COOK, Phys. Rev. **75**, 995 (1949).
- ⁵⁾ HILL, Bull. American Phys. Soc. **24**, Nr. 4, 24 (1949).

K-Einfang und Positronenemission von Cu^{61} und Cu^{64}

von O. HUBER, R. RÜETSCHI und P. SCHERRER (ETH. Zürich).

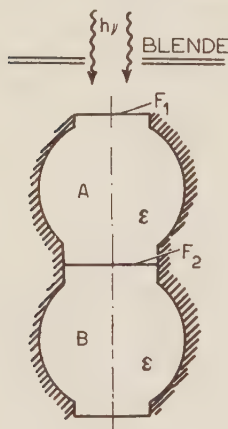
Bei Positronenstrahlern tritt K -Einfang als Konkurrenzprozess auf, der unter Umständen viel grössere Wahrscheinlichkeit besitzt als die Positronenemission selbst. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $W_K:W^+ = \lambda$ lässt sich mit Hilfe der Fermi-Theorie für erlaubte Spektren berechnen¹⁾. Die Messung von λ ist im allgemeinen schwer durchzuführen, weil dabei die Zahl der K -Einfänge und der emittierten Positronen absolut gemessen werden muss. Dagegen lässt sich in identischen Versuchsanordnungen das Verhältnis zweier λ bei gleicher Kernladungszahl gut messen. Dies wurde bereits früher für Cu^{61} und Cu^{64} durchgeführt²⁾⁷⁾. Die Autoren²⁾ fanden experimentell $\lambda^{64}:\lambda^{61} = 1 - 5,5 \pm 0,3$, während die Fermi-Theorie den Wert 7,6 ergibt, wenn man die neuesten Werte für die Positronen-Maximalenergien verwendet: $E_{\text{max}}^{64} = 0,657 \text{ MeV}^3)$ und $E_{\text{max}}^{61} = 1,205 \text{ MeV}^4)$.

Diese grosse Diskrepanz liess es wünschenswert erscheinen, die Messung nochmals auszuführen. In einer streufreien Versuchsanordnung ergab sich $A_{\text{exp}} = 5,32 \pm 0,18$, in guter Übereinstimmung mit den älteren Messungen. Um zu entscheiden, ob die Abweichung von λ^{61} oder von λ^{64} herrühre, wurden diese Grössen einzeln ge-

messen. Den Messungen wurden die bekannten Zerfallsschemata^{5) 4)} zugrunde gelegt. R. BOUCHEZ und G. KAYAS geben in einer kürzlich erschienenen Mitteilung⁸⁾ Messwerte für λ^{61} und λ^{64} an, die aber wesentlich höher liegen, als die von uns bestimmten Werte.

Die vom K-Einfang des Cu-Kernes herrührende Ni-Röntgenstrahlung von 7,5 KeV lässt sich mit einem Folienzählrohr messen, indem die β -Teilchen magnetisch abgelenkt werden. Für eine Absolutmessung müssen Fluoreszenzausbeute, Absorption der Ni-K-Strahlung und Raumwinkel genau berücksichtigt werden. Ungenügend bekannt war aber die Zählrohrsensibilität ε_K . Diese Grösse wurde für die benutzte Zählrohranordnung auf folgende Weise gemessen (Fig. 1):

Zwei identische Zählrohre A und B sind durch eine 10 μ dicke Al-Folie F_2 voneinander getrennt. Von N Quanten, die in das Zählrohr A gelangen, werden $N \cdot \varepsilon_K$ gezählt. Lässt die Zwischenfolie das q -fache der auffallenden Intensität durch, so werden im Zählrohr B noch $N \cdot (1 - \varepsilon_K) \cdot q \cdot \varepsilon_K$ Quanten registriert. Aus dem Verhältnis der Stosszahlen beider Zählrohre ergibt sich also sofort die Empfindlichkeit ε_K , denn q kann durch einfache Absorptionsmessung bestimmt werden.



$$Z_A = N \cdot \varepsilon$$

$$Z_B = N (1 - \varepsilon) \cdot q \cdot \varepsilon$$

Fig. 1.

Messung von ε_K .

Zur Absolutmessung der Zahl der Positronen benutzt man mit Vorteil die Annihilationsstrahlung. Das Präparat mit dem aktiven Cu^{61} und Cu^{64} (durch p - n -Reaktion aus Ni hergestellt) wurde zwischen dünne Bleiplättchen gepresst, die alle β -Teilchen und auch die Ni-K-Strahlung absorbierten. Durch Messung der Annihilationsstrahlung (511 KeV) kann auf die Anzahl der Positronen geschlossen werden. Dazu muss der Raumwinkel Quelle-Zählrohr und die Zählrohrsensibilität ε_γ bekannt sein⁶⁾. Für die Messung von ε_γ ist es erschwerend, dass die Empfindlichkeit über das Zählrohr schwankt. In Fig. 2 ist die Variation der relativen ε_r Empfindlichkeit für ein Zählrohr mit 0,5 mm Bi-Kathode und 5,5 cm wirksamer Drahtlänge dargestellt.

Unter Ausnützung des kleinen Bereiches, in welchem ε_γ konstant ist, kann man die absolute Zählrohrempfindlichkeit mit Hilfe von Koinzidenzmessungen genau gewinnen. Dies wird erreicht durch die in Fig. 3 dargestellte Anordnung. Das Verhältnis (Koinzidenzen

$A \times B$): (Einzelstösse A) $= \varepsilon_{\gamma}^0 \cdot e^{-\mu d}$ ist gleich der Empfindlichkeit des Zählrohres B , bezogen auf den Bereich konstanter Empfindlichkeit.

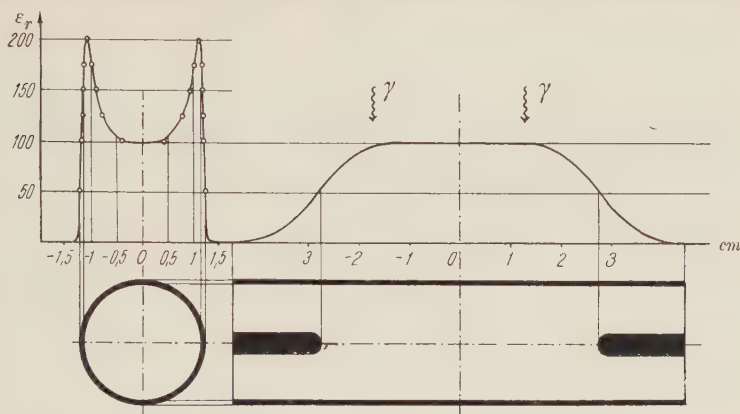


Fig. 2.

Verteilung der Empfindlichkeit des Bi-Zählrohres für 511-KeV- γ -Strahlung.



Fig. 3.

Messung von ε_{γ} in unsymmetrischer Anordnung.

Mit den nunmehr bestimmten Zählrohrempfindlichkeiten konnten die Verhältnisse $W_K:W^+ - \lambda$ einzeln gemessen werden. Die Resultate sind in der untenstehenden Tabelle zusammengestellt.

Experimentelle und theoretische Werte für λ und A .

	Experiment	Theorie	alte Mess.
$K^{64}: \beta^{+64} = \lambda^{64}$	$1,75 \pm 0,2$	2,08	—
$K^{61}: \beta^{+61} = \lambda^{61}$	$0,32 \pm 0,03$	0,28	—
$\lambda^{64}: \lambda^{61} = A$	$5,32 \pm 0,18$	7,6	$5,5 \pm 0,3$

Bedenkt man, dass auch der Theorie Näherungen zugrunde liegen, so kann von einer befriedigenden Übereinstimmung der theoretischen und experimentellen Werte λ gesprochen werden. Um die

Abweichung beim Doppelverhältnis A zu verstehen, müsste man annehmen, dass sich Korrekturen der λ_{theor} in entgegengesetzten Richtungen auswirken.

Literatur.

- 1) C. MØLLER, Phys. Zeitschr. der Sowjetunion **11**, 9.
- 2) H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **18**, 252 (1945).
- 3) C. S. COOK und M. LANGER, Phys. Rev. **73**, 601 (1948).
- 4) C. S. COOK und M. LANGER, Phys. Rev. **74**, 227 (1948).
- 5) H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK, P. SCHERRER und R. STEFFEN, Helv. Phys. Acta **19**, 219 (1946).
- 6) H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **19**, 77 (1946).
- 7) L. W. ALVAREZ, Phys. Rev. **54**, 486 (1938).
- 8) R. BOUCHEZ und G. KAYAS, Journ. de Phys. et le Radium, Sér. 8, Tome X (1949).

Richtungsverteilung der $\gamma\gamma$ -Koinzidenzen beim In^{111}

von F. BOEHM und M. WALTER (ETH. Zürich).

Das Isotop In^{111} zerfällt mit einer Halbwertszeit von $2,7^d$ durch K-Einfang; der entstehende Cd^{111} -Kern geht durch Emission zweier sukzessiver γ -Quanten von 173 und 247 keV in den Grundzustand über¹⁾. Aus spektroskopischen Messungen wurde der Kernspin des stabilen Cd-Isotops 111 zu $\frac{1}{2}$ bestimmt²⁾. Die Spinwerte der beiden angeregten Niveaux von Cd^{111} werden durch den Multipolcharakter der γ -Übergänge zwar nicht eindeutig festgelegt, wohl aber vermöge der Auswahlregeln auf wenige mögliche Fälle eingeschränkt. Weitere Aufschlüsse über die Spindifferenzen zwischen den beteiligten Niveaux und den Multipolcharakter der Übergänge kann nach den Rechnungen von HAMILTON³⁾ die Kenntnis der Richtungskorrelation der beiden sukzessiven γ -Quanten geben. Wir haben deshalb versucht, die Richtungsverteilung der $\gamma\gamma$ -Koinzidenzen beim In^{111} experimentell zu bestimmen.

Zur Registrierung der γ -Strahlen haben wir Zählrohre mit 80 mg/cm^2 dicker Goldkathode verwendet. Sie sind zum Weghalten der Elektronen von In^{111} und In^{114} mit 4 mm Aluminium umgeben. Beide Zählrohre besitzen gleichen Abstand vom Präparat; eines davon ist um das Präparat drehbar angeordnet. Koinzidenzmessungen haben wir unter den Winkeln π , $\pm \frac{\pi}{2}$ und $\pm \frac{3\pi}{4}$ zwischen den Zählrohren vorgenommen. Wegen des endlichen Winkelaufhebungsvermögens der Anordnung ist die gemessene Anisotropie

kleiner als die von Hamilton berechnete Grösse $|W(\pi)/W(\frac{\pi}{2}) - 1|$ und muss daher sinngemäss korrigiert werden.

Wie bereits DUNWORTH²⁾ bemerkte, werden Richtungskorrelationsmessungen zwischen zwei γ -Quanten prinzipiell verfälscht durch zusätzliche Koinzidenzen mit Comptonstreuquanten. Da jedoch diese gestreuten Quanten weicher sind als die primären, ist es durch zweckmässige Verwendung von Absorbern möglich, die Zahl der Streuquanten selektiv zu reduzieren. Über die experimentelle Technik wird an anderer Stelle eingehend berichtet werden.

Bei der Auswertung haben wir die gemessenen Koinzidenzen durch die im gleichen Zeitintervall im beweglichen Zählrohr gemessene Einzelstosszahl dividiert, wodurch der zeitliche Abfall der Präparatstärke sowie eine allfällige Exzentrizität der Quelle kompensiert wird. Ein kleiner Anteil der 50^d -Komponente von In^{114} wurde eliminiert.

Eine sich über 2 Halbwertszeiten erstreckende Messung ergab unter Annahme einer Verteilungsfunktion der Form $1 + A \cos^2 \vartheta$ nach Anbringen sämtlicher Korrekturen folgendes Resultat:

$$A = -0,07 \pm 0,04 \text{ (mittl. statist. Fehler)}$$

Zum Vergleich der gefundenen Anisotropie mit den Formeln von HAMILTON ist es aufschlussreich, den Multipolcharakter der beiden γ -Übergänge zu kennen. Messungen der Konversionskoeffizienten dieser γ -Strahlen⁵⁾ können in dieser Hinsicht Auskunft geben. Während die zitierte Arbeit sich auf Rechnungen von SCHAFROTH⁶⁾ über die Konversion magnetischer Multipole stützt, folgen wir hier zur Interpretation der Konversionskoeffizienten neueren Arbeiten von DRELL⁷⁾ und ROSE et al.⁸⁾ und einer Mitteilung von DEUTSCH und STEVENSON⁹⁾. Danach kann dem 173 KeV-Quant der Charakter eines magnetischen Dipols, dem 247 KeV-Quant der eines elektrischen Quadrupols zugeordnet werden. Die Rechnungen ergeben dann in zwei Fällen befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment, nämlich für Spins von $5/2$ und $3/2$ ($A_{\text{theor}} = -0,07$) bzw. für Spins von $7/2$ und $5/2$ ($A_{\text{theor}} = -0,10$) der beiden Cd^{111} -Niveaux. Wir haben uns dabei auf die aus der Mitteilung von DEUTSCH und STEVENSON⁹⁾ folgende Reihenfolge der Quanten beschränkt.

An der gegebenen Interpretation kann nur dann festgehalten werden, wenn die Präzession des Kernmomentes im Magnetfeld der Hülle nicht zu einer merklichen Verwischung der Anisotropie führt.

Herrn Prof. Dr. K. SCHÜLER vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik in Hechingen sind wir für eine briefliche Auskunft über den Spin von Cd^{111} zu Dank verpflichtet.

Literatur-

- 1) LAWSON und CORK, Phys. Rev. **57**, 982 (1940).
- 2) SCHÜLER und BRÜCK, Zeitschr. f. Phys. **56**, 291 (1929).
- 3) HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122 (1941).
- 4) DUNWORTH, Rev. Sci. Instr. **11**, 167 (1940).
- 5) BOEHM, HUBER, MARMIER, PREISWERK und STEFFEN, H.P.A. **22**, 69 (1949).
- 6) SCHAFROTH, H. P. A. **21**, 499 (1948).
- 7) DRELL, Phys. Rev. **75**, 132 (1949).
- 8) ROSE et al., private Mitteilung.
- 9) DEUTSCH und STEVENSON, Bull. Amer. Phys. Soc. **24**, Nr. 4, 32 (1949).

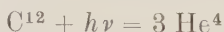
(γ, α) -Reaktion des C^{12} und das Alphateilchenmodell leichter Kerne

von V. L. TELEGDI und M. VERDE (ETH. Zürich).

Für leichte Kerne, insbesondere für solche, die ihrer Zusammensetzung nach aus Alphateilchen bestehen (Be^8 , C^{12} usw.) sind schon seit langem „molekulare“ Modelle vorgeschlagen worden, bei denen Alphateilchen die Rolle der Atome spielen. Diese Gebilde können sowohl zu Vibrationen als auch zu Rotationen angeregt werden, und es ergibt sich so die prinzipielle Möglichkeit, nach den in der Molekularphysik geläufigen Methoden die Energien der tieferen Anregungszustände der betrachteten Kerne zu ermitteln.

DENNISON¹⁾ berechnete auf dieser Grundlage die tiefsten Terme von 0^{16} und fand, dass diese mit der Erfahrung besser in Übereinstimmung zu bringen sind als die Voraussagen eines Kernmodells (HARTREE), bei dem die einzelnen Nukleonen als voneinander unabhängig betrachtet werden.

Diese Ergebnisse DENNISONs hatten für die Beurteilung des Alphapartikelmodells nur qualitativen Charakter und eine quantitative Prüfung desselben stand noch aus. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, ausgehend von der Reaktion



eine solche Prüfung durchzuführen. Sie soll darin bestehen, dass man ermittelt, ob eine konsequent mit Alphamodell-Wellenfunktionen durchgeführte Rechnung dem folgenden Erfahrungsmaterial gerecht wird:

Die Reaktion verläuft bei 17.6 MeV zumindest vorwiegend als eigentlicher (γ , α)-Prozess, bei dem ein Be^{8*} im bekannten Zustand der Anregungsenergie $U = 3$ MeV ($\Gamma = 0.8$ MeV) entsteht²⁾, und zwar mit einem Wirkungsquerschnitt, der zwischen 10^{-29} und 10^{-28} cm^2 liegt. Nach den vorläufigen Ergebnissen³⁾ der Untersuchung mit einer kontinuierlichen Gammastrahlung der Grenzenergie von von rund 24 MeV (für die ein hyperbolisches Spektrum angenommen wurde) hat der Wirkungsquerschnitt ein Maximum bei etwa 18 MeV und fällt dann rasch auf einen ca. 10mal kleineren Wert bei 24 MeV ab. Bei allen untersuchten Energien scheint das Energiespektrum der Alphateilchen mit der Annahme verträglich, daß die Reaktion den gleichen Verlauf nimmt, wie bei 17.6 MeV.

Es wäre durchaus naheliegend, zur theoretischen Beschreibung dieser Reaktion den üblichen Mechanismus heranzuziehen, bei dem der Kern durch die *Absorption* des Quantes in einen angeregten Zustand gelangt und von dort aus durch Aussendung eines α -Teilchens zerfällt. Dieses Bild drängt sich insbesondere auf, weil es bekannt ist⁴⁾, dass beim Protoneneinfang des B^{11} ein C^{12*} entsteht, der ganz analog zerfällt. Das Abfallen des Wirkungsquerschnittes nach 18 MeV wäre dann durch die Konkurrenz des (γ , n)-Prozesses zu deuten, der dort einsetzt^{†)}. Zur quantitativen Durchrechnung eignet sich aber eine solche Beschreibung nicht, weil bei so hohen Anregungen das Alphamodell nicht mehr zulässig ist und man über die Niveaudichte leichter Kerne nicht genügend weiss.

Wir haben nun angenommen, dass es sich bei dieser Reaktion um einen echten Photoeffekt handelt, d. h. um einen unmittelbaren Übergang vom Grundzustand des C^{12} in einen Zustand des Kontinuums. Wegen des Zusammenfallens von Ladungs- und Massenschwerpunkt kommt nur ein elektrischer 2^+ -Pol-Übergang mit geradem l in Frage und wir dürfen uns auf $l = 2$ (Quadrupol) beschränken. Es seien nun die möglichen Endzustände unter Angabe der Winkelverteilung des „ersten“ Alphateilchens in bezug auf die γ -Strahl-Richtung zusammengestellt:

- a) Be^{8*} $J = 2$, He^4 s -Welle; isotrop
- b) Be^{8*} $J = 0$, He^4 d -Welle; anisotrop
- c) Be^8 $J = 0$, He^4 \bar{d} -Welle; anisotrop
- d) 3 He^4 , Gesamtdrehimpuls 2; —

Die beiden ersten Fälle entsprechen dem beobachteten Übergang

†) Auf diesen Umstand hat auch Herr GOWARD (Malvern) in einer Privatmitteilung hingewiesen.

in ein angeregtes Be^8 und unterscheiden sich in der Art der Anregung. In letzterer Zeit fasst man das 3-MeV-Niveau des Be^8 eher als D-Zustand auf (vgl. GOLDHABER⁵), während WHEELER⁶) für die Beschreibung als S-Niveau eintrat.

Der Wirkungsquerschnitt für einen Photoeffekt berechnet sich nach

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} \left| \psi_E^* H_{E,0} \psi_0 \right|^2 \varrho_E. \quad (1)$$

ψ_E, ψ_0 sind die Wellenfunktionen des End- bzw. Anfangszustandes,

$$H_{E,0} = -i \frac{\hbar}{c} \left(\frac{2\pi \hbar c}{k_0} \right)^{1/2} \sum_s \frac{e_s}{m_s} e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_s)} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{r_s}) \quad (2)$$

der Operator der Wechselwirkung und ϱ_E die Dichte der Endzustände. Dabei bedeuten:

k_0 = Wellenzahl/ 2π des Lichtes,

\vec{k}_0/k_0 = Einheitsvektor in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes,

\vec{n} = Einheitsvektor in der Polarisationsrichtung des Lichtes,

e_s, m_s, \vec{r}_s = Ladung, Masse und Ortsvektor des s -ten Teilchens.

Für die Quadrupolwechselwirkung des Lichtes mit α -Teilchen wird (2)

$$H_{E,0}^Q = \frac{\hbar}{c} \frac{e}{2M} \left(\frac{2\pi \hbar c}{k_0} \right)^{1/2} \sum_s (\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_s) (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{r_s}), \quad (3)$$

e = Elektronenladung, M = Protonenmasse.

Es zeigt sich von grossem Vorteil, folgende Koordinaten einzuführen⁷⁾, die gegenüber Permutationen der Teilchen gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \vec{\varrho}_s &= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)/3 = \text{Ortsvektor des Schwerpunktes,} \\ \vec{\varrho} &= (3)^{1/2} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)/2, \\ \vec{q} &= -\vec{r}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_3)/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Die geometrische Bedeutung von $\vec{\varrho}$ und \vec{q} ist augenfällig. Nach Abseparation der Schwerpunktskoordinaten erhält man aus (3)

$$H_{E,0}^Q = \frac{\hbar}{c} \frac{e}{2M} \left(\frac{2\pi \hbar c}{k_0} \right)^{1/2} \{ (\vec{k}_0 \cdot \vec{\varrho}) (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\varrho}) + (\vec{k}_0 \cdot \vec{q}) (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_q) \}. \quad (5)$$

Durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung lässt sich (5) auf folgende Form bringen:

$$H_{E,0}^Q = \frac{2e}{3} (2\pi \hbar \omega)^{1/2} \{ (k_0 \cdot \vec{\varrho}) (\vec{n} \cdot \vec{\varrho}) + (k_0 \cdot \vec{q}) (\vec{n} \cdot \vec{q}) \}. \quad (6)$$

Die Wellenfunktion ψ_0 , die C^{12} im Grundzustand beschreibt, hat folgende Bedingungen zu erfüllen: 1. sie muss gegenüber Permutationen der Koordinaten symmetrisch sein und zum Gesamtdrehimpuls Null gehören; 2. sie soll in einem mit den Kerndimensionen vergleichbaren Abstand genügend rasch abfallen; 3. sie soll bei kleinen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage (gleichseitiges Dreieck!) in die analoge Entwicklung der Wellenfunktion übergehen, die drei durch rein elastische Kräfte gleicher Federkonstante verbundenen Massenpunkten entspricht⁸⁾. Bekanntlich besitzt ein solches System zwei Arten von Grundschwingungen, nämlich eine gegenüber Permutationen vollkommen symmetrische (Normalordinate η) und eine einfach entartete, bei der ein Teilchen gegen den Schwerpunkt der beiden anderen schwingt (Normalkoordinaten ξ, ζ). Bei Annahme reiner Zentralkräfte stehen die Frequenzen dieser beiden Schwingungstypen im Verhältnis $(2)^{1/2}$: 1.

Der gewählte Ansatz

$$\psi_0 = N_c e^{-\lambda(\varrho^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{2}{3} \lambda^2 \varrho^2 q^2 (1 - P_2) - \beta \left[1 - \frac{\lambda}{2} (\varrho^2 + q^2) \right]^2 \right\} \quad (7)$$

worin

$$\lambda = 4/9 a_0^2,$$

a_0 = Abstand Eckpunkt-Schwerpunkt im gleichseitigen Dreieck der Gleichgewichtslage,

$$P_2 = 2. \text{ Kugelfunktion,}$$

$$N_c = \text{Normalisationskonstante,}$$

erfüllt diese Voraussetzungen und lässt sich geschlossen integrieren. Für kleine Verrückungen geht sie über in

$$\psi_0 \cong 1 - \frac{8}{9 a_0^2} [\xi^2 + (1 - \beta) \eta^2 + \zeta^2]; \quad (7a)$$

der dimensionslose Parameter β regelt das Verhältnis der Grundfrequenzen, d. h. man hat im oben erwähnten Fall $\beta = 1 - (2)^{1/2}$.

Für den Endzustand setzen wir an (Fälle a) bis c)):

$$\psi_E = T^s \left\{ g(\varrho) \cdot e^{i \vec{k} \cdot \vec{q}} \sum_{m=-l}^{m=l} Z_l^m(\vartheta_q, \psi_q) \right\}; \quad (8)$$

darin ist $g(\varrho)$ die nur im Raumanteil normalisierte Wellenfunktion des Be⁸, Z_l^m entsprechend normalisierte Zugeordnete, \vec{k} der Wellenvektor des Teilchens 1 relativ zum Schwerpunkt der Teilchen 2,3.

$$T^s = (1,2) + (2,3) + (1,3),$$

wobei z. B. (1,2) die Vertauschung der Koordinaten den Teilchen 1 und 2 bewirkt. Für Fall d) schreiben wir

$$\psi_E = e^{i(\vec{k}_q \cdot \vec{\varrho} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})}, \quad (9)$$

wobei

$$\vec{k}_q = \frac{\sqrt{3}}{2} (\vec{k}_3 - \vec{k}_2), \quad \vec{k}_q = -\vec{k}_1 + \frac{\vec{k}_2 + \vec{k}_3}{2}$$

Für die Wellenfunktion des Be^8 machen wir den Ansatz (Fall a))

$$g(\varrho) = N_{\text{Be}} e^{-\alpha \varrho^2}, \quad (10)$$

in dem α ein Parameter ist, der durch die Dimensionen des Be-Kerns festgelegt wird.

Bei den Endzuständen, bei denen Be^8 zurückbleibt, ist die Energie E_f praktisch gleich (da $\hbar \omega/c \ll \hbar k$) der Energie der Relativbewegung des ausgesandten Alphateilchens in bezug auf den Schwerpunkt des Restkerns, d. h. bei einer Anregung des letzteren mit U MeV:

$$\hbar^2 k^2/2 \left(\frac{2}{3}\right) 4M = \hbar \omega - B - U \quad (11)$$

$$B = \text{Bindungsenergie von } \text{C}^{12} = 7,32 \text{ MeV}$$

Die Dichte der Endzustände wird

$$\varrho_E = \frac{k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3 dE_f} = \frac{k}{3\pi^3} \frac{M}{\hbar^2} d\Omega_k. \quad (12)$$

Die Ausrechnung für den Fall a) ergibt eine Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der γ -Energie, die eine dem experimentellen Befund analogen Verlauf hat; bei geeigneter Wahl der Parameter λ und α fällt das Maximum auf 18 MeV. In seiner Nähe ist σ von der Grössenordnung 10^{-29} cm^2 .

In die Matrixelemente gehen immer Integrale über $J_{l+1/2}(\text{kg})$ ein; es ergeben sich ganz natürlich für Übergänge, bei denen das Alphateilchen als d -Welle ausläuft, viel kleinere Wirkungsquerschnitte. Dies ist für den Übergang in drei unabhängige Alphateilchen in verstärktem Mass der Fall.

Da sich die Matrixelemente ähnlich verhalten dürften, auch wenn das Alphateilchen aus einem angeregten C^{12} ausgesandt wurde, ist es sehr wahrscheinlich, dass das 3-MeV-Niveau des Be^8 ein D -Zustand ist. Es wäre jedoch interessant, dies durch experimentellen

Nachweis der Isotropie des „ersten“ Alphateilchens zu erhärten.

Ein mit Alphamodell-Wellenfunktionen gerechneter direkter Photoeffekt stellt die Verhältnisse bei der Reaktion $^{12}\text{C}(\gamma, \alpha)\text{Be}^{8*}$ qualitativ befriedigend dar. Eine quantitative Übereinstimmung mit dem Experiment anzustreben, z. B. durch Wahl komplizierterer Wellenfunktionen, wäre angesichts des vorläufigen Charakters der Messergebnisse verfrüht. Aus demselben Grund kann eine Entscheidung zugunsten oder gegen die Compoundkern-Hypothese einstweilen nicht gefällt werden.

Über die hier angedeuteten Rechnungen, die auch für O^{16} ausgeführt werden, soll später ausführlich berichtet werden.

Literatur.

- 1) DENNISON, Phys. Rev. **57**, 454 (1940).
- 2) HÄNNI, TELEGGI und ZÜNTI, H. P. A. **21**, 203 (1948).
- 3) GOWARD, TELEGGI und WILKINS, unveröffentlicht.
- 4) HORNYAK & LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. **20**, 191; dort weitere Literaturangaben.
- 5) GOLDBABER, Phys. Rev. **74**, 1194 (1948).
- 6) WHEELER, Phys. Rev. **89**, 27 (1941).
- 7) VERDE, Helv. Phys. Acta **22**, 339 (1949).
- 8) WHEELER, Phys. Rev. **52**, 1099 (1937).

Wirkungsquerschnitt für den Spaltungsprozess an U^{238} mit der Lithium-Gammastrahlung ($h\nu \equiv 17,5 \text{ MeV}$)

VON G. CHARBONNIER, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (ETH. Zürich).

Die vorliegende Wirkungsquerschnittbestimmung erfolgte unter Verwendung der photographischen Methode: Eastman Kodak Platten (Type NTA, Emulsionsdicke 100μ) wurden in einer Lösung von relativ hoher Urankonzentration bis zur Sättigung getränkt, dann trocknen gelassen und anschliessend während mehrerer Stunden in definierter Geometrie der Lithium-Gammastrahlung exponiert. Die Lösung wurde durch Auflösen von Ammonium-Diuranat in einer wässrigen Ammonium-Carbonat-Lösung hergestellt. Der Urangehalt der in dieser Weise behandelten Emulsion betrug $2,8 \cdot 10^{18}$ U-Kerne pro cm^2 Plattenoberfläche. Er wurde nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt, nämlich 1. durch Auszählen der in der Schicht gebildeten Uran α -Spuren; 2. durch Vergleich der im Zählrohr gemessenen β -Aktivität der getränkten Emulsion mit der Aktivität eines U_3O_8 -Präparates. Beide Verfahren ergaben in-

nerhalb 5% den gleichen Wert für die Urankonzentration in der photographischen Schicht. Auf rund 17 cm² Plattenfläche entfielen insgesamt 25000 Spaltungsspuren. Unter Benützung der in einer früheren Arbeit¹⁾ bestimmten Absolutintensität der Lithium-Gammastrahlung erhält man für den Wirkungsquerschnitt der Photospaltung des U²³⁸-Kernes

$$\sigma(\gamma, f) = 4,6 \pm 1,5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$$

Dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit den Messungen von BALDWIN und KLAIBER²⁾, welche mit der Bremsstrahlung eines 100 MeV-Betatrons durchgeführt wurden. Hingegen ist er rund dreimal so gross wie der von ARAKATSU und Mitarbeitern ebenfalls mit der Lithium-Gammastrahlung gefundene Spaltungsquerschnitt [$\sigma(\gamma, f) = 1,67 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$]³⁾.

Die ausführliche Arbeit wird später in den H.P.A. erscheinen.

Spectre de masses obtenu par mesure du temps de vol

par R. KELLER, Genève.

Au lieu d'obtenir un spectre de masses en mesurant la déviation des particules dans un champ électrique ou magnétique on peut aussi l'obtenir par simple mesure du temps que mettent les particules pour parcourir une certaine distance^{4) 5)}. Les ions accélérés à un potentiel bien déterminé sont émis pendant un temps très court par rapport au temps de vol. Les ions de masse spécifique différente arrivent par paquets successifs sur la cage de FARADAY. Le courant ionique collecté est amplifié et envoyé sur un oscilloscope. Le spectre de masses est ainsi rendu visible entièrement et instantanément. Nous avons réalisé ceci avec une source d'ions déjà décrite⁶⁾ alimentée par des impulsions de courant d'une durée de 0,2 μ sec. Cette source d'ions du type PENNING a la caractéristique de posséder une tension de décharge presque indépendante du courant. Cette propriété permet de faire varier le courant de décharge très

¹⁾ H. WÄFFLER und O. HIRZEL, H.P.A. **21**, 200 (1948).

²⁾ G. C. BALDWIN und G. S. KLAIBER, Phys. Rev. **71**, 3 (1947).

³⁾ B. ARAKATSU u. a., Proc. Phys. Math. Soc. Japan **23**, 440 (1941).

⁴⁾ W. E. STEPHENS, Phys. Rev. **69**, 691 (1946).

⁵⁾ A. E. CAMERON, D. F. EGGERS, Rev. sc. instr. **19**, 605 (1948).

⁶⁾ R. KELLER, H. P. A. **22**, 78 (1949).

rapidement, la tension restant constante il n'y a pas de capacités à charger. Nous superposons à un courant de décharge continu très faible (1 mA) le courant pulsé en couplant l'amplificateur à la source d'ions avec un condensateur (voir fig. 1). L'amplificateur est

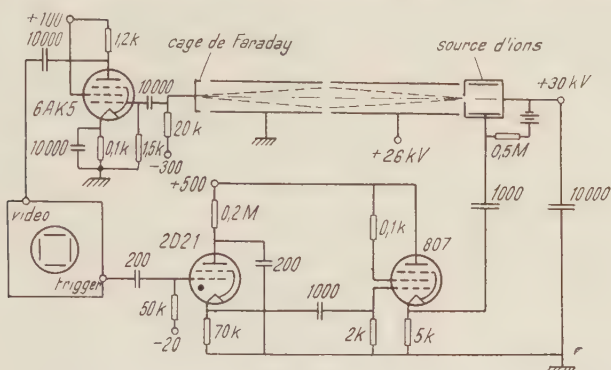


Fig. 1.

commandé par un oscilloscope type Du Mont 256-B. Ce dernier possède une sortie pulsée (trigger) de 2500 périodes par sec synchronisée avec le départ du spot. La tension de la cage de FARADAY, chargée par le courant ionique, amplifiée 5 fois par un pré-ampli et 100 fois par l'amplificateur compris dans l'oscilloscope (video) donne

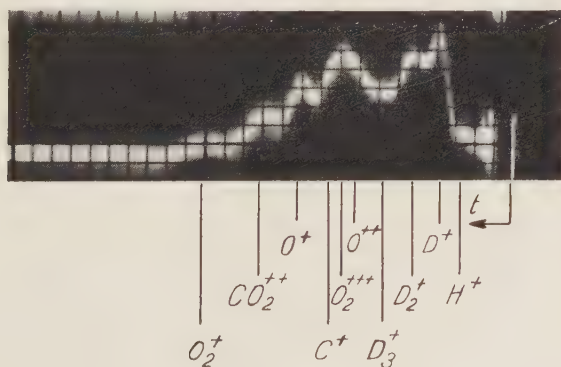


Fig. 2.

le spectre reproduit dans la fig. 2. Le gaz employé est du deutérium additionné de quelques % d'oxygène. La base de temps est de $0,25 \mu$ sec par division. Le départ du spot est un peu retardé et en outre mal déterminé sur le cliché. Basé sur la position des maximums le calcul détermine l'origine indiquée sur le cliché. Dans le tableau

qui suit figurent les temps de vol pour chaque sorte d'ions décelable, le carré du rapport : temps de vol sur temps de vol pour H^+ et l'identité probable des ions.

divisions	2,8	3,9	5,5	6,8	8,0	8,9	9,7	11,2	13,1	16,1
temps μ sec	0,70	0,98	1,38	1,70	2,00	2,22	2,43	2,80	3,27	4,02
$(t/tH)^2$	1,00	1,96	3,9	5,9	8,2	10,1	12,0	16,0	21,8	33,0
ions	H^+	D^+	D_2^+	D_3^+	O^{++}	O_2^{++}	C^+	O^+	CO_2^+	O_2^-

Voici pour terminer le calcul du temps de vol pour D^+ . Les ions sont accélérés à 4kV et parcourent un chemin de 0,38 m puis à 30 kV en parcourant 0,34 m. Le temps de vol pour D^+ est donné par la formule

$$t (\mu \text{ sec}) = 3,2 \frac{1(m)}{\sqrt{U(\text{kV})}}$$

ce qui fait 0,61 μ sec pour le premier trajet et 0,20 μ sec pour le second. Il faut aussi ajouter le temps que mettent les ions pour sortir de la source. La majeure partie des ions issus de la source sont produits au voisinage de l'orifice. Admettons qu'ils proviennent d'une région située à 6 mm du centre de l'orifice (diamètre de l'orifice = 3 mm). Le potentiel à cet endroit est évalué au quart de la tension de décharge qui est de 400 V. L'accélération étant quasi uniforme nous aurons un retard de 0,12 μ sec. Le temps de vol se totalise à 0,93 μ sec. Nous avons mesuré 0,98 μ sec. Il s'agit donc bien d'ions ayant une masse spécifique égale à 2.

Induction nucléaire, phénomènes de battements

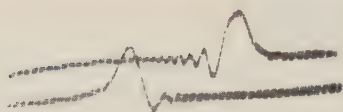
par C. R. EXTERMANN, P. DENIS et G. BÉNÉ, Genève.

La forme des signaux d'induction nucléaire, en particulier le nombre et l'amplitude des battements qui prolongent l'image du passage à la résonance, dépendent d'un paramètre p , fonction lui-même, pour un noyau donné, de deux variables qui sont: le temps de relaxation transversale T_2 d'une part, et la vitesse de passage à la résonance $\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}\right)_{\text{rés}}$ d'autre part:

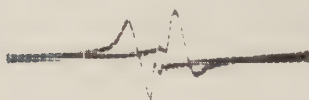
$$p = \sqrt{T_2 \cdot |\gamma| \cdot \left(\frac{\partial H_0}{\partial t}\right)_{\text{rés}}} \cdot T_2 = T_2 \sqrt{|\gamma| \cdot \left(\frac{\partial H_0}{\partial t}\right)_{\text{rés}}}$$

Nous avons tout d'abord vérifié cette relation en variant indépendamment T_2 et $\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}\right)_{\text{rés}}$.

Figure 1.
Variation de T_2 .



N/100



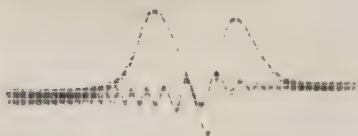
N/10



N/1

Fig. 2a.

Variation de la vitesse de passage
par l'amplitude de la modulation.



10 gauss



5 gauss



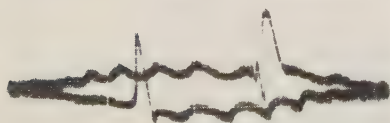
2,5 gauss

Fig. 2b.

Variation de la vitesse de passage
par la fréquence de la modulation
 50 sec^{-1}



16 sec^{-1}



Variation de T_2 (fig. 1).

La variation de T_2 est basée sur les mesures de BLOEMBERGEN (Thèse Leiden, 1948) qui a montré que le temps de relaxation transversale est une fonction linéaire de l'inverse de la concentration en ions paramagnétiques. Les oscillogrammes correspondent à des concentrations $N/1$, $N/10$, $N/100$ d'alun de chrome dans l'eau, pour une vitesse de passage fixe. Ils confirment la diminution du temps de relaxation quand la concentration augmente (disparition progressive des battements).

Variation de la vitesse de passage (fig. 2a et 2b).

Nous avons utilisé une modulation sinusoïdale du champ par des bobines d'Helmholtz. Dans ces conditions, la vitesse de passage est proportionnelle à la fréquence et à l'amplitude de la modulation. Faisant varier, pour un T_2 constant, l'un ou l'autre de ces paramètres, nous constatons un accord quantitatif avec la théorie.

Etant ainsi assurés de la validité de la formule proposée, nous utilisons les courbes calculées en fonction de p par JACOBSON et WANGSNES (Phys. Rev. **73**, 942, 1948) pour déterminer, par comparaison avec les oscillogrammes expérimentaux, la valeur de p correspondant à chaque cas. En déterminant $\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}\right)_{\text{rés}}$ par mesure directe, on peut employer l'équation définissant p pour calculer en valeur absolue le temps de relaxation transversale T_2 .

Nous avons effectué ce calcul pour des solutions aqueuses d'alun de chrome de concentration connue. Nos résultats complètent ceux que BLOEMBERGEN a obtenus pour d'autres ions paramagnétiques.

Sur le problème de l'élimination des divergences dans la théorie des champs quantifiés

par D. RIVIER et E. C. G. STUECKELBERG (Genève).

L'objet de cette communication est un travail à paraître dans les H.P.A. XXII, 3.

Zum Problem der Selbstspannung des Elektrons

VON FELIX VILLARS.

Ausführlichere Publikation erfolgt später.

Strahlungstheoretische Korrekturen zur Paarerzeugung und zur Bremsstrahlung

von RES JOST und J. M. LUTTINGER*) (Phys. Inst. ETH. Zürich).

Die neuere Quantenelektrodynamik gestattet es, die Divergenzschwierigkeiten, die der älteren Formulierung anhafteten, zu umgehen und so wenigstens Korrekturen der Ordnung e^2 zu den bekannten, störungstheoretisch berechneten Effekten zu bestimmen¹⁾.

Wenn schon ihre Methoden nicht vollständig ohne Zusatzvorschriften, die der Theorie an sich fremd sind, auskommen²⁾, so sind die so gewonnenen Resultate doch glaubwürdig und stimmen mit der Erfahrung überein³⁾. Der Vergleich mit dem Experiment bezieht sich bisher aber nur auf nichtrelativistische Teilchenenergien, und es erscheint wünschenswert durch Versuche mit energischen Teilchen die Gültigkeit der jetzigen Methoden und Ansätze weiterhin zu erproben. In Frage stehen dabei Streuprozesse. Für die elastische Streuung an einem äusseren Kraftfeld hat J. SCHWINGER die e^2 -Korrektur ohne Vernachlässigung in Bornscher Näherung ausgerechnet⁴⁾.

Comptoneffekt⁵⁾, Paarerzeugung und Bremsstrahlung können nach denselben Methoden behandelt werden, ohne dass neue grundsätzliche Schwierigkeiten auftreten. Auch die formalen Methoden von J. SCHWINGER, insbesondere die Methode der Zusammenfassung von Termklassen in der Form von Integralen über Ableitungen der δ -Funktionen sind anwendbar⁶⁾. Die Massenrenormalisation kann vereinfacht werden durch explizites Einführen des störungsmässig berechneten Selbstenergieoperators

$$\text{const.} \int d^3x \int d^4x' \bar{\psi}(x) \gamma_\sigma [\bar{D}(x-x') S^1(x-x') + D^1(x-x') \bar{S}(x-x')] \gamma_\sigma \psi(x') + \text{c. c.}$$

an Stelle von

$$\delta m \int d^3x \bar{\psi}(x) \psi(x).$$

Hinsichtlich des Einflusses anderer geladener Teilchen, die zwar im Anfangs- und Endzustand nicht auftreten, aber in den Zwischenzuständen eine wesentliche Rolle spielen können, gilt, dass sie die e^2 -Korrektur für Effekte ohne äusseres Feld (z. B. Comptoneffekt) nicht verändern, für Effekte mit einem äusseren Feld (Elastische Streuung, Paarerzeugung usw.) aber diese Korrektur nur verändern, soweit sie, durch die Vakuumpolarisation, das streuende Feld abändern.

*) National Research Fellow (U. S. A.).

Die Ausrechnung der Korrekturen für Paarerzeugung und Bremsstrahlung für den extrem relativistischen Fall ist im Gange und wir hoffen in naher Zukunft Resultate mitteilen zu können.

Literatur.

¹⁾ Z. B. J. SCHWINGER, Quantum Electrodynamics, I. Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); II. Phys. Rev. **75**, 651 (1949); III. Im Druck. Wir danken Herrn J. SCHWINGER, dass er uns die Arbeit vor der Drucklegung zur Verfügung gestellt hat.

²⁾ W. PAULI and F. VILLARS, Rev. Mod. Phys. im Druck.

³⁾ Lamb-shift und anomales magnetisches Moment des Elektrons, z. B. H. A. BETHE, Solvay Report 1948.

⁴⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **75**, 898 (1949).

⁵⁾ R. SCHAFFROTH, Diskussionsbemerkung Pauli Solvay, Report 1948, Phys. Rev. **75**, 1111 (1949); H.P.A. dieses Heft.

D. FELDMANN and J. SCHWINGER, Phys. Rev. **75**, 338 (1948).

⁶⁾ J. SCHWINGER, l. c., Teil III.

Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel

von R. SCHAFFROTH (ETH. Zürich).

Bekanntlich sind in der letzten Zeit von der neuen Quantenelektrodynamik Methoden entwickelt worden, die eine physikalisch begründete und in sich konsistente Elimination der Divergenzen gestatten¹⁾²⁾³⁾. Damit sind die strahlungstheoretischen Korrekturen zu vielen Problemen einer Berechnung zugänglich geworden, bei denen bis anhin die Theorie wegen des Auftretens der erwähnten Divergenzen keine Aussagen machen konnte.

Wir haben diese Verfahren verwendet, um die e^6 -Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel zu bestimmen. (Wir verwenden durchwegs natürliche Heaviside-Einheiten $\hbar = c = 1$; damit ist $e^2 = 4\pi/137$).

Ausgehend von der Schrödingergleichung des Systems

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + H) \Psi \quad (1)$$

wo H_0 die Hamiltonfunktion der ungestörten Felder,

H die Wechselwirkungsenergie bedeutet,

gehen wir, in Anlehnung an SCHWINGER²⁾, zu einer anderen Darstellung über, in welcher die ungestörte Zeitabhängigkeit auf die Observablen übergewälzt wird: der sog. „interaction representation“. Im Sinne einer Renormalisation der Massen muss man dabei die Selbstenergie als untrennbar mit der Masse verknüpft betrachten und mit in die Zeitabhängigkeit nehmen. Wir müssen also für diese ansetzen:

$$\Psi = e^{i(H_0 + W)t} \Psi' \quad (2)$$

Für den Selbstenergieoperator W setzt man vorteilhaft die Form ein, die sich aus der Störungstheorie ergibt:

$$W = \frac{1}{4} \int d^3 x \int d^4 x' (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu [D_1(x-x') \bar{S}(x-x') + \bar{D}(x-x') S_1(x-x')] \gamma_\mu \psi(x')) + \text{conj.} \quad (3)$$

da der direkte Ansatz einer Massenrenormalisation

$$W^4 = \delta m \int d^3 x (\bar{\psi}(x) \psi(x)) \quad (4)$$

auf Schwierigkeiten führt.

Die transformierte Schrödingergleichung wird

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = (H - W) \Psi' \quad (5)$$

Ausserdem ist es wesentlich, durch eine weitere kanonische Transformation eine Umdefinition der Felder vorzunehmen. Ihre Bedeutung ist allgemein, die Felder derart zu entkoppeln, dass ein einzelnes freies Teilchen von der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld befreit wird. Diese Transformation kann sinngemäss nur zusammen mit der oben bereits durchgeführten Massenrenormalisation vorgenommen werden.

Um die Lorentzinvarianz nicht zu zerstören, ist es vorteilhaft, die longitudinalen Photonen nicht zu eliminieren. Man setzt also für die Wechselwirkung an:

$$H = - \int d^3 x j_\mu(x) A_\mu(x) \quad (6)$$

wo $j_\mu(x)$ der Strom des Elektronenfeldes, $A_\mu(x)$ das Viererpotential ist, das in der gewöhnlichen Darstellung (1) die Gleichung erfüllt: $\square A_\mu = -j_\mu$.

Dabei muss die Lorentzsche Nebenbedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \cdot \Psi = 0 \quad (7)$$

Es lässt sich zunächst zeigen, dass wir die Nebenbedingung (7) vernachlässigen dürfen, wenn wir das Photonenvakuum definieren als den Zustand, wo weder transversale noch longitudinale Photonen vorhanden sind.

Auf dieser Grundlage führt man nun die Störungstheorie durch und berechnet die e^6 -Terme in der Entwicklung des Streuquerschnittes für den Comptoneffekt:

$$d\sigma = e^4 d\sigma_4 + e^6 d\sigma_6 + \dots \quad (8)$$

wo $e^4 d\sigma_4$ der Klein-Nishina-Querschnitt ist. Die zunächst erhaltene Formel enthält noch unbestimmte Ausdrücke und erhält erst durch Anwendung eines konsistenten Limitierungsverfahrens einen eindeutigen Sinn. Die Anwendung der Methode der Regulatoren von PAULI und VILLARS⁴⁾ liefert einen wohlbestimmten Ausdruck für $d\sigma_6$, bei dem die Ultraviolett-schwierigkeiten vollständig verschwinden. Er enthält indessen noch eine Divergenz im Ultraroten, deren Existenz bekanntlich wohlbegründet ist und daher rührt, dass tatsächlich bei jedem Streuprozess ausser dem gestreuten unendlich viele Photonen beliebig kleiner Energie emittiert werden⁵⁾. Die einzige physikalisch sinnvolle Fragestellung ist die nach dem Wirkungsquerschnitt $d\sigma_6'(\mu)$ eines Prozesses, bei dem ausser dem in ein bestimmtes Raumwinkelement $d\Omega$ gestreuten Photon keine weiteren Photonen mit einer Energie $>\mu$ emittiert werden. Dabei ist μ eine Schranke, für die eine untere Grenze festgelegt ist durch das Gebiet, wo die Mehrfachprozesse von Bedeutung werden, und die nach oben den experimentellen Beobachtungsmöglichkeiten angepasst werden kann. Für diesen Wirkungsquerschnitt $d\sigma_6'$ erhält man einen endlichen Wert. Eine eventuell darin enthaltene Renormalisation der Ladung kann durch geeignete Wahl der Regularisierungsvorschrift zum Verschwinden gebracht werden. Ihre genaue Festlegung geschieht durch die Forderung dass im unrelativistischen Grenzfall die Korrekturen verschwinden sollen³⁾. Physikalisch bedeutet das, dass man die Elementarladung durch die Thomsonsche Streuformel definiert.

Die Auswertung ist erst für kleine Energien durchgeführt⁶⁾. Die Rechnung für den Fall extrem-relativistischer Energien ist im Gange.

Literatur.

¹⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **73**, 415 (1948); A. W. LEWIS, Phys. Rev. **73**, 173 (1948); S. T. EPSTEIN, Phys. Rev. **73**, 177 (1948); S. TOMONAGA, Phys. Rev. **74**, 224 (1948) und Progr. Th. Phys. **21**, 183 (1948).

²⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); Phys. Rev. **75**, 651 (1949).

³⁾ E. CORINALDESI und R. JOST, HPA. **21**, 183 (1948).

⁴⁾ PAULI und VILLARS, im Druck.

⁵⁾ R. JOST, Phys. Rev. **52**, 54 (1947).

⁶⁾ R. SCHAFFROTH, Phys. Rev. **75**, 1111 (1949).

Die Curiekonstante von BaTiO_3 -Einkristallen

von H. GRÄNICH (ETH, Zürich).

Der Verlauf der Dielektrizitätskonstanten ϵ der Seignetteelektrika lässt sich oberhalb der Curietemperatur Θ gut durch ein Curie-Weiss-Gesetz wiedergeben.

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{C}{T - \Theta} \quad (1)$$

Die Curiekonstante C ist für die Theorie der Seignettelektrizität von grossem Interesse und daher wurden an besonders reinen, fast farblosen BaTiO_3 -Einkristallen neue dielektrische Messungen vorgenommen.

Die untersuchten Kristalle bildeten gut vermessbare Parallelepipede. Sie besaßen im Curiegebiet vorwiegend Domänen, deren a -Richtung in der Richtung des angelegten Feldes lag. Der verwendete Nullindikator der Kapazitätsmessbrücke war so empfindlich, dass bei einer Frequenz von 15 kHz eine Spannung von nur



Fig. 1.

0,16 Volt eff. am Kristall zur Messung genügte. Dies entspricht einer maximalen Feldstärke im Kristall von 6 Volt/cm. Vorversuche zeigten, dass in der Nähe des Curiepunktes die DK praktisch linear mit der Messfeldstärke zunimmt, und zwar ergibt das grösste verwendete Feld von 100 Volt/cm einen Zuwachs für ϵ von zirka 3%. Die durch eine Feldstärke von 6 Volt/cm verursachten Fehler sind also weit innerhalb der Messgenauigkeit der Brücke.

In der graphischen Darstellung (Fig. 1) wurden die Mittelwerte von $1/\varepsilon$ zweier Kristalle als Funktion der Temperatur aufgetragen. Man erhält eine Gerade, was zeigt, dass im Temperaturbereich bis $T - \Theta = 100^\circ$ die Untergrunds-DK ε_0 gegenüber dem temperaturabhängigen Anteil vernachlässigt werden darf. Aus der Neigung der Geraden ergibt sich eine Curiekonstante von 600000. Unerwartet ist aber, dass die Gerade die Abszisse nicht im Curiepunkt $\Theta = 120,0^\circ \text{ C}$, wo das Auftreten der spontanen Polarisierung beobachtet wird, sondern erst in einem extrapolierten Schnittpunkt bei $85,6^\circ \text{ C}$ schneidet.

Eine mögliche Erklärung ist die, dass es sich in Analogie zu den Ferromagnetika um einen paraelektrischen Curiepunkt Θ' handelt, was bei Seignetteelektrika allerdings bisher nie beobachtet wurde. Dieser paraelektrische Curiepunkt könnte aber nicht erreicht werden, da unterhalb 120° C der Zustand spontaner Polarisierung der stabilere ist.

Es gibt aber auch noch eine andere Deutungsmöglichkeit. Auch bei aufgedampften Silberelektroden sind Schichten niedriger DK oder Spalte an der Oberfläche oder im Innern des Kristalls denkbar. Setzt man für den homogenen Kristall ein Curie-Weiss-Gesetz von der Form (1) voraus, so misst man, wenn a die Kristalldicke und s die mittlere totale Spaltbreite bedeuten, eine scheinbare DK ε_g :

$$\varepsilon_g = \frac{a\varepsilon}{a+s\varepsilon} = \frac{a\varepsilon_0(T-\Theta)+aC}{(a+s\varepsilon_0)(T-\Theta)+sC} \quad (2)$$

In der schon vorhin angewandten Näherung ε_0 — klein, wird somit:

$$\varepsilon_g = \frac{C}{T-\Theta'} \quad (3)$$

wobei ein scheinbarer Curiepunkt Θ' auftritt:

$$\Theta' = \Theta - \frac{aC}{s}$$

Bei einer mittleren Kristalldicke von $a = 0,365 \text{ mm}$ erhält man daraus einen „Spalt“ von 209 Å. Andererseits kann der Spalt auch unmittelbar aus der DK-Spitze beim Curiepunkt berechnet werden, weil dort die DK als praktisch unendlich angesehen werden darf. Es ergibt sich

$$s = \frac{a}{\varepsilon_{g\Theta}} = 214 \text{ Å}$$

Wird mit diesem Werte von s mit Ausgleichsrechnung und mit der genauen Formel (2) die Curiekonstante bestimmt, so findet man

$$C = (650 \pm 50) \cdot 10^3$$

oder bezogen auf die Suszeptibilität: $\frac{C}{4\pi} = 52000^\circ$.

Bemerkenswert ist aber, dass dieser im Vergleich zu früher veröffentlichten Messungen hohe C-Wert unabhängig davon ist, wie der vom Curiepunkt Θ abweichende Schnittpunkt Θ' der Curie-Weiss-Geraden gedeutet wird. Neuere Messungen an Kristallen anderer Zuchten ergaben jedoch individuell verschiedene extrapolierte Schnittpunkte, was eher gegen die Möglichkeit eines paraelektrischen Curiepunktes spricht.

Elastische Messungen an piezoelektrischen Kristallen mit der Methode von Schäfer und Bergmann

von F. JONA (ETH. Zürich).

Die Methode von SCHÄFER und BERGMANN für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten von durchsichtigen Stoffen mittels Beugung des Lichtes an Ultraschallwellen¹⁾ wurde zur Untersuchung der elastischen Eigenschaften von Seignettesalz, schwerem Kaliumphosphat und Natriumchlorat verwendet. Die Untersuchung von Seignettesalz mit der Anordnung von SCHÄFER und BERGMANN bietet grosse Schwierigkeiten, die im folgenden kurz aufgezählt sind:

1. Herstellung von grossen, *glasklaren* Stücken (ca. 1 cm³), welche keine inneren Inhomogenitäten, Verunreinigungen oder Risse aufweisen. Das Unterschreiten des Curiepunktes beim Wachstum (Absenken der Temperatur einer bei 40° C gesättigten wässrigen Lösung) und die schlechten mechanischen Eigenschaften des Stoffes sind die Hauptursachen für das Auftreten von Störungen im Kristall.
2. Erreichung einer optischen Politur der Oberfläche, welche die Abbildung einer Lochblende von etwa $\frac{3}{100}$ mm Durchmesser auf einem 2 m weit entfernten Schirm sauber erlauben soll. Die Kristalle müssen in trockenem Raum aufbewahrt und nie mit nackten Fingern angefasst werden.
3. In der Nähe des oberen Curiepunktes, also bei Zimmertemperatur, ist die Dämpfung im Kristall vor allem für die Transversalwelle, welche mit der Scherung x_4 verbunden ist (Elastizitätskonstante c_{44}), infolge der Verluste, die von der piezoelektrischen Hysteresis herrühren²⁾, ausserordentlich gross³⁾4). Die von jener Welle hervorgerufenen Dichteänderungen sind deshalb meistens zu klein, um eine Beugung des Lichtes zu ermöglichen.
4. Durch den Schwingungsvorgang erwärmt sich das untersuchte Stück so, dass schon nach einigen Sekunden eine Verwischung der Beugungspunkte auftritt und die Politur beschädigt wird. Der Kristall muss mit einem kalten und trockenen Luftstrom gekühlt werden. Die Aufnahmen werden in Etappen von 5 bis

10 Sekunden ausgeführt. Dazwischen liegen Pausen von 1 bis 2 Minuten.

In Fig. 1 ist die Beugungsaufnahme von Seignettesalz bei Durchstrahlung in Richtung der kristallographischen c -Achse wiedergegeben. Der Kristall wurde mittels einer Piezoquarzplatte in der Richtung der Winkelhalbierenden der a - und b -Achse mit einer Frequenz von 19.6 MHz erregt. Kleine innere Störungen und kleine Inhomogenitäten der Politur konnten nicht vermieden werden, so dass um den Zentralfleck ziemlich viel störendes Streulicht vorhanden ist. Die Figur erlaubt die Bestimmung der Konstanten c_{11} , c_{22} , c_{66} und c_{12} . In Fig. 2 ist die Beugungsaufnahme von Seignettesalz bei Durchstrahlung in Richtung der kristallographischen b -Achse wiedergegeben. Die Erregung geschah in Richtung der a -Achse mit ca. 18 MHz.

Die Aufnahme zeigt Punkte der $\pm 1.$, $\pm 2.$, $\pm 3.$ Ordnung. Sie ermöglicht die Messung der Elastizitätskonstanten c_{11} , c_{33} , c_{55} und c_{13} .

Beide Beugungsfiguren wurden bei Zimmertemperatur aufgenommen.

Die Beugungsfigur bei Durchstrahlung in der seignetteelektrischen a -Richtung ist vorläufig unvollständig. Der innere Teil der Figur, der von longitudinalen und quasi-longitudinalen Wellen herrührt, ist gut sichtbar. Der äussere Teil, der von Transversalwellen hervorgerufen wird, ist bei den Untersuchungen bei Zimmertemperatur infolge der grossen Dämpfung nicht zu beobachten. Die berechneten Elastizitätskonstanten stimmen gut mit den Literaturwerten überein.

Mit derselben Methode wurden die elastische Eigenschaften vom schweren Kaliumphosphat (KD_2PO_4) und vom kubischen piezoelektrischen Kristall NaClO_3 untersucht.

Zwischen den mit der Anordnung von SCHÄFER und BERGMANN optisch bestimmten Elastizitätskonstanten und den aus der Resonanzfrequenz von Stäben und Platten⁵⁾ berechneten sind Diskrepanzen vorhanden, die vor allem daher kommen, dass die Theorie von FUES und LUDLOFF¹⁾ für die Auswertung der Beugungsfiguren nur für nicht piezoelektrische Kristalle streng richtig ist. Unsere Rechnungen zeigen, dass z. B. im Falle des KH_2PO_4 die Grösse c_{66}^E (d. h. bei konstantem elektrischem Feld) gemessen wird, während andere Autoren⁶⁾ behaupten, die Grösse c_{66}^D (d. h. bei konstanter dielektrischer Verschiebung) gemessen zu haben. Die entsprechende Korrektur ist bekanntlich bei Temperaturen weit oberhalb des Curiepunktes, also für KH_2PO_4 bei Zimmertemperatur, kaum

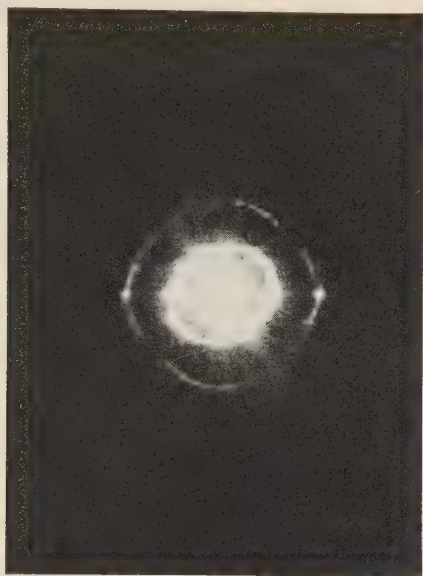


Fig. 1.

Seignettesalz: Beugungsfigur bei Durchstrahlung in Richtung der c -Achse.

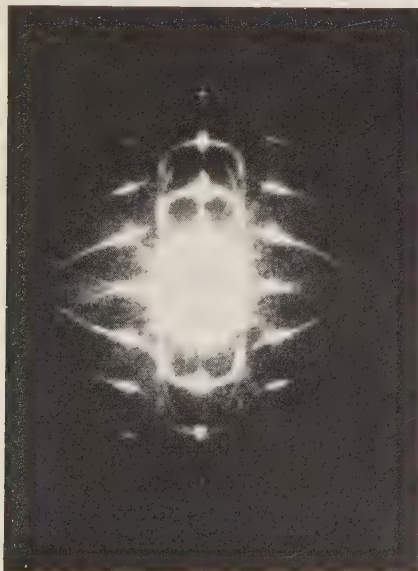


Fig. 2.

Seignettesalz: Beugungsfigur bei Durchstrahlung in Richtung der b -Achse.

von Belang (etwa 1%), wird aber merklich in der unmittelbaren Nähe des Curiepunktes.

Die Diskrepanzen lassen sich jedoch nicht allein mit dem Unterschied zwischen c^D und c^E erklären. Als weitere Ursachen der Unstimmigkeiten kommen in Frage:

1. Bei den benützten Frequenzen verursacht die piezoelektrisch bedingte Polarisierung einen elastischen Randeffect, infolgedessen der Kristall nicht mehr frei, sondern teilweise geklemmt schwingt. Das Studium dieses Randeffectes ist im Gange.
2. Es ist möglich, dass die Elastizitätskonstanten eine Frequenzabhängigkeit aufweisen. Eine solche ist bei KH_2PO_4 bei Zimmertemperatur kaum zu erwarten, weil die Dielektrizitätskonstante ϵ_c dieses Salzes bis zu sehr kurzen Wellen⁷⁾ keine Frequenzabhängigkeit zeigt. Eine Dispersion der Elastizitätskonstanten liesse sich sicher auf eine Dispersion der Dielektrizitätskonstante zurückführen. Es ist aber anzunehmen, dass die Elastizitätskonstanten am Curiepunkt frequenzabhängig werden. In dieser Hinsicht wäre eine Messung der Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ϵ_c von KH_2PO_4 am Curiepunkt sehr zu begrüssen.

Literatur.

¹⁾ C. SCHÄFER und L. BERGMANN, E. FUES und H. LUDLOFF, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1935.

²⁾ B. MATTHIAS, H.P.A. XVI, 99 (1943).

³⁾ H. B. HUNTINGTON, Phys. Rev. **72**, 321 (1947).

⁴⁾ W. J. PRICE, Phys. Rev. **75**, 946 (1949).

⁵⁾ D. REVERDIN, Diplomarbeit ETH. 1946, unveröffentlicht.

⁶⁾ B. ZWICKER, H.P.A. XIX, 523 (1946).

⁷⁾ W. P. MASON, Phys. Rev. **69**/1, 188 (1946) und briefliche Mitteilung von W. MERZ (Messungen von W. A. Yager).

Feldabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_c bei KH_2PO_4

VON H. BAUMGARTNER (ETH. Zürich).

Im Temperaturbereich knapp oberhalb des Curiepunktes (-145 bis -150°C) ist ϵ_c stark feldabhängig (siehe Fig. 1). Die Kapazität eines Kristallkondensators sinkt, sobald der Wechselspannung der Messbrücke eine Gleichspannungskomponente beigelegt wird. Um die differentielle Suszeptibilität zu erhalten, darf man nur mit sehr kleinen Wechselspannungen messen. Im gleichen Temperaturbereich existiert ein beträchtlicher elektrokalorischer Effekt, der einen Einfluss auf die Feldabhängigkeit der DK ausübt. Eine Feldänderung dE bewirkt eine Temperaturänderung $dT = \frac{T}{c_E} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_E dE$. Die

Temperatur des Kristalls schwankt im Takte der Brückenwechselspannung (1000 Hz). Diese Temperaturänderungen bewirken, da die Polarisierung bei einem konstanten Vorfeld stark temperatur-

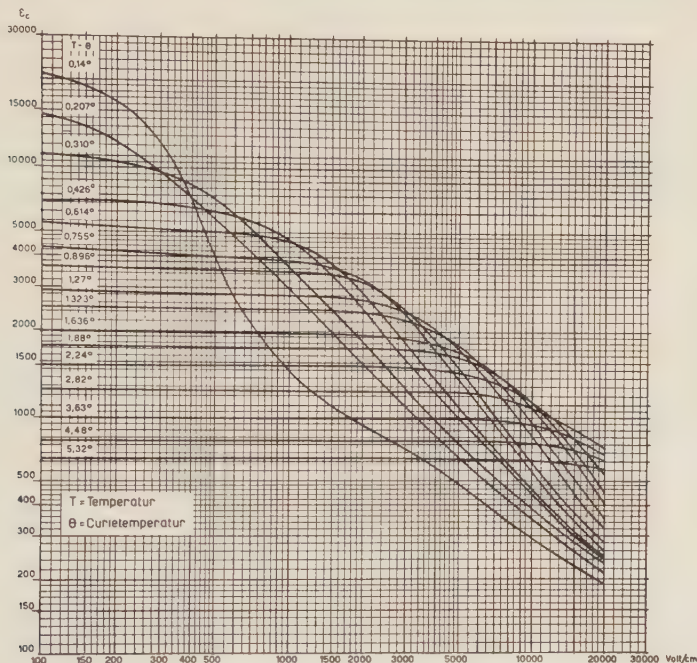


Fig. 1.

Feldabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ε_c .

abhängig ist, zusätzliche Polarisationsänderungen $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E dT$ die den ursprünglichen durch das Feld an und für sich hervorgerufenen $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T dE$ entgegengesetzt sind.

Es gilt also:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T dE + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E dT \text{ wobei } dT = \frac{T}{c_E} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E dE$$

und c_E = spezifische Wärme bei konst. Feld E .

Die Kombination dieser zwei Gleichungen führt zur partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T} + \frac{T}{c_P} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T}$$

$\frac{\epsilon - 1}{4\pi}$ adiabatische gemessene Suszeptibilität. c_E muss durch das feld- und temperaturunabhängige c_P (spez. Wärme bei konstanter Polarisierung) ersetzt werden, wobei gilt:

$$c_E = T \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_E^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_T} + c_P$$

Die Integration der Differentialgleichung lässt sich mit dem Ansatz: $P = \Phi \left(\frac{E + \gamma P}{T} \right)$ ohne Schwierigkeiten durchführen.

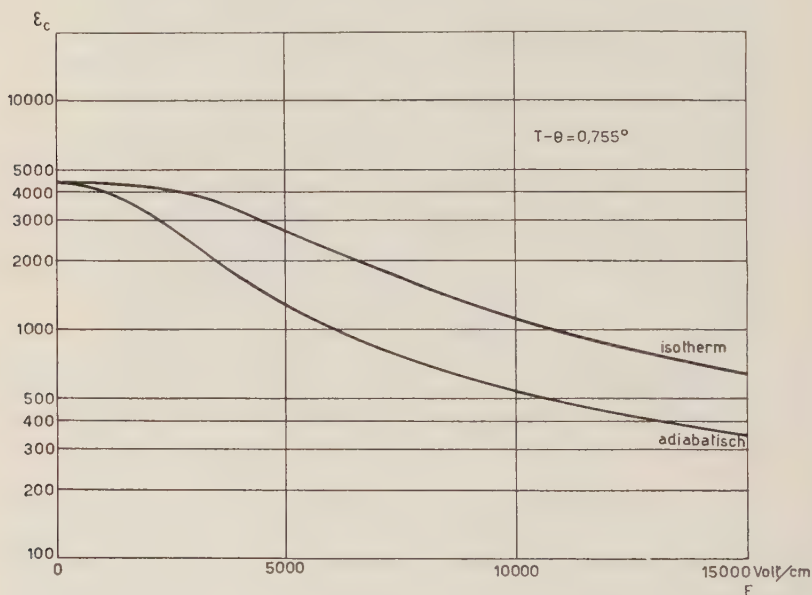


Fig. 2.

Adiabatische und isotherme Dielektrizitätskonstante.

Die Resultate der Integration bei verschiedenen Temperaturen stimmen unter sich überein und stehen in Einklang mit den Werten von Φ , die sich aus der Temperaturabhängigkeit der spontanen Polarisierung berechnen lassen. Der verwendete Ansatz ist also gerechtfertigt.

Fig. 2 zeigt für die Temperatur $T = \Theta = 0,755^\circ$ das gemessene adiabatische und das aus der Integration berechnete isotherme ϵ_c .

Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Eine verallgemeinerte Theorie der Seignette-Elektrizität

von A. VON ARX (ETH. Zürich).

Die meisten Theorien der Seignette-Elektrizität beruhen in Analogie zur Weiss'schen Theorie des Ferromagnetismus auf der Annahme, dass elektrische Dipole durch Lorentz'sche *innere Felder* gekoppelt sind. Die als Lorentzfaktoren¹⁾ bezeichneten Koeffizienten, welche die Dipolwechselwirkung beschreiben, haben bestimmte Symmetrieeigenschaften, die in früheren Arbeiten unbeachtet blieben. Auf Grund dieses Symmetriecharakters gilt die aus der ursprünglichen eindimensionalen Theorie folgende Beziehung

$$C = L'_0 \frac{(P_s)_{\max}^2}{kN} ; \quad L'_0 = \left. \frac{dL(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (1)$$

zwischen der Curiekonstanten C , dem Sättigungswert der spontanen Polarisation $(P_s)_{\max}$ und der Anzahl der permanenten Dipole pro Volumeneinheit N auch in einer stark erweiterten dreidimensionalen Theorie, die auf folgenden Voraussetzungen beruht:

1. Polarisationsträger sind einerseits permanente Dipole in einer einzigen, beliebig zähligen kristallographischen Punktlage und andererseits induzierte Dipole (Atom- und Elektronenpolarisation) in beliebiger Anzahl.

2. Die Richtung des mittleren Dipolmomentes der permanenten Dipole ist fest vorgegeben: entweder, weil der Dipol nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat (KH_2PO_4) oder aus Symmetriegründen (BaTiO_3).

3. Die seignette-elektrische Achse ist polar.

4. Die Untergrundpolarisierbarkeit und die Lorentzfaktoren sind temperatur- und polarisationsunabhängig.

Substanz	$(P_s)_{\max}$ $\text{g}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{-\frac{1}{2}} \text{s}^{-1}$	N cm^{-3}	L'_0	$L'_0 \frac{(P_s)_{\max}^2}{kN}$	C	Literatur
KH_2PO_4	$1,5 \cdot 10^4$	$2,06 \cdot 10^{22}$	1	79	259	^{1) 2)}
KH_2AsO_4	$1,5 \cdot 10^4$	$1,91 \cdot 10^{22}$	1	85	265	¹⁾
BaTiO_3	$4,8 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^{22}$	$\frac{1}{3}$	357	52000	^{3) 4)}

Die Form der allgemeinen Langevinfunktion $L(x)$ hängt von der Anzahl der Einstellungsmöglichkeiten des permanenten Dipols ab. Da die in die „Weiss'sche Identität“ (1) eingehenden Grössen ziemlich gut bekannt sind, eignet sie sich zum Vergleich zwischen Theorie und Experiment.

Für die Seignette-Elektrika der KH_2PO_4 -Gruppe nehmen wir an, dass die Protonen sich wie Dipole mit 2 Einstellungsmöglichkeiten ver-

halten, da der Wasserstoffbrücke polarer Charakter zukommt: $L(x) - \text{Tg } x$ und $L_0' - 1$. Die Diskrepanz um einen Faktor 3 zwischen gemessenen und theoretischen Werten ist nicht schwerwiegend, da die Beschreibung der Dipolwechselwirkung durch Lorentz'sche Felder als erste Approximation eines äusserst komplizierten Kooperationsphänomens gewertet werden muss.

Für BaTiO_3 ergibt sich für das von MASON und MATTHIAS⁵⁾ vorgeschlagene Modell eines permanenten Dipols mit 6 Einstellmöglichkeiten eine grössenordnungsmässige Abweichung zwischen Theorie und Experiment; die Annahme permanenter, durch Lorentz'sche Felder gekoppelter Dipole steht somit im Widerspruch zu den Messungen. Dieses Resultat widerspricht den Ergebnissen von MASON und MATTHIAS, obschon ihre Theorie im wesentlichen ein Spezialfall unserer Berechnungen ist (nur ein Lorentzfaktor und eine Untergrundpolarisierbarkeit) und deshalb auf eine zu (1) analoge Beziehung führen sollte. Diese Diskrepanz hat zwei Ursachen: 1. ist in der erwähnten Arbeit die mathematische Behandlung der Untergrundpolarisation inkonsequent und 2. verwenden die Autoren eine Curiekonstante, die gemäss neueren Messungen⁴⁾ erheblich zu klein ist.

Die Seignette-Elektrizität von BaTiO_3 lässt sich prinzipiell auch ohne die Annahme permanenter Dipole als Phänomen der Untergrundpolarisation beschreiben. Ein quantitativer Vergleich zwischen einer solchen Theorie und den Messresultaten ist ausgeschlossen, da genaue Angaben über die Atom- und Elektronenpolarisierbarkeiten und ihre Temperaturabhängigkeit fehlen. Immerhin kann aus den numerischen Berechnungen der Schluss gezogen werden, dass dieser Mechanismus infolge der hohen Elektronenpolarisierbarkeit der Sauerstoffionen O^{--} , die sich auch in einem grossen Brechungsindex $n = 2,42^6)$ äussert, für das dielektrische Verhalten von BaTiO_3 wesentlich sein könnte. Im paraelektrischen Temperaturgebiet resultiert ein Curie-Weiss'sches Gesetz, dessen Konstante die richtige Grössenordnung hat. Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Literatur.

- 1) BUSCH, H.P.A. **11**, 269 (1938).
- 2) VON ARX und BANTLE, H.P.A. **16**, 211 (1943).
- 3) HULM, Nature **160**, 127 (1947).
- 4) GRÄNICHNER, H.P.A. **22**, 394 (1949).
- 5) MASON und MATTHIAS, Phys. Rev. **74**, 1622 (1948).
- 6) BUSCH, FLURY und MERZ, H.P.A. **21**, 212 (1948).

**Pouvoir rotatoire et dichroïsme circulaire du méthyléthylecarbinol
(C₄H₁₀O) en mécanique asymptotique quantifiée**

par A. PETERMANN, Lausanne.

Kein Manuskript eingegangen.

**Les ondes mécaniques dans les milieux élastiques, visqueux et plastiques
et dans les milieux piézoélectriques**

par R. MERCIER (Ecole polytechnique, Lausanne).

Lors de la propagation d'ondes mécaniques planes dans un milieu indéfini, celui-ci subit des dilatations et des glissements locaux. Si le milieu, supposé isotrope, est élastique, visqueux et plastique, ces trois propriétés joueront un rôle aussi bien dans la dilatation locale que dans les glissements. Or, il est possible de mettre ce rôle en évidence par un formalisme très symétrique. En effet, l'hypothèse la plus simple satisfaisant au principe de superposition consiste à admettre en premier lieu une relation différentielle entre la tension normale moyenne en un point (représentée par la trace du tenseur ψ des tensions) et la dilatation locale (mesurée par la trace du tenseur Φ des déformations). Cette relation revêtira la forme:

$$\text{tr } \dot{\psi} + f' \cdot \text{tr } \psi = \frac{3}{\kappa} \cdot \text{tr } \dot{\Phi} + 3 \lambda' \cdot \text{tr } \ddot{\Phi} \quad (1)$$

La valeur $1/3 \text{ tr } \psi$ joue le rôle d'une extension de la notion de pression (changée de signe) introduite dans l'étude des fluides parfaits. κ est le coefficient de compressibilité, λ' celui de viscosité de dilatation et f' le module de plasticité de dilatation¹⁾. L'introduction formelle de ce dernier est tout aussi naturelle que l'emploi du coefficient de viscosité de dilatation et l'expérience seule décidera de son existence.

Une fois tenu compte du changement de volume, il reste à considérer la «déformation pure» en un point du milieu; celle-ci est représentée par ce qui reste du tenseur des déformations lorsqu'on y soustrait de chaque terme diagonal le tiers de la dilatation, soit

$$\Phi - \frac{1}{3} \cdot I \cdot \text{tr } \Phi$$

où I est l'idem-facteur. Ayant admis dans (1) que la tension moyenne normale et sa vitesse sont responsables de la vitesse et de l'accélération de dilatation, il est naturel d'admettre une relation semblable entre la vitesse et l'accélération de déformation pure d'une part et

¹⁾ R. MERCIER, Bulletin Soc. vaud. sc. nat. Vol. 64, 1949, p. 00.

les tensions tangentielles, les excès de tensions normales, et leurs vitesses d'autre part. La relation postulée sera donc:

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\psi} - \frac{1}{3} \cdot I \cdot \text{tr} \dot{\psi} \right) + f \left(\psi - \frac{1}{3} \cdot I \cdot \text{tr} \psi \right) \\ &= 2G \left(\dot{\Phi} - \frac{1}{3} \cdot I \cdot \text{tr} \dot{\Phi} \right) + 2\eta \left(\ddot{\Phi} - \frac{1}{3} \cdot I \cdot \text{tr} \ddot{\Phi} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Dans celle-ci, G est le module de glissement ou de rigidité, η le coefficient de viscosité habituel tandis que f désigne le module de plasticité de déformation pure.

Les deux relations (1) et (2) font bien ressortir dans le cas du solide purement élastique les rôles nettement séparés joués par la résistance à la pénétration $1/\kappa$ d'une part et la rigidité de forme, G , d'autre part; on vérifie d'ailleurs facilement l'équivalence de (1) et (2) avec les expressions classiques de la théorie de l'élasticité.

En appliquant ces relations générales au cas de la propagation d'ondes mécaniques (sonores ou ultrasonores) dans un fluide faiblement visqueux, on établit que celles-ci subissent une extinction dont la valeur est donnée par le coefficient

$$k_2 = - \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{\rho u^3} \eta - \frac{\omega^2}{2} \frac{\lambda'}{\rho u^3} \quad (3)$$

Le premier terme a déjà été proposé par STOKES et vérifié maintes fois avec plus ou moins de précision; l'existence du supplément d'extinction (représenté par le second terme) que provoque la viscosité de dilatation semble par contre être établie pour la première fois par les mesures de N. L. LIEBERMANN¹⁾.

Le problème de l'existence et de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu élastique, mais piézoélectrique présente un aspect un peu plus compliqué. Il n'est étudié ici que le cas simplifié où les déplacements sont sensiblement parallèles à une direction unique. Alors on peut utiliser le module d'Young E_y et son inverse α , lié à la compressibilité et à la rigidité par l'expression

$$\alpha = \frac{3 + \kappa G}{9G}$$

L'allongement spécifique ε dans la direction de la tension normale principale σ dépend encore du champ électrique E dans cette direction, selon la loi de LIPPMANN

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma + d \cdot E \quad (4)$$

(où d est le module piézoélectrique). Mais la distribution du champ

¹⁾ N. L. LIEBERMANN, Journ. of Acoust. Soc. of America, 1948, p. 868.

électrique n'est pas déterminée par les seules charges extérieures; elle dépend encore de la polarisation diélectrique P du milieu, elle-même sous la dépendance des tensions normales selon la loi de CURIE

$$P = k \cdot E + d \cdot \sigma \quad (5)$$

(où k est la susceptibilité diélectrique à tension constante).

Faisant alors appel aux lois générales de distribution et d'évolution de MAXWELL-LORENTZ, on établit que:

1° la tension σ , comme la vitesse de déplacement v , sont régies par une équation de D'ALEMBERT,

2° la célérité de phase dépend du module piézoélectrique d ,

3° si les phénomènes sont harmoniques dans le temps, l'existence des ondes mécaniques modifie l'impédance motionnelle des circuits électriques; il en résulte une méthode purement électrique de détermination du module d'YOUNG E_y .

Enfin, en considérant un couplage mécanique entre un milieu piézoélectrique et un milieu élastique, visqueux et plastique, le module de YOUNG apparent du premier devient complexe et dépendant des six paramètres de propagation du second,

$$E = E(G, x, \eta, \lambda', f, f')$$

L'étude de sa dispersion par la méthode purement électrique permet de tirer des conclusions relatives à l'existence et aux valeurs des 4 derniers.

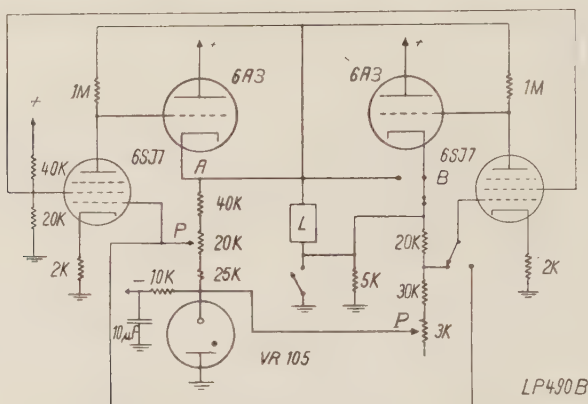
Redresseur stabilisé à potentiomètre électronique

par W. POPPELBAUM, Lausanne.

Un potentiomètre aux bornes d'un redresseur stabilisé rendant celui-ci inefficace vis-à-vis des variations de la résistance d'utilisation, on a réalisé au Laboratoire de Physique de l'Université de Lausanne un redresseur différentiel permettant de faire varier la tension de sortie par voie purement électronique entre 0 et 350 V. En particulier il s'agissait de pouvoir étalonner l'appareil une fois pour toutes indépendamment du courant dans la charge extérieure qui — en l'occurrence — était inférieur à 50 mA pour la gamme des tensions de 0 à 175 V et inférieur à 120 mA pour la gamme de 175 V à 350 V.

Il est évident que les basses tensions (de l'ordre du volt) doivent être garanties au moins à 0,01 V près — pour des variations dans le réseau de 4% — l'ondulation étant sensiblement inférieure à ce chiffre.

La figure donne le schéma de l'appareil. Dans une première position d'un commutateur le montage est tout simplement formé de 2 triodes 6A3 en parallèle, les grilles étant commandées par 2 amplificateurs à courant continu ($2 \times 6SJ7$) ayant un gain d'environ 1500. Pour un courant ne dépassant pas 120 mA on obtient toutes les tensions entre 175 V et 350 V en agissant sur le potentiomètre P .



Dans une seconde position du commutateur, la 6A3 et la 6SJ7 à droite forment un stabilisateur séparé à tension constante, cette tension pouvant être fixée entre 173 et 177 V à l'aide du potentiomètre p : ce réglage se fait une fois pour toutes.

A gauche par contre on utilise un stabilisateur classique, donnant toutes les tensions entre 175 V et 350 V. En connectant la charge entre les deux cathodes A et B , on obtient alors toutes les tensions entre 0 et 175 V.

Il importe de constater que l'ondulation entre A et B sera plus petite que les ondulations des stabilisateurs séparés, puisque l'alimentation commune des 2 stabilisateurs donne des ondulations en phase en A et B . Au fur et à mesure que la tension de A se rapproche de celle de B , les ondulations se détruisent de plus en plus, la contre-réaction des 6SJ7 étant convenablement réglée; dans le cas du prototype construit au laboratoire on obtient sur la première gamme des ondulations en tout cas inférieures à 2 mV (débit sur résistance pure ou condensateur).

Les calculs de la stabilité et de la résistance interne du redresseur pour la gamme 0—175 V donnent les résultats suivants: appelons μ et ρ le coefficient d'amplification et la résistance interne des 6A3 dans la région linéaire des caractéristiques. Soient G_1 et G_2 les gains des 6SJ7 à gauche et à droite respectivement (on choisira en général

$G_1 = G_2$). Soit L la charge extérieure et désignons par k_1 et k_2 les rapports de la chute de tension entre les grilles des 6SJ7 et la VR105 à la chute de tension entre les cathodes des 6A3 et la lampe à gaz. En posant

$$\begin{aligned} K_1 &= \mu G_1 k_1 \\ K_2 &= \mu G_2 k_2 \end{aligned}$$

on obtient comme résistance interne R_0 du redresseur et comme stabilisation S_0 les valeurs approximatives

$$\begin{aligned} R_0 &= \varrho \frac{(K_1 + K_2)}{K_1 K_2} \\ S_0 &= \frac{K_1 K_2}{K_2 - K_1} \end{aligned}$$

Dans le cas du schéma et pour une tension de sortie de 100 V ($k_1 = 0,5$, $k_2 = 0,6$) on a par exemple $R_0 = 0,6 \Omega$ et $S_0 = 15000$. Il ressort aussi des formules que pour $G_1 = G_2$ la stabilité devient infinie pour des tensions de sortie tendant vers 0.

Mentionnons enfin que la stabilité de l'ensemble vis-à-vis des fluctuations du réseau peut être améliorée par l'emploi de tubes ballast en série avec les filaments ou par des transformateurs à fuites.

Sur un phasemètre à tubes électroniques

par JACQUES GILBERT (Zurich).

Le phasemètre électronique décrit dans cette communication est destiné à mesurer par une lecture directe la différence de phase entre deux tensions électriques alternatives de basse fréquence, indépendamment de leur amplitude, de leur forme et de leur fréquence, et avec une grande impédance d'entrée.

Nous sommes partis du principe suivant:¹⁾ chacune des deux tensions appliquées agit sur un générateur d'impulsions respectif de telle façon qu'une impulsion négative aiguë est émise au moment exact où la tension passe par zéro (du négatif au positif). Les impulsions positives inévitablement émises à d'autres instants sont éliminées par un discriminateur. L'impulsion négative déclenchée par la tension A , choisie comme tension de référence, ferme par le jeu d'un commutateur électronique le circuit de mesure proprement

¹⁾ E. F. FLORMAN et A. TAIT (Proc. I. R. E. **37**, 207 (1949)) ont développé un phasemètre électronique basé en gros sur le même principe; ce travail n'est parvenu à notre connaissance qu'à la veille même de la présente publication.

L. WEGMANN (H.P.A. **20**, 405 (1947)) a utilisé pour mesurer de très petits angles de phase un dispositif électronique qui présente une analogie partielle avec le nôtre.

dit, comprenant un ampèremètre à cadre mobile. Ce circuit est d'abord ouvert un instant plus tard par l'impulsion négative provenant de la tension B . Pendant l'intervalle de fermeture, un courant continu constant traverse l'ampèremètre, alors que le courant est nul pendant le reste de la période. Le même processus se renouvelle à chaque période. On montre que le courant moyen circulant dans l'ampèremètre est proportionnel à l'écart de phase entre les tensions A et B , ou, d'une manière plus générale, à l'écart de temps séparant les passages à zéro des deux signaux périodiques envisagés. (On peut être amené à faire cette discrimination dans le cas où le passage à zéro de la tension considérée ne coïncide pas nécessairement avec le passage à zéro de sa composante fondamentale).

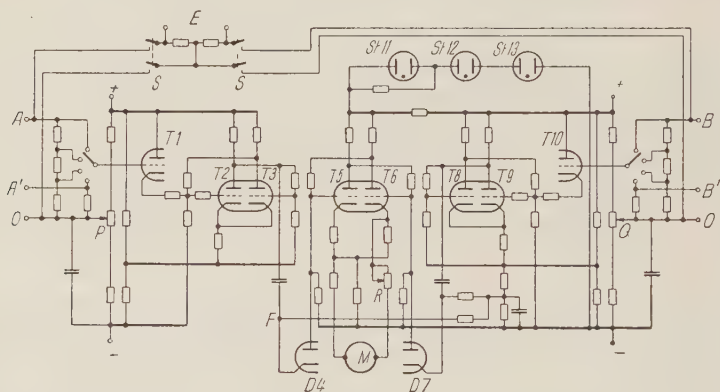


Fig. 1.

Schéma du phasemètre électronique.

La réalisation du phasemètre électronique est basée essentiellement sur l'emploi de commutateurs électroniques à 2 triodes du type ECCLES-JORDAN, et la combinaison des divers éléments a été choisie de manière à obtenir un schéma simple (voir fig. 1). L'instrument est prévu pour la mesure de décalages de phase de 0° à 360° . Les tensions dont on veut mesurer l'écart de phase sont appliquées respectivement en OA (ou OA') et en OB (ou OB'). Les circuits d'entrée sont symétriques. Les générateurs d'impulsions comprennent les triodes $T2-T3$, resp. $T8-T9$. Un tube intermédiaire $T1-T10$, monté en amplificateur cathodique, a pour but de réaliser une haute impédance d'entrée et d'éviter un couplage direct entre la source et le générateur d'impulsions. A l'état initial la triode $T2$ est coupée: au moment du passage à zéro de la tension A , elle devient brusquement conductrice, ce qui provoque en F par différenciation électrique l'impulsion négative voulue; celle-ci est appliquée

à la grille de la triode $T5$ par l'intermédiaire de la diode $D4$: $T5$ est coupé et $T6$ se met à conduire. Lorsque la tension A atteint la valeur négative critique, le générateur d'impulsions revient à son état initial en émettant une impulsion positive, bloquée par $D4$. Le processus déclenché par la tension B est en tous points analogue, et l'impulsion négative correspondante aboutit à la grille de la triode $T6$. On voit donc que le circuit $T6$, comprenant le milliampermètre M , est toujours fermé par le signal A seul, et ouvert par le signal B seul, et que l'intervalle de fermeture est proportionnel à la différence de phase.

Les potentiels de référence P et Q sont ajustés de manière à synchroniser l'impulsion de commande avec le passage à zéro de la tension d'entrée. Pour l'étalonnage on applique une tension sinusoïdale en E ; les interrupteurs S étant fermés, on a en A et en B deux tensions en opposition. On règle alors au moyen du potentiomètre R le courant dans le milliampermètre M à la moitié de l'échelle (180°).

La précision des mesures est de l'ordre de $\pm 2^\circ$ pour les fréquences comprises entre 20 et 500 Hz. Les tensions d'entrée doivent être comprises entre 20 et 250 V. Une variation de $\pm 5\%$ de la tension d'alimentation n'influe pratiquement pas sur la mesure. On peut envisager facilement l'utilisation de ce phasemètre électronique pour des fréquences plus élevées. En ce qui concerne la forme de la courbe de tension, la seule restriction à formuler est que la tension ne doit pas s'annuler plus de 2 fois par période (une fois dans le sens positif, une fois dans le sens négatif).

Messanordnung zur Registrierung von Ultrarotspektren

von R. ZBINDEN, E. BALDINGER und E. GANZ*, Basel.

Zu dem im Bau befindlichen Doppelstrahl-Ultrarotspektrographen wurde eine Registriereinrichtung gebaut. Um direkt den Quotienten der im Absorptionstrog geschwächten Strahlung J zur einfallenden Strahlung J_0 registrieren zu können, lassen wir zeitlich nacheinander beide Strahlungen auf dasselbe „Thermistor-Bolometer“ ($\tau = 0,006$ sec; Empfindlichkeit 240 Volt/Watt) fallen und bestimmen elektrisch das Verhältnis. Bei dieser Methode kann die für den optischen Abgleich erforderliche Kammlende¹⁾ umgangen werden.

*) Ciba A.G., Basel.

¹⁾ N. WRIGHT and L. W. HERSCHER, J. Opt. Soc. Am. **17**, 211, 1947.

Der zeitliche Verlauf der Strahlung, die auf das Bolometer fällt, ist in Fig. 1 eingezeichnet. Mit einer rotierenden Spiegelblende werden abwechselungsweise Lichtimpulse der geschwächten und der ungeschwächten Strahlung durchgelassen. Damit das Verhältnis J/J_0 richtig bestimmt werden kann (unabhängig von Nullpunktschwankungen des Bolometers und von Streustrahlung im Monochromator), ist es notwendig, zwischen den einzelnen Strahlungs-

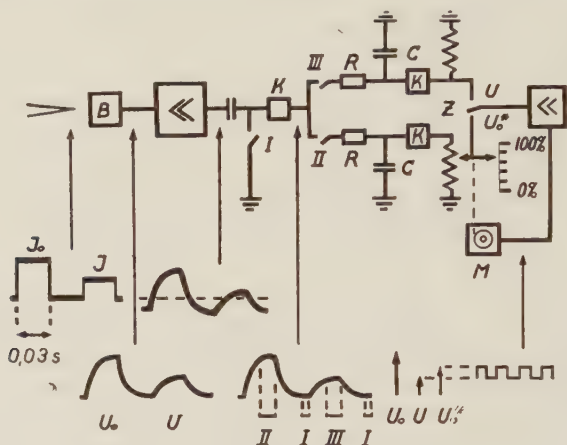


Fig. 1.

Blockschema der Registriereinrichtung.

impulsen eine Lücke zu lassen, in der das Bolometer seine Ruhetemperatur wieder erreicht. Beide Strahlungen fallen $8\frac{1}{3}$ mal pro sec auf den Empfänger.

Damit das Bolometersignal formgetreu verstärkt wird (mit Abweichungen kleiner als 1%), muss sich das Frequenzband des Verstärkers von 0,1–250 Hz erstrecken. Wir haben aber experimentell festgestellt, dass bei einer Beschneidung der untern Frequenzen mit einem RC -Glied der Zeitkonstante 0,06 sec und der obern durch ein solches mit der Zeitkonstante 0,004 sec (Frequenzband 3–40 Hz) das Verhältnis U/U_0 erhalten bleibt, obwohl das Signal nicht mehr ganz formgetreu verstärkt wird.

Am Ausgang des Verstärkers (Signalgrösse 1–4 Volt) stimmt die Nulllinie des Signals nicht mit Erde überein. Mit dem Pegelschalter I wird zwischen zwei Impulsen das Potential wieder auf den Wert 0 gebracht.

Durch zwei mit der Spiegelblende synchronisierte Schalter greift man nacheinander die Spannungen U und U_0 ab und lädt über die Widerstände R die Kondensatoren C auf. Das Verhältnis der beiden

an den Kondensatoren erhaltenen Gleichspannungen wird mit einem Messpotentiometer bestimmt. Dieses wird mit einem Motor abgeglichen, den man mit der rechteckigen Wechselspannung des Zehackers Z steuert²⁾.

Die drei Kathodenstufen dienen lediglich zur Entkopplung. Die Ladezeitkonstanten RC der zwei Kondensatoren betragen 1 sec, so dass über mehrere Perioden des Signals gemittelt wird. Dabei mittelt man aber auch über das Widerstandsrauschen und die Störspannungen des Bolometers. Das RC -Glied beschneidet das Frequenzband auf eine Bandbreite von ca. 0,2 Hz. Eine weitere Einengung des Frequenzbandes ist nicht mehr zulässig, da eine grössere Zeitkonstante die Registriergeschwindigkeit untragbar herabsetzen würde, wenn Verzerrungen und Verschiebungen der Maxima scharfer Banden vermieden werden sollen.

Bei dieser Methode verliert man theoretisch an Registriergeschwindigkeit einen Faktor 8, denn die Spannungen U und U_0 können nur während des achten Teiles der gesamten Messzeit abgegriffen werden. Daher wird 8mal weniger lang über das Rauschen gemittelt. Gegenüber dem Einstrahlspektrographen geht nur ein Faktor 4 verloren, da zur Bildung von J/J_0 nacheinander zwei Spektren registriert werden müssen (mit und ohne Absorptionstrog).

Dieser Faktor 4 bedeutet aber, bei konstanter Registriergeschwindigkeit und gleichem Verhältnis Signal zu Rauschen, nur eine Verschlechterung im Auflösungsvermögen um den Faktor $\sqrt[4]{4} \sim 1,4$.

Wir haben mit der definitiven Messanordnung das Rauschen gemessen. Die Spitzenwerte der Schwankungen am Bolometer überschreiten bei einer Bandbreite der Registriereinrichtung von 0,2 Hz innerhalb 2 Minuten den Wert $1 \mu\text{Volt}$ im Mittel 1mal. Wenn man also nur Schwankungen $< 1\%$ zulassen will, muss die Signalgrösse am Bolometer mindestens $100 \mu\text{Volt}$ betragen.

Nach einer Abschätzung der Energieverhältnisse im Monochromator erwarten wir ein Auflösungsvermögen von $0,06 \mu$ bei einer Wellenlänge $\lambda = 10 \mu$ und einer Registrierzeit von 30 Minuten für ein Spektrum von $2\text{--}16 \mu$.

Zur Prüfung der Registriereinrichtung mit elektrischen Testsignalen wurde der zeitliche Verlauf der Testsignale dem Signal des Bolometers nachgebildet.

Der Kommission des Bundes zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung danken wir für finanzielle Unterstützung.

²⁾ Zehacker, Verstärker und Motor von „Brown-Recorder“.

Oscillograph mit Breitbandverstärker zur Beobachtung sehr rasch ablaufender Vorgänge

von P. SCHMID und E. BALDINGER, Basel.

Kein Manuskript eingegangen.

Untersuchung von Kernphotoprozessen an leichten Elementen nach der photographischen Methode

von H. WÄFFLER und S. YOUNIS (ETH. Zürich).

I. Methode.

Bei den leichtesten Kernen ($Z \leq 10$) führt die Einwirkung energiereicher Gammastrahlen ($h\nu \approx 20$ MeV) etwa ebenso häufig zur Abspaltung eines Neutrons $[(\gamma, n)\text{-Prozess}]$ als auch eines Protons $[(\gamma, p)\text{-Prozess}]$. Auch die Ablösung eines α -Teilchens $[(\gamma, \alpha)\text{-Prozess}]$ wurde bisher in 2 Fällen (C^{12} , O^{16}) beobachtet. Der (γ, α) -Prozess ist allerdings rund 30mal seltener als der (γ, n) -Prozess. Beide Reaktionstypen, (γ, α) und (γ, p) , führen bei den häufigsten Isotopen der leichten Elemente auf stabile Endkerne, so dass der sonst übliche, im allgemeinen sehr empfindliche Nachweis der Reaktion mittels der induzierten Radioaktivität hier versagt. Ein einfaches Hilfsmittel zur Untersuchung solcher Kernprozesse bieten nun die silberreichen photographischen Emulsionen vom Typus Ilford C₂ und E₁, Kodak NT 2a usw. Durch Einlagerung des zu untersuchenden Elementes in die Emulsion können alle bei der Umwandlung emittierten geladenen Teilchen sowohl hinsichtlich ihrer Art, als auch ihrer Energie- und Winkelverteilung identifiziert werden. In bezug auf Empfindlichkeit ist die Photoplatte den üblichen elektronischen Nachweisverfahren (Proportionalzähler, Ionisationskammer) etwa gleichwertig; dieselbe wird einerseits durch die Konzentration der in die Emulsion eingelagerten Substanzen, andererseits durch den gerade noch zulässigen, von den Sekundärelektronen der Gammastrahlung herrührenden Untergrund begrenzt (siehe Bild 1). Zu den Stoffen, welche in relativ grossen Mengen von der photographischen Schicht aufgenommen werden, gehört vor allem das Wasser; die Gelatine vermag nämlich mehr als die Hälfte ihres Eigengewichtes sowohl an gewöhnlichem (H_2O) als auch an schwerem (D_2O) Wasser aufzusaugen. Dadurch erhöht sich die Konzentration der H - bzw. D -Kerne gegenüber der trockenen Emulsion um das 4-fache, diejenige der O -Kerne sogar um das 7,5-fache.

Wir haben nun untersucht, wie weit es möglich ist, Platten mit Schichtdicken bis zu $200\ \mu$ in H_2O bzw. D_2O bis zur Sättigung der

Wasseraufnahme zu trinken, dann luftdicht abzuschliessen und in nassem Zustand der Lithium-Gammastrahlung (Hauptlinie $h\nu = 17,5$ MeV) auszusetzen. Die Versuche haben ergeben, dass es bei geeigneter Behandlung der nassen Emulsion gelingt, gut ausmessbare Spuren von α -Teilchen und Protonen zu erhalten. Gegenüber dem Arbeiten mit trockenen Platten ergeben sich allerdings einige Komplikationen, die hauptsächlich auf den beiden folgenden Erscheinungen beruhen.

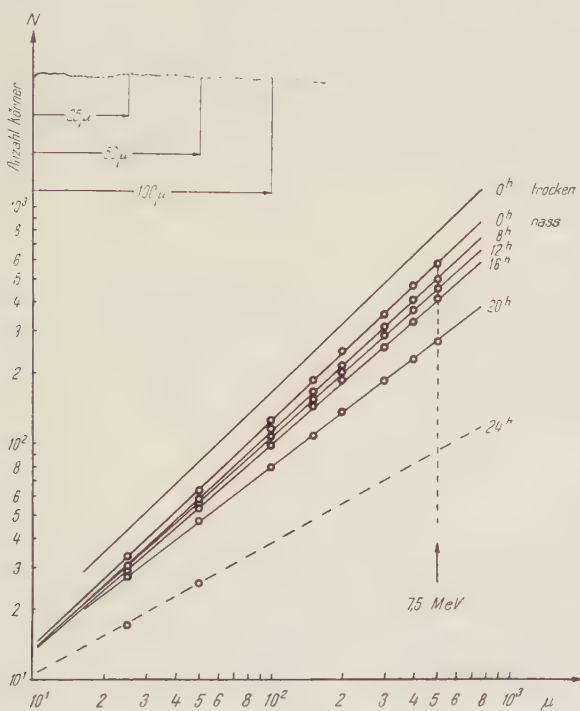


Fig. 1.

Zusammenhang zwischen Korndichte und Restreichweite in nassen Platten.

a) Quellung der Gelatine.

Durch das Tränken quillt die Emulsion auf rund das Doppelte ihrer Dicke in trockenem Zustand. Das hat einerseits eine Vergrößerung der Reichweite aller Teilchen (bis um das Eineinhalbfache), andererseits eine Reduktion in der Korndichte der Spuren zur Folge. Der für trockene Platten bekannte Zusammenhang zwischen Energie und Reichweite gilt somit nicht mehr. Da die Wasseraufnahme

der einzelnen Platten individuellen Schwankungen unterworfen ist, so muss die Ermittlung der Energie-Reichweite-Beziehung grundsätzlich für jede Platte einzeln erfolgen.

b) Rückgang des latenten Bildes in Funktion der Zeit (Fading).

Die Einlagerung von Wasser hat eine ganz beträchtliche Verstärkung des Fadings gegenüber der trockenen Emulsion zur Folge. Dasselbe wächst zudem mit zunehmender Teilchenenergie. Fig. 1 zeigt die Anzahl der längs einer Protonspur ausgezählten Körner in Abhängigkeit von der Restreichweite für verschiedene zwischen Exposition und Entwicklung liegende Zeitintervalle. Das Auseinanderlaufen der Geraden gegen grosse Reichweiten lässt die Zunahme des Fadings mit wachsender Protonenenergie erkennen. Sein

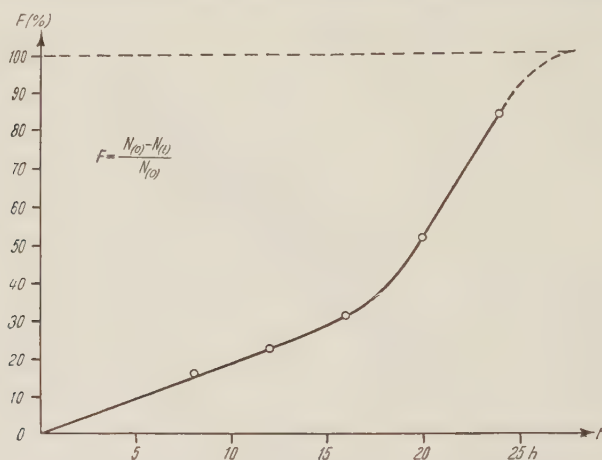


Fig. 2.

Zeitliche Zunahme des Fadings für 7,5 MeV Protonen.
(Emulsion: Kodak NT 2a)

numerischer Wert lässt sich direkt dem Diagramm entnehmen. Derselbe ist in Fig. 2 für 7,5 MeV-Protonen in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen. Der Kurvenverlauf zeigt, dass die maximal mögliche Expositionsdauer nasser Platten 12–16 Stunden beträgt.

II. Vorläufige Messergebnisse.

1. Wirkungsquerschnitt für den (γ, α) -Prozess an Kohlenstoff: $C^{12}(\gamma, \alpha) 2\alpha^1$.

Sowohl trockene als auch nasse Platten wurden in gut definierter geometrischer Anordnung während mehrerer Stunden unter strei-

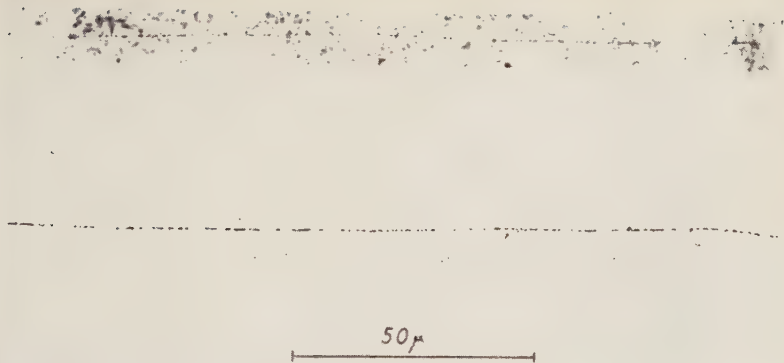


Bild 1.

Protonenspuren in nassen Platten.

Oben: Durch Lithiumgammaquant ausgelöstes Photoproton.
(Em. Kodak NT 2a.)

Unten: Durch 4 MeV-Neutron ausgelöstes Rückstossproton.
(Em. Ilford C 2).

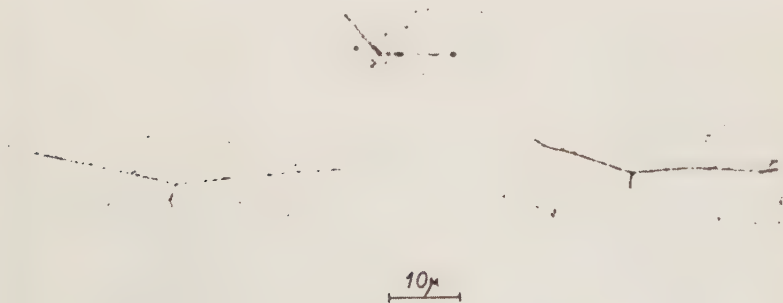


Bild 2.

Kohlenstoffspaltung durch Lithiumgammastrahlen. $C^{12}(\gamma, \alpha) 2\alpha$.

Oben: Spaltung durch die 14,8 MeV-Linie, nasse Platte.

Unten: Spaltung durch die 17,5 MeV-Linie,

links: nasse Platte rechts: trockene Platte.

(Em. Kodak NT 2a.)

fendern Einfall der Lithium-Gammastrahlung exponiert. Auf einer gesamten Plattenfläche von 29 cm^2 wurden 60 Spaltungen (siehe Bild 2) beobachtet. Davon entfielen 53 auf die $17,5 \text{ MeV}$ -Linie und 7 auf die $14,8 \text{ MeV}$ -Linie dieser Strahlung. Aus dem bekannten Kohlenstoffgehalt der Gelatine ergibt sich auf Grund der bereits früher beschriebenen Messungen der Absolutintensität der Lithiumstrahlung²⁾ für den gesamten Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma(17,5) + \sigma(14,8) = 1,1 \pm 0,3 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

2. Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung des Deutons: $D^2(\gamma, n)p$.

Es wurden jeweils 2 Platten, die eine mit H_2O , die andere mit D_2O getränkt, gleichzeitig unter streifendem Einfall bestrahlt. Auf je 13 cm^2 Plattenfläche entfielen in der H_2O -Platte 850, in der D_2O -Platte 1300 Protonenspuren mit Energien zwischen 3 und 8 MeV . Die Energieverteilung der 450 Protonen, welche sich durch Differenzbildung ergibt, zeigt zwei ausgeprägte Maxima bei $6,3$ bzw. $7,7 \text{ MeV}$, entsprechend den beiden Linien der Lithium-Gammastrahlung. Für eine genaue Zerlegung nach den beiden Komponenten reicht das vorhandene Material noch nicht aus, dagegen lässt sich der Gesamtquerschnitt für die Deutonspaltung durch beide Linien zusammen angeben

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma(17,5) + \sigma(14,8) = 8 \pm 3 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

3. Winkelverteilung der Deuterium-Photoprotonen.

Die Auszählung der Photoprotonen mit Energien zwischen $5,8$ und $8,2 \text{ MeV}$, welche im *Schwerpunktsystem* a) innerhalb eines Kreiskegels von 48° Öffnungswinkel mit der Achse *senkrecht* zur Richtung des einfallenden Gammastrahls b) innerhalb eines gleich grossen Kegels mit der Achse *in* Richtung des Gammastrahls lagen, ergab 157 bzw. 20 Spuren. Damit berechnet sich der isotrope Anteil a) im Ausdruck für die Winkelverteilung der Photoprotonen (Θ = Winkel zwischen Gammastrahl und Photoproton): $I(\Theta) \approx a + \sin^2 \Theta$ zu

$$a = 0,05 \pm 0,15.$$

Literatur.

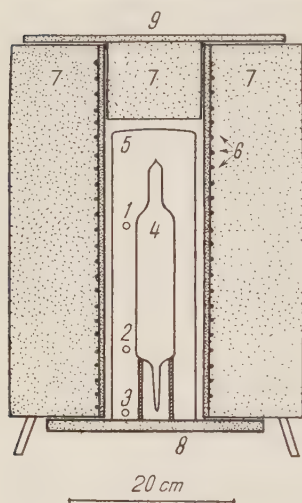
¹⁾ Zu diesem Prozess s. auch H. HÄNNI, V. TELEGI und W. ZÜNTI, H.P.A. **21**, 203 (1948).

²⁾ H. WÄFFLER und O. HIRZEL, H.P.A. **21**, 200 (1948).

Verwendung von Anthracen-Kristallen in Scintillationszählern

von O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und R. STEFFEN (ETH. Zürich).

Die in neuerer Zeit von KALLMANN¹⁾ und andern Autoren²⁾³⁾ entwickelten Leuchtmassenzähler haben für γ -Quanten eine bedeutend grössere Ansprechwahrscheinlichkeit als die bisher benutzten Geiger-Müller-Zählrohre. Zudem ist bei Verwendung von geeigneten Leuchtmassen ihr Zählvermögen pro Zeiteinheit viel grösser. Als Leuchtmasse sind viele organische und anorganische Verbindungen⁴⁾ wie Naphtalin, Anthracen, Stilben, CaWO_4 , ZnS , KJ , NaJ usw. untersucht worden. Ganz allgemein hängt die Ansprechwahrscheinlichkeit eines solchen Zählers von der Absorption der γ -Strahlen in der



1 2 3 = Thermoelemente Nr. 1, 2, 3.

4 = Glaskolben, der die Schmelze enthält.

5 = Versilberter Glaskolben als Strahlungsschild.

6 = Heizwicklung (440 Watt).

7 = Wärmeisolation (Schamottpulver).

8 = Auswechselbare Bodenplatte.

9 = Deckel zum Öffnen des Ofens.

Fig. 1.

Der Ofen im Schnitt (Schema).

Leuchtmasse ab, ebenso von ihrer Lichtausbeute, der Durchlässigkeit für das eigene Fluoreszenzspektrum und dessen Übereinstimmung mit der spektralen Empfindlichkeit der Photokathode des Multipliers. Anthracen ist besonders geeignet, da es eine kurze Abklingzeit⁵⁾ von $\tau = (1,3 \pm 0,2) 10^{-8}$ sec hat. Die andern erwähnten Bedingungen sind aber nur dann erfüllt, wenn es ausserordentlich rein vorliegt und als Einkristall ausreichender Dicke gezüchtet werden kann.

Für die Herstellung unserer Kristalle verwendeten wir synthetisch von der Ciba⁶⁾ hergestelltes Anthracen. Dieses wird mit Hilfe der chromatographischen Methode⁷⁾ von Spuren eines Farbstoffes, welcher die Fluoreszenz beeinträchtigt, gereinigt. Das in einem

Benzin-Benzolgemisch (1:1) gelöste Material wird durch eine Säule von aktiviertem Aluminiumoxyd filtriert, wobei die störenden Komponenten am stärksten an das Adsorbens gebunden werden. Die durchgelaufene Fraktion wird eingedampft und das Anthracen durch Kristallisation zurückgewonnen. Das auf diese Weise gereinigte Anthracen wird in einen Pyrex-Glaskolben eingefüllt, der hierauf sorgfältig evakuiert, mit 0,5 ata Argon gefüllt und abgeschmolzen wird. Fig. 1 zeigt einen Schnitt durch den Schmelzofen⁸). Man erhält durch langsames Abkühlen der Schmelze (ca. 1° C pro Stunde) gut fluoreszierende durchsichtige Anthracen-Einkristalle.

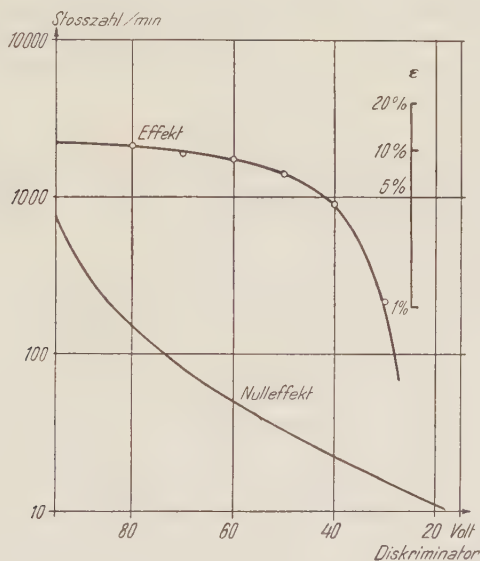


Fig. 2.

Messung mit dem Eichpräparat Co^{60} .

Multiplikator: 700 Volt (mit Wasserkühlung)

Nachverstärkung: 1000 fach.

Mit einem solchen zylindrischen Kristall von 2 cm Dicke (Durchmesser 3 cm) sind nun einige orientierende Messungen ausgeführt worden. Die Impulse eines Photomultipliers (1 P 21, durch Wasserkühlung auf konstanter Temperatur gehalten) wurden nachverstärkt und nach einer Diskriminatorstufe mit einem Scale von 2^{16} registriert, dessen Auflösungsvermögen 10^{-6} sec beträgt.

In Fig. 2 ist eine Messung mit einem Co^{60} -Präparat (1,1 und 1,3 MeV) dargestellt.

Das Diagramm zeigt die Abhängigkeit der Stosszahl des Effektes und des vom Multiplikator herrührenden Untergrundes in Funktion

der Diskriminatorspannung. Lässt man einen Untergrund von 300 Stössen/min. zu, dann werden 12% der durch den Kristall gehenden γ -Strahlen gezählt. Diese Ansprechwahrscheinlichkeit kann verglichen werden, mit dem nach der Formel von KLEIN-NISHINA berechneten theoretischen Wert für die Compton-Streuung (σ_s ; Photoeffekt und Paarbildung können vernachlässigt werden). Für einen 2 cm dicken Anthracenkristall wäre theoretisch eine Ansprechwahrscheinlichkeit von 14,5% möglich. Daraus ersieht man, dass die theoretische Grenze der Ansprechwahrscheinlichkeit nahezu erreicht wird, wenn ein gut durchsichtiger Kristall zur Verfügung steht. Möchte man die Ansprechwahrscheinlichkeit vergrössern, so muss man schwerere Verbindungen als Anthracen verwenden.

Literatur.

- 1) KALLMANN, Natur und Technik, Juli 1947.
- 2) F. H. MARSHALL and J. W. COLTMAN, Phys. Rev. **72**, 528 (1947).
- 3) M. DEUTSCH, MIT Technical Report Nr. 3.
- 4) R. J. MOON, Phys. Rev. **73**, 1210 (1948).
- 5) G. COLLINS, Phys. Rev. **73**, 1543 (1948).
- 6) An dieser Stelle möchten wir der Ciba A.G., Basel, für ihr Entgegenkommen unseren Dank aussprechen.
- 7) Reindarstellung des Anthracens. HOPPE SEYLER, Zeitschrift f. physiolog. Chemie **230**, 158 (1934).
- 8) Private Mitteilung von L. WOUTERS, Radiation Lab. Berkeley, Cal.

Koinzidenzanordnung für Scintillationszähler

von K. P. MEYER, E. BALDINGER, B. HAHN und P. HUBER (Universität Basel).

Bei den Scintillationszählern nach KALLMANN sind die breite Amplitudenverteilung der Impulse und der bei Zimmertemperatur erhebliche Nulleffekt für Koinzidenzanordnungen recht störend. Die breite Amplitudenverteilung bewirkt, dass die registrierte Ereigniszahl von den Betriebsdaten des Zählers und der Grösse der Nachverstärkung stark abhängt. Diese Abhängigkeit ist für „Effekt“ und Nulleffekt zudem wesentlich verschieden. Ausserdem bedeutet es eine erhebliche Anforderung an die Schaltung, wenn 2 kleine koinzidierende Impulse einen Ausgangsimpuls liefern sollen, während mehrere hundertmal grössere Einzelimpulse nichts geben dürfen.

Eine geeignete Anordnung, die die erwähnten nachteiligen Eigenschaften weitgehend eliminiert, lässt sich folgendermassen bauen:

1. Zählung von Einzel-Ereignissen.

Zur Unterdrückung des Nulleffektes werden die Scintillationen eines Kristalles (Anthracen)¹⁾ von zwei Photomultipliern (R.C.A. 931A) in Koinzidenz gezählt (Fig. 1). Während so jede Scintillation, d. h. der zu messende Effekt, als „wahre“ Koinzidenz registriert wird, macht sich der Nulleffekt der beiden Multiplier nur in Form von zufälligen Koinzidenzen bemerkbar²⁾. Für das Auflösungsvermögen der vorliegenden Anordnung von $\tau = 10^{-7}$ sec ergibt sich

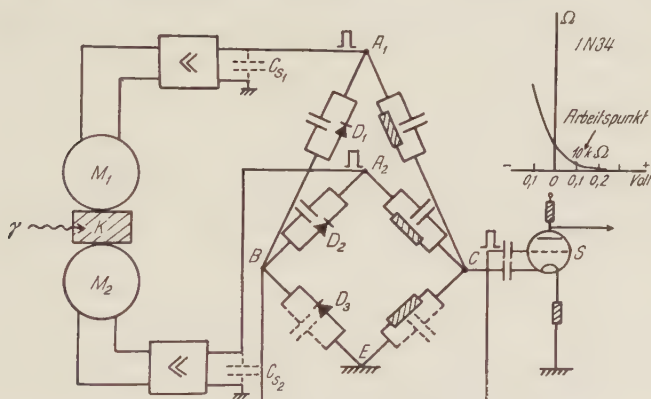


Fig. 1.

Scintillationszähler mit „Plateau“ und reduziertem Nulleffekt. (Kristall K ; Photomultiplier M_1 und M_2 ; Germanium-Dioden D_1 , D_2 , D_3 ; Ankopplungsstufe S .) Die Nebenfigur zeigt den Gleichstromwiderstand der Germanium-Dioden in der Umgebung des Arbeitspunktes.

somit im Vergleich zum Nulleffekt der einzelnen Multiplier von z. B. $n = 10^4$ Impulsen/sec eine Reduktion um den Faktor $\frac{n}{2n^2\tau} = 500$. Auf eine Kühlung der Photokathoden, welche meistens eine erhebliche Erschwerung der Arbeit bedeutet³⁾, kann somit in der Regel verzichtet werden.

Um die Zahl der registrierten Scintillationen von den Betriebsdaten der Anordnung unabhängig zu machen, wurde die Nachverstärkung der Multiplierimpulse so gewählt (ca. 30fach), dass auch

¹⁾ Für die Züchtung von Anthracen-Kristallen danken wir Herrn Prof. SCHERRER und Dr. O. HUBER vom Physikalischen Institut der ETH. Für die Beschaffung des reinen Anthracens sind wir Herrn Direktor Dr. R. TOBLER, Ciba Basel, zu Dank verpflichtet.

²⁾ Auf diese Möglichkeit haben schon J. BROSER und H. KALLMANN, Zs. f. Naturf. 2a, 642, 1947 hingewiesen.

³⁾ Auch sei auf das Springen der Kristalle beim Abkühlen hingewiesen.

die kleinsten noch mit merklicher Häufigkeit auftretenden Impulse gross genug werden, um Koinzidenzen auslösen zu können. Ist dieser Zustand erreicht, so muss die registrierte Impulszahl, gemessen als Funktion einer diskriminierenden Amplitude, für kleine Werte der letzteren schliesslich konstant werden, d. h. die Diskriminatorkurve läuft in ein Plateau aus. Bei unseren Versuchen mit der γ -Strahlung von Co^{60} entsprach die Zahl der im Plateau registrierten Impulse der Anzahl im Anthracen ausgelöster Compton-Elektronen, wie sie sich gemäss der Klein-Nishina-Formel ergibt. Die registrierte Ereigniszahl ist also lediglich durch Quelle, Kristall und deren relative Lage bestimmt, während Photomultiplier und Nachverstärkung nicht mehr eingehen.

Die Koinzidenz-Mischstufe¹⁾ arbeitet folgendermassen (Fig. 1): Positive Eingangsimpulse gelangen bei A_1 bzw. A_2 auf 2 Brückenschaltungen, deren eine Hälfte (B, E, C) für beide Brücken gemeinsam ist. Die Koinzidenzimpulse erscheinen als Potentialdifferenz zwischen den Punkten B und C (Ausgang). Die Ankopplungsstufe S muss daher durch zwei Elektroden (Gitter und Kathode) gesteuert werden. In erster Näherung darf man die Brücken als lineare Schaltungen betrachten. Sie sind durch Ohm'sche Widerstände und Kapazitäten so abgeglichen, dass Eingangsimpulse bei A_1 und A_2 keine Ausgangsimpulse erzeugen. Erst in zweiter Näherung spielen die passend vorgespannten Germanium-Dioden D_1, D_2, D_3 (Sylvania 1N34) eine Rolle²⁾. Sie werden von den Impulsen in der Sperrrichtung beansprucht. Es sei nun z. B. die Brücke für den Multiplier M_1 (A_1, B, E, C) betrachtet. Ein positiver Einzelimpuls in A_1 wird D_1 und D_3 in ihrem Widerstand erhöhen, der identischen Kennlinien wegen aber noch keinen Impuls am Brückenausgang erzeugen. D_2 stellt nun in Serie mit der Schaltkapazität C_{s_2} einen Nebenschluss zum Brückenzweig BE dar. Da der Widerstand von D_2 durch den Impuls erniedrigt wird, sinkt die Gesamtimpedanz zwischen den Punkten B und E (im Vergleich zum Zweig $A_1 B$), was zur Folge hat, dass am Ausgang ein negativer Impuls entsteht (B negativ gegenüber C). Genau das analoge gilt für den zweiten Multiplier und die zugehörige Brücke. Treffen in A_1 und A_2 gleichzeitig Impulse ein, so haben die in D_3 erzeugten Ströme gleiche Richtung, während

¹⁾ Es handelt sich um eine Weiterentwicklung der von uns in den H. P. A. XXI, 188, 1948 und Rev. of Sc. Instr. **19**, 473, 1948 publizierten Schaltung.

²⁾ Die Kapazitäten in den Brückenzweigen betragen etwa 10–20 pF und sind für die Zweige BE und CE durch die Eingangskapazitäten der Ankopplungsstufe S vorgegeben. Die Impedanzen der vorgespannten Dioden betragen ca. 10 k Ω im Arbeitspunkt (Fig. 1). Die kapazitiven Widerstände der Brückenzweige sind somit für Impulse von 10^{-7} sec Dauer ca. 5–10mal kleiner als die Impedanzen der Dioden.

sich die Ströme in D_1 und D_2 teilweise kompensieren. Es tritt daher eine relative Impedanz-Zunahme des Zweiges BE gegenüber A_1B und A_2B auf, was sich in einem positiven Ausgangsimpuls (B positiv gegenüber C) äussert. Durch günstige Wahl des Arbeitspunktes der Dioden (Fig. 1) wurde erreicht, dass solche positive Koinzidenz-Ausgangsimpulse noch entstehen, wenn der eine der koinzidierenden Impulse 100mal kleiner ist als der andere. Koinzidenzen mit noch grösserem Amplitudenverhältnis der beteiligten Impulse gehen verloren. Als Minimal-Amplitude sind 0,1–0,2 Volt in A_1 bzw. A_2 erforderlich. Einzelimpulse dürfen 400mal grösser sein, ohne Störungen zu verursachen, die falsche Koinzidenzen vortäuschen.

2. Zählung von Koinzidenz-Ereignissen.

Jetzt handelt es sich darum, koinzidierende Scintillationen zweier verschiedener Kristalle zu registrieren. Die Anordnung der Fig. 1 wird hierfür durch einen 3. Photomultiplier mit eigenem Kristall erweitert (Fig. 2). Die Mischstufe geht durch Hinzufügen eines

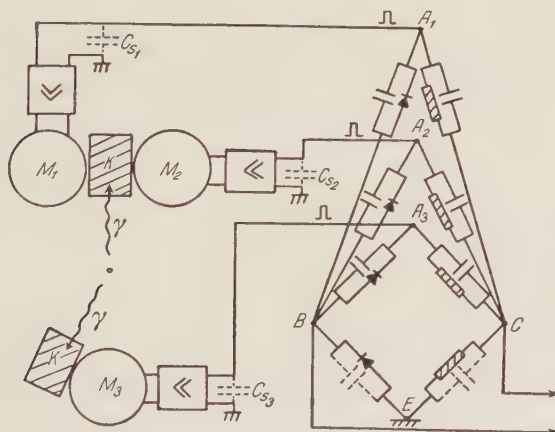


Fig. 2.

Zweifach-Koinzidenzanordnung für Scintillationszähler.

(Bezeichnungen wie Fig. 1.)

dritten Brückenweiges von einer 2fach- in eine 3fach-Koinzidenz-Schaltung über, deren Wirkungsweise völlig analog dem einfacheren Fall ist. Die Anordnung stellt für den Nulleffekt eine 3fach-Koinzidenz-Schaltung dar, während der „Effekt“ als 2fach-Koinzidenz gemessen wird. Der Nulleffekt wird somit um den Faktor $\frac{n}{3n^3\tau^2}$ gegenüber dem Einzelzähler erniedrigt, für $n = 10^4$, $\tau = 10^{-7}$, also

um $3,3 \cdot 10^5$, so dass auch hier eine Kühlung der Photokathoden überflüssig ist.

Bei der vorliegenden Anordnung nach Fig. 2 liefern erst etwa $\frac{3}{4}$ aller Scintillationen Impulse, die in bezug auf ihre Amplitude koinzidenzfähig sind. Es ist aber zu erwarten, dass auch hier das „Plateau“ erreicht werden kann. Im jetzigen Zustand der Anordnung lässt sich bereits die Richtungskorrelation der beiden in Kaskade emittierten γ -Quanten des Co^{60} ohne jede Kühlung sehr gut messen. Bei einer Quellenstärke von 10^{-2} mC und einem Raumwinkel von 0,01 (Winkelintervall ca. 20°) erhält man ca. 6 zufällige und ca. 60 wahre Koinzidenzen (K) pro Minute. Der Nulleffekt beträgt ca. 1 Impuls/min. Die Richtungskorrelation $\eta = \frac{K_{180^\circ} - K_{90^\circ}}{K_{90^\circ}}$ ergibt unter Berücksichtigung der durch Streuung verursachten Koinzidenzen $15 \pm 2\%$, während BRADY und DEUTSCH¹⁾ $16 \pm 2\%$ gefunden haben.

¹⁾ E. L. BRADY und M. DEUTSCH, Phys. Rev. **74**, 1541, 1948.

Beitrag zur Messung von Erschütterungen

von **Max Weber.**

(22. III. 1949.)

Zusammenfassung: Die allgemeinste für die Erschütterungsmesstechnik in Betracht zu ziehende Bewegung wird theoretisch untersucht. Es werden die theoretischen Grundlagen zum Bau eines Erschütterungsmessers mit einfachster Frequenzkennlinie gegeben und die Messgenauigkeit untersucht. Ferner wird dargelegt, wie eine einwandfreie Eichung und Messung durchzuführen ist. Es wird ein Beschleunigungsmesser gebaut und im Sinne der entwickelten Theorie vollständig ausgemessen. Die erreichten Empfindlichkeiten sind für die praktischen Bedürfnisse ausreichend.

Summary: The most general vibration is considered theoretically. The theoretical basis for the construction of a vibration meter with simple frequency characteristic is given, and accuracy of measurement is determined. Indications are given, how to carry out calibration and measurement. An accelerometer has been constructed, and calibrated in accordance with the above-mentioned theory, sensitivity attained being sufficient for practical purposes.

I. Theoretische Grundlagen.

§ 1. Allgemeines über Erschütterungsmesser.

Erschütterungen sind kleine Verrückungen. Sie können, wie z. B. in Fahrzeugen, auch einer beliebigen Bewegung überlagert sein. Daher sind zu ihrer Beschreibung im allgemeinen drei Koordinatensysteme, d. h. das Absolutsystem S_1 und zwei Relativsysteme S_2 und S_3 notwendig.

Ein Erschütterungsmesser, auch Schwingungsmesser oder Seismograph genannt, besteht aus einem starren Rahmen oder Gehäuse, in dem ein mechanisches System so befestigt ist, dass es kleine Bewegungen um eine stabile Gleichgewichtslage ausführen kann. Der starre Teil des Erschütterungsmessers heisst „Gestell“, der bewegliche „Gehänge“.

Unter der Vielzahl der möglichen Gehänge interessieren besonders diejenigen, deren Massenelemente sich, wenigstens näherungsweise, auf geradlinigen Bahnen bewegen. (Lineare Vergrösserung.)

§ 2. Die Beschleunigung, mit der ein beliebiges Massenelement des Gehänges belastet wird.

Bewegt sich das Gestell, so wird sich das Gehänge infolge der veränderlichen Belastungen b durch die Zentrifugalbeschleunigungen $-\ddot{\mathbf{p}}_1$ und die Schwerkraftbeschleunigung g relativ zum Gestell bewegen. (Die Coriolis-Kraft ergibt für eine geführte Bewegung keinen Anteil zur Bewegungsgleichung.) Es genügt im vorliegenden Fall, anzunehmen, die Belastung sei unabhängig von den kleinen Auslenkungen des Gehänges aus seiner Ruhelage. Die Belastung b eines beliebigen Massenelementes dm des Gehänges ist daher so zu berechnen, wie wenn das Element in seiner Ruhelage, bezeichnet durch den Punkt P , festgehalten würde.

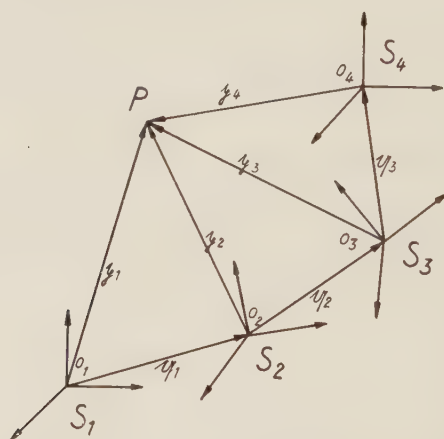


Fig. 1.

Darstellung der eingeführten Koordinatensysteme und Vektoren. Es bedeuten: O_j Ursprung des Systems S_j ; \mathbf{p}_j Ortsvektor des Punktes P im System S_j ; \mathbf{q}_j Ortsvektor des Ursprungs O_{j+1} im System S_j . ($j = 1, 2, 3, 4$).

Die eingeführten rechtwinkligen Koordinatensysteme S_1 , S_2 und S_3 , ein viertes, später noch einzuführendes System S_4 mit eingeschlossen, sowie die zur Beschreibung der Lage des Punktes P und der Koordinatenzentren O_j notwendigen Vektoren \mathbf{p}_j und \mathbf{q}_j sind in Fig. 1 dargestellt. Die Bedeutung der zur Beschreibung der Drehungen der Systeme gegeneinander notwendigen χ — Koordinaten $\psi_1; \varphi_1; \chi_1$ und $\psi_2; \varphi_2; \chi_2$ geht aus Fig. 2 hervor. (Lit. 4.)

Die Komponenten von \mathbf{q}_j im System S_j sind $\xi_j; \eta_j; \zeta_j$

Die Komponenten von \mathbf{p}_j im System S_j sind $x_j; y_j; z_j$.

Für die Berechnung von b werden die folgenden Begriffe und Bezeichnungen verwendet. Sind die beiden rechtwinkligen Systeme S und S' mit gleichen Einheiten auf den Achsen und der Vektor v mit den Komponenten $x; y; z$ im System S und den Komponenten $x'; y'; z'$ im System S' ;

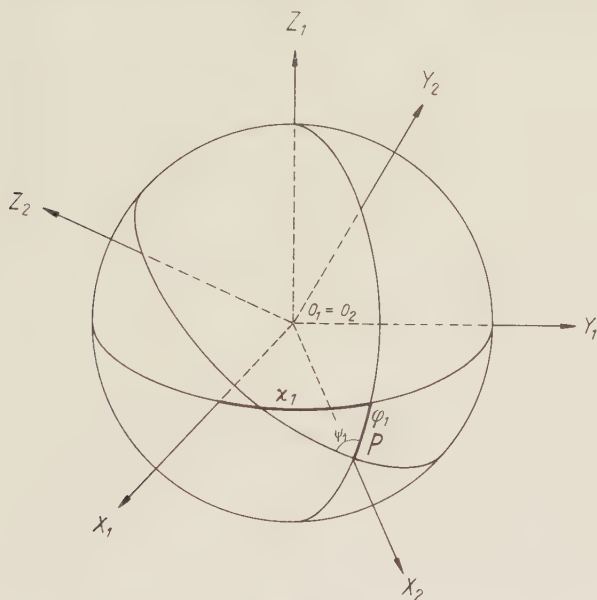


Fig. 2.

Zur Beschreibung der Drehung des Systems S_2 in Bezug auf das System S_1 . Analog wie S_2 zu S_1 wird mit Hilfe der \angle -Koordinaten $\psi_2; \varphi_2; \chi_2$ die Drehung des Systems S_3 in Bezug auf das System S_2 festgelegt.

$y'; z'$ im System S' vorgegeben, so bestehen die Gleichungen (Transformationsformeln):

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z \\ y' &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z \\ z' &= a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

oder zusammengefasst

$$v(S') = \mathfrak{A} v(S),$$

wobei $\mathfrak{A} = (a_{jk})$ die orthogonale Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bedeutet. Die Gleichung

$$v(S) = \mathfrak{A}^{-1} v(S')$$

stellt in abgekürzter Schreibweise die nach $x; y; z$ aufgelösten Gleichungen. (1) dar, wobei \mathfrak{A}^{-1} die zu \mathfrak{A} inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

bedeutet, d. h.

$$\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Sind $\mathfrak{B} = (b_{jk})$ und $\mathfrak{P} = (p_{jk})$ analoge Matrizen, so bedeutet das Produkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ die Matrix mit den Elementen

$$p_{jk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + a_{j3} b_{3k}.$$

Die Elemente der durch $\mathfrak{P}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ definierten Matrix $\mathfrak{P}' = (p'_{jk})$ erhält man aus der Gleichung

$$p'_{jk} = a_{jk} + b_{jk}.$$

Mit $d^n/dt^n \mathfrak{A}$ soll die Matrix $(d^n/dt^n a_{jk})$ bezeichnet werden.

Die Beschleunigung \mathfrak{b} ergibt sich aus der Gleichung:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g} - \ddot{\mathfrak{p}}_1 \quad \left[\ddot{\mathfrak{p}}_1 = \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{p}_1; \quad t = \text{Zeit} \right]. \quad (2)$$

Stellt die orthogonale Matrix \mathfrak{F} die Drehung des Systems S_2 gegenüber dem System S_1 und die orthogonale Matrix \mathfrak{C} die Drehung des Systems S_3 gegenüber dem System S_2 dar, so erhält man $\ddot{\mathfrak{p}}_1(S_1)$ durch folgende Operationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{p}_3 \\ \mathfrak{p}_1(S_1) &= \mathfrak{q}_1(S_1) + \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{q}_2(S_2) + \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{p}_3(S_3) \\ \ddot{\mathfrak{p}}_1(S_1) &= \ddot{\mathfrak{q}}_1(S_1) + \frac{d^2}{dt^2} [\mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{q}_2(S_2)] + \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{p}_3(S_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Damit ergibt sich für $\mathfrak{b}(S_3)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(S_3) &= \mathfrak{C} \mathfrak{F} [\mathfrak{g}(S_1) - \ddot{\mathfrak{p}}_1(S_1)] \\ \mathfrak{b}(S_3) &= \mathfrak{C} \{ \mathfrak{F} [\mathfrak{g}(S_1) - \ddot{\mathfrak{q}}_1(S_1)] - \mathfrak{R} \mathfrak{q}_2(S_2) - 2 \mathfrak{R}_1 \dot{\mathfrak{q}}_2(S_2) - \ddot{\mathfrak{q}}_2(S_2) \} \\ &\quad - \left[\mathfrak{C} \mathfrak{R} \mathfrak{C}^{-1} + 2 \mathfrak{C} \mathfrak{R}_1 \frac{d}{dt} \mathfrak{C}^{-1} + \mathfrak{Q} \right] \mathfrak{p}_3(S_3) \end{aligned} \quad (4)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{Q} = (Q_{jk}) = \mathfrak{C} \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{C}^{-1}; \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{F} \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{F}^{-1}; \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{F} \frac{d}{dt} \mathfrak{F}^{-1};$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \cos \chi_2 & \cos \varphi_2 \sin \chi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \chi_2 - \cos \varphi_2 \sin \chi_2; & \sin \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin \chi_2 + \cos \varphi_2 \cos \chi_2; & \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \chi_2 + \sin \varphi_2 \sin \chi_2; & \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin \chi_2 - \sin \varphi_2 \cos \chi_2; & \cos \varphi_2 \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Die Elemente von $\mathfrak{Q} = (Q_{jk})$ sind in einer Arbeit von F. GASSMANN (Lit. 4) veröffentlicht. Sie haben folgende Werte:

$$Q_{11} = -\dot{\chi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2,$$

$$Q_{12} = -\ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin \psi_2 + \ddot{\varphi}_2 \sin \psi_2 \\ + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_2 + 2 \dot{\varphi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \psi_2,$$

$$Q_{13} = \ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \psi_2 + \ddot{\varphi}_2 \cos \psi_2 \\ + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 - 2 \dot{\varphi}_2 \dot{\psi}_2 \sin \psi_2,$$

$$Q_{21} = \ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin \psi_2 - \ddot{\varphi}_2 \sin \psi_2 \\ - 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \sin \varphi_2 \cos \psi_2,$$

$$Q_{22} = -\dot{\chi}_2^2 (\sin^2 \varphi_2 \sin^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_2) - \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \psi_2 - \dot{\psi}_2^2 \\ + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \sin \varphi_2,$$

$$Q_{23} = \ddot{\chi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\chi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 - \ddot{\psi}_2 \\ + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \cos^2 \psi_2,$$

$$Q_{31} = -\ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \psi_2 - \ddot{\varphi}_2 \cos \psi_2 \\ + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \sin \varphi_2 \sin \psi_2,$$

$$Q_{32} = -\ddot{\chi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\chi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 + \ddot{\psi}_2 \\ - 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \sin^2 \psi_2,$$

$$Q_{33} = -\dot{\chi}_2^2 (\sin^2 \varphi_2 \cos^2 \psi_2 + \sin^2 \psi_2) - \dot{\varphi}_2^2 \cos^2 \psi_2 - \dot{\psi}_2^2 \\ - 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 + 2 \dot{\chi}_2 \dot{\psi}_2 \sin \varphi_2.$$

Ersetzt man in \mathfrak{C} und \mathfrak{Q} die Winkel ψ_2 ; φ_2 ; χ_2 durch ψ_1 ; φ_1 ; χ_1 , so erhält man \mathfrak{F} und \mathfrak{R} . Ferner ist

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{pmatrix} 0; \dot{\varphi}_1 \sin \psi_1 - \dot{\chi}_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1; \dot{\varphi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\chi}_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_1 \\ -\dot{\varphi}_1 \sin \psi_1 + \dot{\chi}_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1; 0; -\dot{\psi}_1 + \dot{\chi}_1 \sin \varphi_1 \\ -\dot{\varphi}_1 \cos \psi_1 - \dot{\chi}_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_1; \dot{\psi}_1 - \dot{\chi}_1 \sin \varphi_1; 0 \end{pmatrix}.$$

Im allgemeinen wird der Erschütterungsmesser im System S_3 eine beliebige Lage innehaben und somit das System S_3 nicht mehr das dem Gehänge am besten angepasste Bezugssystem darstellen. Daher wird ein viertes Koordinatensystem S_4 eingeführt, das mit dem System S_3 starr verbunden ist. Beschreibt man die Drehung des Systems S_4 in bezug auf das System S_3 mit Hilfe der Matrix

$$\mathfrak{Y} = (c_{jk}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \cos \gamma_3 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich für die Belastung $\mathfrak{b}(S_4)$

$$\mathfrak{b}(S_4) = \mathfrak{Y} \mathfrak{b}(S_3). \quad (5)$$

Dabei hat man in $\mathfrak{b}(S_3)$ (Gleichung (4)) für $\mathfrak{p}_3(S_3)$ den Ausdruck $\mathfrak{q}_3(S_3) + \mathfrak{Y}^{-1} \mathfrak{p}_4(S_4)$ zu setzen.

Ordnet man $\mathfrak{b}(S_4)$ nach den Komponenten von $\mathfrak{p}_4(S_4)$ so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(S_4) = & \mathfrak{e}_{4x} (Q_1'' - x_4 Q_{11}'' - y_4 Q_{12}'' - z_4 Q_{13}'') \\ & + \mathfrak{e}_{4y} (Q_2'' - x_4 Q_{21}'' - y_4 Q_{22}'' - z_4 Q_{23}'') \\ & + \mathfrak{e}_{4z} (Q_3'' - x_4 Q_{31}'' - y_4 Q_{32}'' - z_4 Q_{33}''), \end{aligned} \quad (6)$$

wobei die \mathfrak{e}_{4x} ; \mathfrak{e}_{4y} ; \mathfrak{e}_{4z} die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen von S_4 , die Q_j'' die Translations- und Schwereanteile und die Q_{jk}'' die Rotationsanteile von \mathfrak{b} darstellen.

§ 3. Erschütterungsmesser mit einem Freiheitsgrad.

Ist die Rückstellkraft proportional der Auslenkung und die Dämpfung proportional der Geschwindigkeit, so erhält man (Lit. 5) als Indikatorgleichung des Erschütterungsmessers mit einem Freiheitsgrad:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = \sum_{j=1}^3 V_j' Q_j'' + \sum_{j,k}^{1,2,3} V_{jk}' Q_{jk}''. \quad (7)$$

(s = Indikatorexausschlag; D = Dämpfungsfaktor; $\nu_0 \cdot 2\pi$ = reduzierte Eigenfrequenz; V_j' und V_{jk}' sind die Übertragungsfaktoren des Erschütterungsmessers, bezogen auf das System S_4 ; die Q_j'' und Q_{jk}'' sind der Gleichung (6) zu entnehmen.)

Ist das System S_2 mit dem System S_1 identisch, so geht die Gleichung (7) über in

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = \sum_{j=1}^3 V_j' Q_j' + \sum_{j,k}^{1,2,3} V_{jk}' Q_{jk}', \quad (8)$$

und ist das System S_4 mit dem System S_3 und das System S_2 mit dem System S_1 identisch, so reduzieren sich die Grössen Q_j' und Q_{jk}' auf Q_j und Q_{jk} und die Indikatorgleichung wird

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = \sum_{j=1}^3 V_j Q_j + \sum_{j,k}^{1,2,3} V_{jk} Q_{jk}. \quad (9)$$

(V_j ; V_{jk} = Übertragungsfaktoren, bezogen auf S_3)

Zwischen den Grössen V_j ; V_{jk} ; Q_j ; Q_{jk} und V'_j ; V'_{jk} ; Q'_j ; Q'_{jk} bestehen mit $\tau_1 = \xi_3$; $\tau_2 = \eta_3$ und $\tau_3 = \zeta_3$ die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= \sum_k c_{kj} Q'_j + \sum_{k,l,m} c_{lj} c_{mk} \tau_k Q'_{lm}, \\ Q_{jk} &= \sum_{l,m} c_{lj} c_{mk} Q'_{lm}, \\ V'_k &= \sum_j c_{kj} V_j, \\ V_{jk} &= \sum_{l,m} c_{lj} c_{mk} (\tau_k V_j + V_{jk}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ein Erschütterungsmesser soll in bezug auf ein gegebenes System S_n ein Grundtypus genannt werden, wenn von den zwölf Übertragungsfaktoren, bezogen auf S_n , ein einziger von Null verschieden ist. Es gibt drei Arten von Grundtypen. Beispielsweise auf S_3 bezogen, liegt der erste, zweite oder dritte Grundtypus vor, je nachdem ein V_j , ein V_{jk} ($j \neq k$) oder ein V_{jj} von Null verschieden ist.

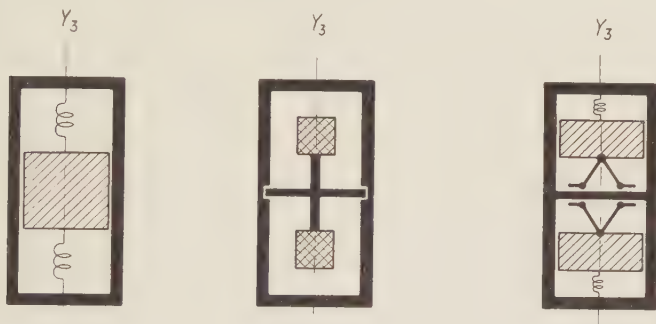


Fig. 3.

Die drei Grundtypen von Erschütterungsmessern.

Beispiele: Die Arbeitsrichtung der Erschütterungsmesser sei parallel zur y_3 -Achse.

1. Grundtypus: $V_2 \neq 0$.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Alle Lagekoordinaten Null, ausser η_2 :

$$\ddot{s} + D \dot{s} + v_0^2 s = -V_2 \ddot{\eta}_2. \quad (11)$$

2. Grundtypus: $V_{21} \neq 0$.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Alle Lagekoordinaten Null, ausser χ_2 :

$$\ddot{s} + D \dot{s} + v_0^2 s = +V_{21} \ddot{\chi}_2. \quad (12)$$

3. Grundtypus: $V_{11} \neq 0$.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Alle Lagekoordinaten Null, ausser χ_2 :

$$\ddot{s} + D\dot{s} + v_0^2 s = -\dot{V}_{11} \dot{\chi}_2^2. \quad (13)$$

Um über die Wirkungsweise von Erschütterungsmessern Aufschluss zu erlangen, betrachte man z. B. Gleichung (11). Mit der Annahme, η_2 sei harmonisch, also $\eta_2 = \eta_0 e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$) (allgemeinere Funktionen durch Zusammensetzung nach Fourier) erhält man als stationäre Lösung von Gleichung (11)

$$s = s_0 e^{i(\omega t - \vartheta)}$$

$$s_0(\omega) = V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega); \quad W(\omega) = \frac{1}{+ \sqrt{(v_0^2 - \omega^2)^2 + D^2 \omega^2}}; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{D\omega}{v_0^2 - \omega^2}; \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Ist $\omega \ll v_0$ und $D = 0$, so ergibt sich aus Gleichung (14) für den Indikатораusschlag s :

$$s \cong \frac{V_2}{v_0^2} \eta_0 \omega^2 e^{i\omega t} \cong - \frac{V_2}{v_0^2} \ddot{\eta}_2, \quad (15)$$

d. h. der Erschütterungsmesser ist ein idealer *Beschleunigungsmesser*.

Zweifelloos stellt Gleichung (15) die erstrebte Lösung dar. Dagegen sind in praxi die beiden Bedingungen $\omega \ll v_0$ und $D = 0$ oft nicht realisierbar.

Bei der Dimensionierung des Beschleunigungsmessers fragt es sich daher, wie gross v_0 sein muss, und welcher Dämpfungsfaktor D noch zulässig ist, damit bei vorgegebener oberer Schranke ω_b von ω (allgemein durch Filter realisierbar, siehe § 9) die maximale Amplitudenüberhöhung den Betrag von $m_b\%$ und die maximale Phasenverschiebung den Betrag von ϑ_b^0 nicht überschreitet.

m_b (lineare Verzerrung) sei durch folgende Gleichung definiert:

$$1 + \frac{m_b}{100} = \frac{W(\omega)}{W(0)}.$$

Aus Gleichung (14) erhält man damit als Bedingung für v_0 :

$$\frac{1}{v_0} \leq \frac{1}{\omega_b} \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_b}{100}\right) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_b}}}, \quad (16)$$

und für D :

$$D \leq \frac{v_0^2 - \omega^2}{\omega} |\operatorname{tg} \vartheta_b|. \quad (17)$$

Ist $\omega \gg \nu_0$ und $D \cong 0$, so ergibt sich aus der Gleichung (14) für den Indikatoreauschlag s :

$$s \cong V_2 \eta_0 e^{i\omega t} \cong V_2 \eta_2, \quad (18)$$

d. h. der Erschütterungsmesser arbeitet als idealer *Amplitudenmesser*.

Die Dimensionierung des Amplitudenmessers ist analog wie die des Beschleunigungsmessers. Bezeichnet man mit ω_a die untere Schranke von ω , mit m_a die maximale Amplitudenüberhöhung und mit ϑ_a die maximale Phasenverschiebung, so ergibt sich für ν_0

$$\nu_0 \leq \omega_a \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_a}{100}\right) \sqrt{1 + \tan^2 \vartheta_a}}}, \quad (19)$$

und für D

$$D \leq \left| \frac{\nu_0^2 - \omega^2}{\omega} \tan \vartheta_a \right|. \quad (20)$$

Als Mass für nicht lineare Verzerrungen werde der *Klirrfaktor* eingeführt. Vorgegeben sei ein Übertragungsglied (Erschütterungsmesser, Schütteltisch, Verstärker), das die harmonische Funktion $a \sin \omega t$ in die periodische Funktion

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \sin(\omega t - \vartheta_1) + a_2 \sin(2\omega t - \vartheta_2) + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\omega t - \vartheta_n) \end{aligned}$$

überführt. Als Klirrfaktor Γ dieses Übertragungsgliedes bezeichnet man (Lit. 19) die dimensionslose Grösse:

$$\Gamma = \frac{1}{|a_1|} \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2}. \quad (21)$$

Beim Erschütterungsmesser sind nichtlineare Terme praktisch nur in der Rückstellkraft zu erwarten. Bleibt diese symmetrisch, so nimmt die Bewegungsgleichung folgende Form an:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s + \varepsilon_1 s^3 = V_2 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t. \quad (22)$$

Zur Entwicklung der Lösung nach bekanntem Schema sei für die erste Näherung s_1 gesetzt und dafür $\varepsilon_1 = 0$ angenommen. In Gleichung (22) eingesetzt ergibt dies:

$$\ddot{s}_1 + D\dot{s}_1 + \nu_0^2 s_1 = V_2 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t$$

und für s_1 erhält man:

$$s_1 = V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega) \sin(\omega t - \vartheta).$$

Damit geht Gleichung (22) für die zweite Näherung über in:

$$\ddot{s}_2 + D \dot{s}_2 + \nu_0^2 s_2 + \varepsilon_1 s_1^3 = V_2 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t,$$

und für s_2 findet man:

$$s_2 = s_1 - \varepsilon_1 (V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega))^3 \left\{ \frac{3}{4} W(\omega) \sin(\omega t - 2\vartheta) - \frac{W(3\omega)}{4} \sin(3\omega t - 3\vartheta - \vartheta_1) \right\}. \quad (23)$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens ist es möglich, beliebig viele Glieder der Fourierreihe zu bestimmen.

Aus Gleichung (23) bestimmt man den Klirrfaktor Γ_s in erster Näherung zu:

$$\Gamma_s = \frac{\varepsilon_1 (V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega))^2 W(3\omega)}{4 \sqrt{1 - \frac{3}{2} \varepsilon_1 (V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega))^2 W(\omega) \cos \vartheta}}. \quad (24)$$

Es sei noch beigelegt, dass, wie aus Gleichung (23) zu ersehen ist, mit der Bildung von „Obertönen“ auch eine zusätzliche lineare Verzerrung verbunden ist.

Löst man ferner die Gleichung (24) nach $\eta_0 \omega^2$ auf, so erhält man, die, bei vorgegebenem Klirrfaktor Γ_s , noch zulässige Beschleunigungsamplitude $\eta_0 \omega^2$:

$$(\eta_0 \omega^2)^2 = \frac{4 \Gamma_s^2}{\varepsilon_1 W^2(3\omega) [V_2 W(\omega)]^2} \cdot \{ -3 \Gamma_s W(\omega) \cos \vartheta + \sqrt{(3 \Gamma_s W(\omega) \cos \vartheta)^2 + W^2(3\omega)} \}.$$

Berücksichtigt man einen quadratischen Ergänzungsterm zur Rückstellkraft, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{s} + D \dot{s} + \nu_0^2 s + \varepsilon_2 s^2 = V_2 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t.$$

Man berechnet den Klirrfaktor Γ_u analog dem Klirrfaktor Γ_s und erhält in erster Näherung:

$$\Gamma_u = \frac{1}{2} \varepsilon_2 V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega) W(2\omega).$$

Eine zusätzliche lineare Verzerrung entsteht in diesem Fall nicht. Dagegen wird der Schwingungsmittelpunkt angenähert um den Betrag $-\varepsilon_2 [V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega)]^2 / 2 \nu_0^2$ verlagert.

Ferner erhält man bei vorgegebenem Klirrfaktor Γ_u für die zulässige Beschleunigungsamplitude $\eta_0 \omega^2$:

$$\eta_0 \omega^2 = \frac{2 \Gamma_u}{\varepsilon_2 V_2 W(\omega) W(2\omega)}.$$

§ 4. Der prismatische Stab ohne Einzelmasse als Erschütterungsmesser.

Für einen Stab von konstantem Querschnitt q ergibt der Ansatz $l \cdot F_0(x_4) e^{i\omega t}$ für die Störung (allgemeinere Funktionen siehe § 3), eingeführt in die Differentialgleichung der Querschwingungen

$$\frac{\delta^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} = F_0(r) e^{i\omega t} \begin{pmatrix} w_1 = l w \\ x_4 = l r \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$H = \frac{EJ}{l^4 \varrho q}$; E = Elastizitätsmodul; J = Trägheitsmoment des Querschnittes;
 ϱ = Dichte; l = Stablänge; x_4 = Stabachse; w_1 = Ausschlag.

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} r = 0: \quad w &= 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ r = 1: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} = 0 \end{aligned}$$

die Lösung (Lit. 13):

$$w(r, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n U_n(r)}{v_n^2 - \omega^2 - iD(v_n - \omega)}. \quad (26)$$

Dabei ist

$$v_n^2 - iDv_n - H\lambda_n = 0 \text{ oder } H\lambda_n = N_n^2 \text{ und } K_n = \int_0^1 F_0(r) u_n(r) dr,$$

(λ_n = Eigenwerte; u_n = normierte Eigenfunktionen).

Ist ω klein gegenüber v_1 , also auch gegenüber v_2, v_3, \dots, v_n (Beschleunigungsmesser), so geht Gleichung (26) über in

$$w_1(r, t) \cong e^{i\omega t} \frac{K_1 u_1(r)}{N_1^2 - \omega^2 + iD\omega} = e^{i(\omega t - \vartheta)} \cdot \frac{K_1 u_1(r)}{\sqrt{(N_1^2 - \omega^2)^2 + D^2 \omega^2}}, \quad (27)$$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{D\omega}{N_1^2 - \omega^2}.$$

Soll der Stab als Erschütterungsmesser verwendet werden, so muss aus seinem Biegungszustand ein Indikator $s(t)$ hergestellt werden. Man gewinnt diesen, indem man der Funktion w_1 durch eine geeignete, physikalisch realisierbare Operation eine von r unabhängige Funktion $s(t)$ zuordnet. Nach Gleichung (27) wird dies erreicht, indem man der Funktion $u_1(r)$ eine Konstante Φ zuordnet,

($\Phi = u_1(1)$; $\Phi = \int_0^1 u_1(r) dr$ sind Beispiele solcher Zuordnungen) und

$$s(t) = \frac{K_1 \Phi}{\sqrt{(N_1^2 - \omega^2)^2 + D^2 \omega^2}}$$

setzt. Nach § 3 Gleichung (14) genügt s der Indikatorgleichung

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = \Phi K_1 e^{i\omega t}.$$

Zur Ermittlung des Klirrfaktors Γ_1 bedarf die Differentialgleichung (25) einer Erweiterung, d. h. in ihrer Herleitung ist für die Krümmung, an Stelle der ersten die zweite Näherung zu verwenden.

Damit lautet die Differentialgleichung der Bewegung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - \frac{3}{2} H \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] = F_0(r) e^{i\omega t}.$$

Betrachtet man den nichtlinearen Term als Störungsglied, so ergibt sich für Γ_1 in erster Näherung mit Hilfe der Störungsrechnung

$$\Gamma_1 = \frac{\bar{K}_1}{K_1} \cdot \frac{\sqrt{(N_1^2 - \omega^2)^2 + D^2 \omega^2}}{\sqrt{(N_1^2 - (3\omega)^2)^2 + D^2 (3\omega)^2}},$$

$$\bar{K}_1 = \frac{3}{2} H e^{-3i\omega t} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \right] u_1 dr.$$

Verwendet man einen piezoelektrischen Stab als Beschleunigungsmesser und S_4 als Bezugssystem (System S_2 identisch S_1) und lässt die Stabachse ($x_4 = 0$ bis $x_4 = l$) mit der x_4 -Achse und die Schwingungsebene mit der ($x_4; y_4$)-Ebene zusammenfallen, so gibt von $\mathbf{b}(S_4)$ nur die y_4 -Komponente zu einer EMK Anlass, eine Tatsache, die aus Symmetriegründen zu erwarten ist und durch das Experiment bestätigt wird (siehe § 10).

Für die mit l multiplizierte rechte Seite von Gleichung (25) ist die y_4 -Komponente von $\mathbf{b}(S_4)$ einzusetzen, daher gilt

$$l \cdot F(r, t) = Q'_2 - l r Q'_{21} = Q'_2 - x_4 Q'_{21}.$$

Setzt man

$$Q'_2(t) = \sum_k a_k e^{i\omega_k t} \quad \text{und} \quad Q'_{21}(t) = \sum_k b_k e^{i\omega_k t},$$

so geht die Indikatorgleichung für den Stab über in

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = V'_2 Q'_2(t) + V'_{21} Q'_{21}(t) r = \Phi \sum_k B_k e^{i\omega_k t} \cdot \left(V'_2 = \frac{\Phi}{l} \int_0^1 u_1(r) dr; \quad V'_{21} = -\Phi \int_0^1 r u_1(r) dr. \right)$$

Das System S_4 soll aus dem System S_3 durch eine Parallelverschiebung in Richtung der x_3 -Achse um den Betrag $\tau_1 = -l/5$ hervorgehen. Es ist also $\tau_2 = \tau_3 = 0$ und $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$. Nach den Transfor-

mationsformeln (10) wird dann $V_{21} = 0$ und $V_2 = V'_2$, so dass sich die Indikatorgleichung auf

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = V_2 Q_2(t)$$

reduziert.

Der Stab ist demnach für alle Störungsfrequenzen ω_k , die klein gegenüber N_1 sind, ein Beschleunigungsmesser vom ersten Grundtypus, d. h. auf der Stabachse existiert ein ausgezeichneteter Punkt (neutraler Punkt) mit der Eigenschaft, dass alle Rotationen, um eine beliebige Achse durch den neutralen Punkt (ausgenommen der Schwereanteil), keinen Beitrag zur EMK geben.

Für den Amplitudenmesser ist die Dimensionierung analog dem Beschleunigungsmesser. Jedoch ist hier der Messbereich grundsätzlich beidseitig durch Resonanzstellen begrenzt.

Eine rohe Abschätzung des maximalen Messbereiches ergibt mit $v_1 = 0,4 v_2$ und $v_2 = 0,59 v_3$ (Lit. 14), z. B. für $\bar{v}_1 = 8$ Hz; $\bar{v}_2 = 20$ Hz und $\bar{v}_3 = 33,5$ Hz. Allein diese Zahlen zeigen zur Genüge, dass ein piezoelektrischer Stab ohne Einzelmasse als Amplitudenmesser wenig geeignet ist. Es lassen sich jedoch, wie aus verschiedenen Arbeiten, insbesondere aus einer Arbeit von F. Gassmann (Lit. 6) zu entnehmen ist, diese Resonanzstellen, unter zu Hilfenahme einer Einzelmasse am freien Ende derart auseinanderziehen, dass sich praktisch brauchbare Messbereiche ergeben.

§ 5. Der prismatische Stab mit Einzelmasse als Erschütterungsmesser.

Mit S_4 als Bezugssystem (S_2 identisch S_1), der x_4 -Achse als Stabachse ($x_4 = 0$ bis $x_4 = l$), der $(x_4; y_4)$ -Ebene als Schwingungsebene und der Einzelmasse M am Stabende $x_4 = l$, ergibt sich für praktisch ungedämpfte Querschwingungen des Stabes (kleine Dämpfungsfaktoren sind ohne merklichen Einfluss auf die lineare Verzerrung; siehe auch § 4), die Differentialgleichung (Lit. 12)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + H \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} = F(r, t), \quad (28)$$

mit den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} r=0: \quad w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} &= 0, \\ r=1: \quad L_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= H G_1(t), \\ L_2 \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= H G_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \frac{M l^3}{E J} \left[\frac{1}{l} Q'_2(t) - Q'_{21}(t) \right] \\ G_2(t) &= \frac{l}{E J} [-\theta_1 Q'_{21}(t) + \theta_2 Q'_{12}(t)] \end{aligned} \quad (30)$$

(θ_1 ; θ_2 ; θ Trägheitsmomente der Einzelmasse)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_M (x_4 - l)^2 dm; \quad \theta_2 = \sum_M y_4^2 dm; \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 \\ M_1 &= \frac{L_1}{H} = \frac{M l^3}{E J}; \quad M_2 = \frac{L_2}{H} = \frac{\theta l}{J E}. \end{aligned}$$

Der Ansatz $w = u_n \cdot e^{i v_n t}$ ergibt für die Eigenfunktionen u_n die Differentialgleichung

$$u_n'''' - \alpha_n^4 u_n = 0 \quad (\alpha_n^4 = H v_n^2; \quad \frac{d^4 u_n}{d r^4} = u_n''''') \quad (31)$$

mit den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} r = 0: \quad u_n &= 0; \quad u_n' = 0, \\ r = 1: \quad u_n'' &= L_2 \alpha_n^4 u_n'; \quad u_n''' = -L_1 \alpha_n^4 u_n. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Bildet man mit Hilfe der Gleichung (31) die Gleichung:

$$u_j'''' u_k - u_j u_k'''' = (\alpha_j^4 - \alpha_k^4) u_j u_k \quad (\alpha_j \neq \alpha_k)$$

und integriert dieselbe von 0 bis 1 unter Berücksichtigung der Randbedingungen (32) und der Identität

$$f_1'''' f_2 - f_1 f_2'''' = \frac{d}{dr} (f_1''' f_2 - f_1'' f_2' + f_1' f_2'' - f_1 f_2'''), \quad (33)$$

so erhält man

$$\int_0^1 u_j(r) u_k(r) dr + L_1 u_j(1) u_k(1) + L_2 u_j'(1) u_k'(1) = 0. \quad (34)$$

Verwendet man den Operator \mathcal{S} (Stieltjessches Integral):

$$\mathcal{S} f(r) u_k(r) dr = \int_0^1 f(r) u_k(r) dr + L_1 f(1) u_k(1) + L_2 f'(1) u_k'(1), \quad (35)$$

so lautet die sogenannte „belastete Orthogonalität“ (Lit. 16) zwischen den Eigenfunktionen (Gleichung (34)):

$$\mathcal{S} u_j(r) u_k(r) dr = 0 \quad (j \neq k) \quad (36)$$

und entsprechend die Bedingung zur Normierung der Eigenfunktionen

$$\mathcal{S} u_k^2(r) dr = 1. \quad (37)$$

Ferner sei

$$F_n(t) = \int_0^1 F(r, t) u_n(r) dr + H G_1(t) u_n(1) + H G_2(t) u_n'(1). \quad (38)$$

Als Lösungsansatz dient eine Entwicklung nach Eigenfunktionen

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) u_n(r). \quad (39)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{C}_n(t) u_n(r). \quad (40)$$

\mathcal{S} angewendet auf (39) und (40) führt unter Berücksichtigung von (36) und (37) auf die Gleichungen

$$C_n(t) = \mathcal{S} w(r, t) u_n(r) dr, \quad (41)$$

$$\ddot{C}_n(t) = \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r, t) \cdot u_n(r) dr. \quad (42)$$

Mit den Gleichungen (28), (29), (35) und (38) bildet man den Ausdruck

$$\mathcal{S} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} u_n dr + H \int_0^1 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} u_n dr + \left(-H \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + H \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_n' \right)_{r=1} = F_n(t). \quad (43)$$

Das Integral

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} u_n dr$$

geht mit Hilfe der Identität (33) über in

$$\int_0^1 w u_n'''' dr + \left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} u_n - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_n' + \frac{\partial w}{\partial r} u_n'' - w u_n''' \right]_0^1$$

und durch Einsetzen der Randbedingungen für $r = 0$ und $r = 1$ und unter Berücksichtigung der Gleichung (31) für $u_n'''(r)$ in

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} u_n dr = \alpha_n^4 \int_0^1 w u_n dr + \left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} u_n - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_n' \right]_{r=1} + \alpha_n^4 \left[L_2 \frac{\partial w}{\partial r} u_n' - L_1 w u_n \right]_{r=1}.$$

Dies in die Gleichung (43) eingeführt, ergibt mit den Gleichungen (41), (42)

$$\ddot{C}_n + H \alpha_n^4 C_n = F_n(t). \quad (44)$$

Setzt man die harmonischen Störungen

$$F(r, t) = F_1(r) e^{i\omega t}; H G_1(t) = g_1 e^{i\omega t}; H G_2(t) = g_2 e^{i\omega t}; F_n(t) = K_n e^{i\omega t},$$

$$K_n = \int_0^1 F_1(r) u_n dr + g_1 u_n(1) + g_2 u_n'(1)$$

an, so ergibt sich für die stationäre Lösung:

$$w(r, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n u_n(r)}{u_n^2 - \omega^2}. \quad (45)$$

Damit kann man die Dimensionierung (ausgenommen Klirrfaktor) unter der Bedingung, dass das Massenträgheitsmoment der Einzelmasse in bezug auf die $(x_4; z_4)$ -Ebene zu vernachlässigen ist (siehe Gleichung (30)), analog wie im § 4 zu Ende führen und gelangt so zu einem Beschleunigungsmesser des ersten Grundtypus.

§ 6. Der dreieckförmig zugespitzte Stab als Erschütterungsmesser.

Die Ausdehnung des Stabes in Richtung der Querschwingungen sei konstant und seine Form, in derselben Richtung betrachtet, entspreche einem gleichschenkligen Dreieck. Mit q als Querschnitt und J als Flächenträgheitsmoment ergibt sich, das gleiche Bezugssystem wie im § 5 vorausgesetzt, für die Differentialgleichung der Querschwingungen (Lit. 8):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{E}{l^4 q} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[J(r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = F(r, t) \quad (46)$$

mit den Randbedingungen:

$$r=0: \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} = 0; r=1: w=0; \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Ergibt das Stabprofil die Gleichungen $q(r) = q_0 r$ (q_0 - konstant) und $J = J_0 r$ (J_0 = konstant), so führt der Lösungsansatz $w = u(r) \cdot e^{i\omega t}$ die Gleichung (46) für die Störung $F(r, t) = F_0(r) e^{i\omega t}$ über in

$$-(\omega^2 - i\omega D) u + \frac{E J_0}{l^4 q q_0 r} (r u'')'' = F_0(r). \quad (47)$$

Mit

$$v(r) = u(r) + \frac{F_0(r)}{\omega^2 - i\omega D}; \sigma = \frac{l^4 q q_0}{E J_0} (\omega^2 - i\omega D); F(r) = a_0 + a_1 r \quad (48)$$

(siehe Gleichung (6)) erhält man aus Gleichung (47)

$$r v'''' + 2 v''' - \sigma r v = 0 \quad (49)$$

mit den Randbedingungen

$$r = 0: v'' = 0; v''' = 0; r = 1: v = \frac{a_0 + a_1}{\omega^2 - i \omega D}; v' = \frac{a_0}{\omega^2 - i \omega D}.$$

Zur Lösung von (49) dient der Reihenansatz $v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n$. Berücksichtigt man vorerst nur die beiden Randbedingungen für $r = 0$, so ergibt dies

$$v = A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n r^{4n}}{\prod_{j=1}^n 4j(4j-1)^2(4j-2)} \right] + A_1 \left[r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n r^{4n+1}}{\prod_{j=1}^n (4j+1)(4j)^2(4j-1)} \right]. \quad (50)$$

Als Näherung \bar{v} sollen die ersten vier Glieder der Reihenentwicklung für v genommen werden.

$$\bar{v} = A_0 + A_1 r + \frac{A_0}{72} \sigma r^4 + \frac{A_1}{240} \sigma r^5. \quad (51)$$

Zur Berechnung von A_0 und A_1 benützt man die beiden Randbedingungen für $r = 1$. Diese ergeben

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sigma}{72}\right) A_0 + \left(1 + \frac{\sigma}{240}\right) A_1 &= \frac{a_0 + a_1}{\omega^2}, \\ \frac{\sigma}{18} A_0 + \left(1 + \frac{\sigma}{48}\right) A_1 &= \frac{a_1}{\omega^2}, \\ \omega^2 &= w^2 - i \omega D. \end{aligned}$$

Für die Determinante Δ_0 dieses Gleichungssystems ergibt sich

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\sigma}{72} & 1 + \frac{\sigma}{240} \\ \frac{\sigma}{18} & 1 + \frac{\sigma}{48} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sigma}{48} + \frac{\sigma^2}{17280}, \quad (52)$$

und für A_0 und A_1 erhält man

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 \Delta_0 A_0 &= \left(1 + \frac{\sigma}{48}\right) a_0 + \frac{\sigma}{60} a_1, \\ \bar{\omega}^2 \Delta_0 A_1 &= -\frac{\sigma}{18} a_0 + \left(1 - \frac{\sigma}{24}\right) a_1. \end{aligned} \quad (53)$$

Damit nimmt unter Berücksichtigung von (48), (51), (52), (53) und $H_0 - \frac{\bar{\omega}^2}{\sigma} = \frac{E J_0}{l^4 q_0}$ die Näherungslösung folgende Form an:

$$w \cong \frac{e^{i\omega t}}{6 H_0 A_0} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sigma}{720} \right) a_0 + \frac{1}{10} a_1 - \left[\frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sigma}{360} \right) a_1 \right] r \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \left[\left(1 + \frac{\sigma}{48} \right) a_0 + \frac{\sigma}{60} a_1 \right] r^4 + \frac{1}{40} \left[-\frac{\sigma}{18} a_0 + \left(1 - \frac{\sigma}{24} \right) a_1 \right] r^5 \right\}. \quad (54)$$

Aus $\Delta_0 = 0$ ergibt sich für die tiefste Resonanzstelle

$$\sigma_1 \cong 57,036 [\text{exakt } \sigma_1 = 51,20; (\text{Lit. 20})].$$

Damit kann man die Dimensionierung (ausgenommen Klirrfaktor) analog wie im § 6 zu Ende führen und erhält einen Beschleunigungsmesser des ersten Grundtypus.

§ 7. Erschütterungsmesser vom zweiten und dritten Grundtypus.

Die §§ 4, 5 und 6 zeigen, dass ein Stab von konstantem Querschnitt mit oder ohne Einzelmasse und ein Stab von variablem Querschnitt ohne Einzelmasse einem Erschütterungsmesser des ersten Grundtypus entsprechen.

Sind die Systeme S_2 und S_1 einerseits S_3 und S_4 andererseits identisch, die Längsachse des Stabes z. B. parallel zur x_3 -Achse, und liegt seine Schwingungsebene z. B. in der (x_3, y_3) -Ebene, so lautet die Indikatorgleichung:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = V_2 Q_2 + x_3 V_{21} Q_{21} + y_3 V_{22} Q_{22}.$$

Mit Hilfe von zwei Erschütterungsmessern des ersten Grundtypus, die eine geeignete gegenseitige Lage innehaben und in einer Differenzschaltung vereinigt sind, ist es möglich einen Erschütterungsmesser des zweiten oder dritten Grundtypus zu konstruieren. Eine Differenzschaltung entsteht, wenn man entweder die piezoelektrischen Stäbe entgegengesetzt orientiert (bei gleicher Belastung entgegengesetzt polarisiert) und sie in Reihe schaltet, oder sie gleich orientiert und Minuspol mit Minuspol verbindet und die EMK an den beiden Pluspolen abnimmt. Mathematisch bedeutet entgegengesetzte Orientierung eine Änderung des Vorzeichens der Störung.

Für die Erschütterungsmesser E_1 , E_2 und E_3 in Fig. 4 lauten die Indikatorgleichungen:

$$\ddot{s}_1 + D\dot{s}_1 + N_1^2 s_1 = V_2 Q_2 + \bar{x}_3 V_{21} Q_{21} + \bar{y}_3 V_{22} Q_{22}, \quad (55)$$

$$\ddot{s}_2 + D\dot{s}_2 + N_1^2 s_2 = -V_2 Q_2 - \bar{x}_3 V_{21} Q_{21} + \bar{y}_3 V_{22} Q_{22}, \quad (56)$$

$$\ddot{s}_3 + D\dot{s}_3 + N_1^2 s_3 = -V_2 Q_2 + \bar{x}_3 V_{21} Q_{21} - \bar{y}_3 V_{22} Q_{22}. \quad (57)$$

Addiert man die Gleichungen (55), (56), so ergibt dies:

$$(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + D(\dot{s}_1 + \dot{s}_2) + N_1^2 (s_1 + s_2) = 2\bar{y}_3 V_{22} Q_{22}.$$

Die Kombination von E_1 und E_2 ist somit ein Erschütterungsmesser des zweiten Grundtypus.

Aus den Gleichungen (55), (57) folgt:

$$(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_3) + D(\dot{s}_1 + \dot{s}_3) + N_1^2 (s_1 + s_3) = 2\bar{x}_3 V_{21} Q_{21},$$

was einem Erschütterungsmesser des dritten Grundtypus entspricht.

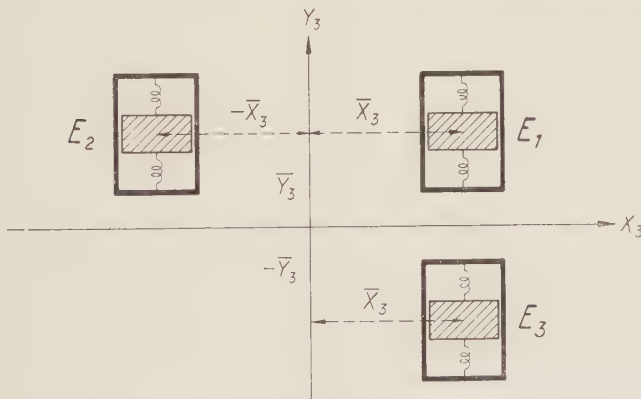


Fig. 4.

E_1 , E_2 und E_3 sind Erschütterungsmesser des ersten Grundtypus mit der Arbeitsrichtung y_3 . Die Kombination von E_1 und E_2 ergibt bei entgegengesetzter Orientierung und Serieschaltung einen Erschütterungsmesser des zweiten Grundtypus. Die Kombination von E_1 und E_3 ergibt unter denselben Voraussetzungen einen Erschütterungsmesser des dritten Grundtypus.

Zu bemerken ist noch, dass die Resultate auch dann keine Änderung erfahren, wenn man die Schwingungsebene und mit ihr die Längsachse des Stabes parallel zu sich selbst verschiebt. Für einen Erschütterungsmesser des zweiten oder dritten Grundtypus gibt es ∞^2 verschiedene adäquate Bezugssysteme, während es für einen Erschütterungsmesser des ersten Grundtypus genau ein adäquates Bezugssystem gibt.

II. Aufbau und Prüfung eines Erschütterungsmessers.

§ 8. Die dynamischen Eicheinrichtungen.

Aus den §§ 3 und 4 geht hervor, dass zur vollständigen Eichung eines Erschütterungsmessers eine Einrichtung, die innerhalb seines Messbereiches beliebige harmonische Translations- und Rotationsbewegungen erzeugt, ausreichend ist.

In der Literatur sind mehrere Konstruktionen mit horizontaler oder vertikaler Arbeitsrichtung für Translationsbewegungen (Schütteltische, Lit. 1, 7, 17, 21) beschrieben. Diese Schütteltische sind vorwiegend für Prüflinge von mehreren kg oder gar Tonnen (mechanisch registrierende Seismographen) gebaut und ihr Messbereich liegt in der Regel zwischen einigen Zehntels- und ca. 100 Hz.

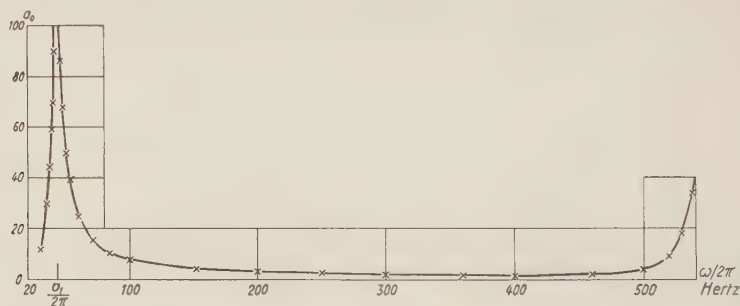


Fig. 5.

Resonanzkurve des beidseitig eingespannten Doppelstabes mit Zusatzmasse, aufgenommen mit konstanter Antriebskraft. ν_1 = tiefste Eigenfrequenz; a_0 = Amplitude.

Für den nun in Betracht zu ziehenden piezoelektrischen Erschütterungsmesser mit einem Messbereich von ca. 1 bis 400 Hz und einem Gewicht, das je nach Aufbau und Zubehör (eingebauter Vorverstärker) 200 bis 500 g beträgt, sei nachstehend eine einfache und zweckdienliche Einrichtung zur Eichung beschrieben.

Die Schwierigkeiten beim Bau des Schütteltisches sind die praktische Durchbildung des Schwingers und seine Einspannung.

Für den Aufbau des Schwingers eignet sich besonders Anticorodal, das in dynamischer Hinsicht mit Stahl vergleichbar, aber bedeutend einfacher zu bearbeiten ist.

Zur Dimensionierung des Schwingers sind die Überlegungen und teilweise auch die Resultate der §§ 4 und 5 ohne Einschränkung zu übernehmen.

Berücksichtigt man noch die Tatsache, dass es praktisch (Material) nicht möglich ist, die tiefste Eigenfrequenz des Schwingers

oberhalb 200 Hz zu legen, so bleibt als einzige Möglichkeit noch die Verlegung der tiefsten Eigenfrequenz an die untere Grenze und der nächst höhern Eigenfrequenz an die obere Grenze des Messbereiches offen.

Im vorliegenden Fall erfüllt ein beidseitig eingespannter und in der Mitte mit einer Zusatzmasse versehener (gleichzeitig Träger des Prüflings und der Antriebsspule) Doppelstab (siehe die schon zitierte Arbeit von F. GASSMANN sowie Lit. 9) die gestellten Anforderungen weitgehend. (Siehe Fig. 5 und Fig. 6.)

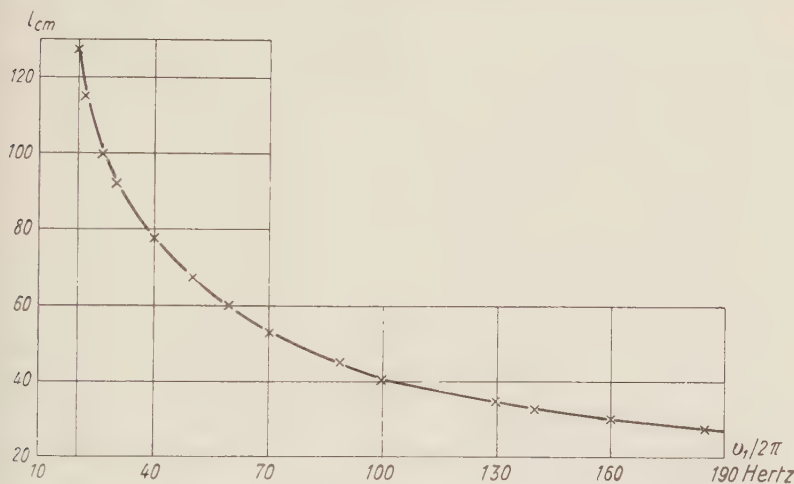


Fig. 6.

Die Länge des Doppelstabes mit Zusatzmasse als Funktion der tiefsten reduzierten Eigenfrequenz.

Für den Antrieb ist dasselbe Prinzip wie beim elektrodynamischen Lautsprecher (Lit. 19) angemessen.

Der dafür gebaute RC-Generator ist in drei Frequenzbereiche unterteilt, nämlich (Lit. 15):

0,9—5 Hz; 3,8—30 Hz und 25—2000 Hz.

Der maximale Klirrfaktor des letzten Bereiches ist $< 1\%$.

Der Kraftverstärker besteht aus einer Gegentaktend- und einer Phasenkehrstufe. Er ist zweifach gegengekoppelt und hat eine maximale Ausgangsleistung von 17 Watt. Der Klirrfaktor ist bis zu einer Ausgangsleistung von 7 Watt $< 1,5\%$.

Zur Registrierung der Tischbewegungen (Tisch = Zusatzmasse) dient ein mechanisch-optisches und ein elektrisch-optisches Vergrößerungssystem (Tauchspule).

Die aus einem linearen Glühfaden, einem Hohlspiegel und einer Zylinderlinse bestehende einfache Optik ergibt eine Strichbreite von ca. $\frac{2}{10}$ mm und lässt Registriergeschwindigkeiten bis zu 3 m/sec zu.

Die Ausmessung des Schütteltisches wurde wie folgt durchgeführt:

1. Statische Ausmessung des mechanisch-optischen Vergrößerungssystems mit Hilfe einer kontrollierten Messuhr. In Überein-

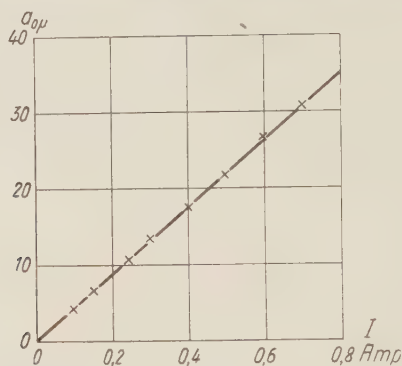


Fig. 7.

Die Amplitude des Doppelstabes in Funktion des Tauchspulenstromes.

stimmung mit der Theorie ergab sich eine 131fache Vergrößerung $\pm 0,5\%$. (Vergrößerung — Quotient aus Lichtzeigerausschlag und Tischauslenkung.)



Fig. 8.

Zwei Registrierproben von Tischausschlägen, aufgenommen bei 45 und 500 Hz.

2. Dynamische Vergleichsmessung der beiden Vergrößerungssysteme. Fig. 9 zeigt das Resultat. Daraus ist ersichtlich, dass das mechanisch-optische Vergrößerungssystem oberhalb 60 Hz nicht mehr brauchbar ist, was auf das „Rattern“ der Kugellager zurückzuführen ist. Die Vergrößerung des elektrisch-optischen Vergrößerungssystems ist 500fach $\pm 2\%$, gemessen bei 10 Hz.

3. Messung der Tischamplitude in Funktion des Tauchspulenstromes (siehe Fig. 7).

4. Kontrolle der vertikalen Tischbewegung auf Neigungsschwingungen.

5. Messung der Stablänge in Funktion der tiefsten Eigenfrequenz (siehe Fig. 6).

Die tiefste Frequenz, die vom Kraftverstärker noch einwandfrei verstärkt wird, ist 25 Hz. Diese Grenze ist nur mit Hilfe eines be-

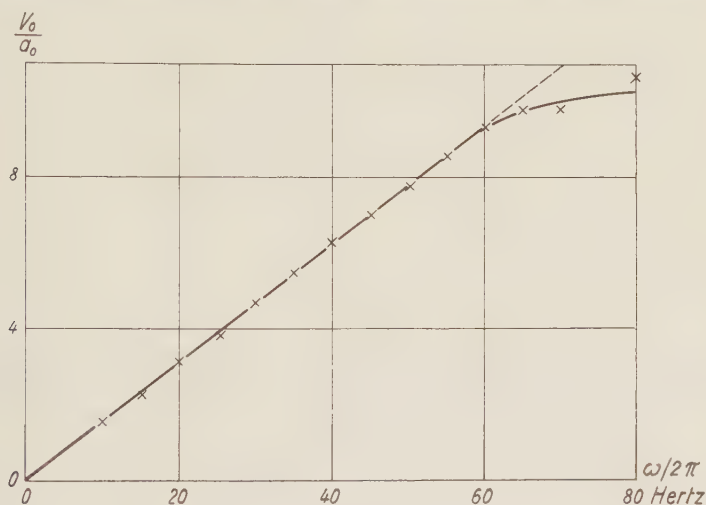


Fig. 9.

Zur dynamischen Vergleichsmessung der beiden Vergrößerungssysteme. Es bedeuten: ω — Frequenz der Tischbewegung; v_0 — Geschwindigkeitsamplitude und a_0 = Amplitude des Tisches.

deutend grösseren Aufwandes an Material noch merklich zu unterschreiten. Eine zweckmässige Lösung wäre daher ein rein mechanischer Antrieb.

Eine andere Lösung besteht darin, dass man die Zusatzmasse des Schwingers vergrössert und diesen jeweils durch kurzes Anstossen mit der Hand in seiner tiefsten Eigenfrequenz (die höheren Eigenfrequenzen werden nach verhältnismässig wenig Grundschwingungen unmerklich) erregt. Aus einer solchen Abklingkurve kann, infolge der kleinen Dämpfungsfaktoren (innere und äussere Dämpfung, eingeschlossen der Energieabfluss über die Einspannstellen, siehe Fig. 5) stets ein Teilstück, das mehrere Schwingungen enthält, herausgegriffen und als harmonische Schwingung betrachtet werden.

Über die Rotationseicheinrichtung vermittelt Fig. 10 ein schematisches Bild. Die tiefste Eigenfrequenz der Einrichtung liegt bei 45 Hz und brauchbar ist diese bis ca. 60 Hz (Kugellager). Für die Kontrollregistrierungen dient ein auf der Drehachse angebrachter Hohlspiegel. Der Erschütterungsmesser E kann dabei längs der y_3 -Achse verschoben werden. Da es sich hier nur noch um die Bestimmung der Übertragungsfaktoren und des neutralen Punktes handelt (siehe § 4), ist dieser relativ kleine Messbereich ausreichend.

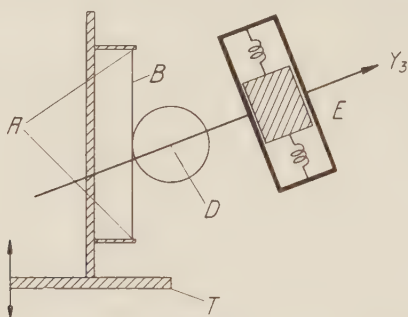


Fig. 10.

Schematisches Bild der Rotationseicheinrichtung. Es bedeuten: T = Translationschütteltisch; A = Einspannstellen des Stahldrahtes; B = Stahldraht; D = Drehachse des Tisches; E = Erschütterungsmesser.

Um mit einer Eicheinrichtung einwandfrei arbeiten zu können, ist es notwendig, dass die zulässigen Tischbewegungen gross sind im Vergleich zum mittleren Erschütterungsstörpegel (z. B. Verkehrserschütterungen der Stadt, Vorlesungspausen usw.). Für die beschriebene Eicheinrichtung, die sich in der Werkstatt des Instituts für Geophysik (ETH., Hauptgebäude, Keller) befindet, ist dieses Verhältnis, abgesehen von einigen Ausnahmen, befriedigend.

§ 9. Messverstärker und Filter.

Die Leistung eines Erschütterungsmessers mit elektrischem Indikator, als Spannungsquelle aufgefasst, genügt zur Aussteuerung eines Registriergerätes (ausgenommen hochempfindliche Galvanometer und niederohmige Erschütterungsmesser, Lit. 25, 26) nicht. Die notwendige Anpassung ist daher mit einem Messverstärker vorzunehmen. Im vorliegenden Fall wurde ein zweistufiger Gegentaktverstärker mit Eintakteingang (Prinzipschema Lit. 3) gebaut. Die Spannungsverstärkung ist 3000fach bei einer Ausgangsimpedanz von 10 k Ω — und einem Störpegel von — 70 dB, bezogen auf die

maximale Ausgangsleistung. Der Klirrfaktor ist $< 1,5\%$. Die Frequenzkennlinie ist aus Fig. 11 ersichtlich.

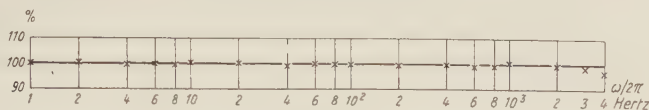


Fig. 11.

Die Frequenzkennlinie des Messverstärkers. (Verstärkung bei 200 Hz = 100%.)

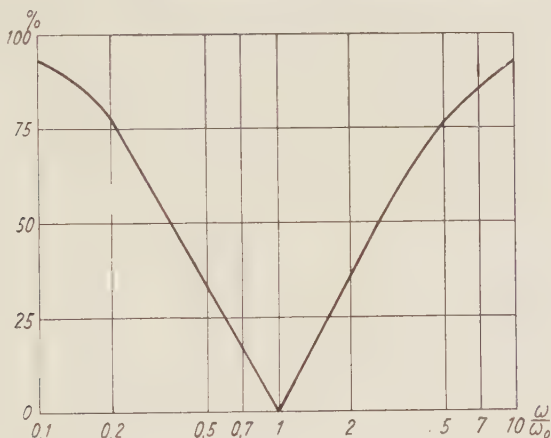


Fig. 12a.

Frequenzkennlinie (ohne Abschlusswiderstand) des Filters.
(Durchlass für $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty = 100\%$.)

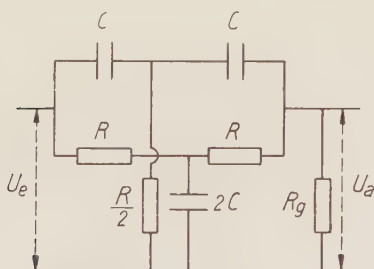


Fig. 12b.

Grundsätzliches Schaltschema des Filters.

Fig. 12 zeigt das grundsätzliche Schaltschema des Filters (Lit. 23), das zur Realisierung der im § 3 erwähnten Schranken ω_a und ω_b benützt werden kann. Für U_a/U_e erhält man, als Resultat einer längeren Rechnung, mit $x = 1/\omega C$

$$\frac{U_a}{U_e} = \left(1 - \frac{4 i R x}{R^2 - x^2} - \frac{1}{R_g} \frac{2 i R x (R - i x)}{R^2 - x^2} \right)^{-1}.$$

Ein gutes Hoch- oder Tiefpassfilter (durch Kombination Bandpass) entsteht nun, wenn zwei solche Filter mit ω_0 und $4/5 \omega_0$ in einer Rückkopplungsschaltung, wie sie in Fig. 13 dargestellt ist, eingegliedert werden. Fig. 14 zeigt z. B. die gemessene Frequenzkennlinie eines Hochpassfilters.

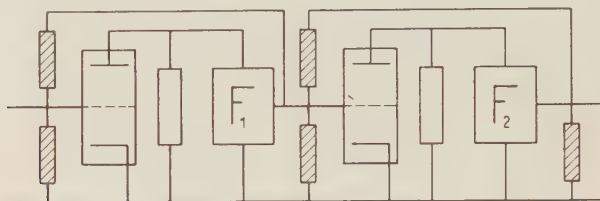


Fig. 13.

Grundsätzliches Schaltschema eines Hoch- oder Tiefpassfilters.

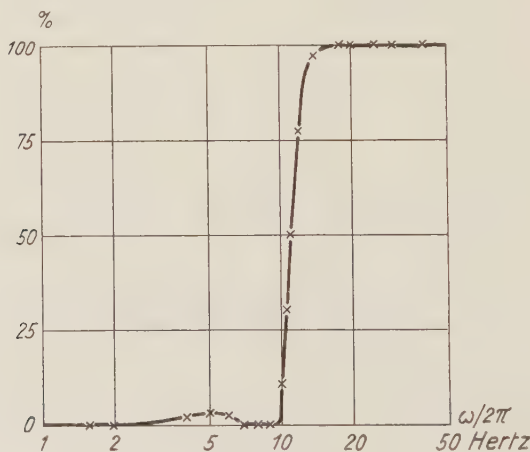


Fig. 14.

Gemessene Frequenzkennlinie eines Hochpassfilters.
(Durchlass bei 200 Hz = 100%.)

§ 10. Der Kristallbieger als piezoelektrischer Beschleunigungsmesser.

Über die Herstellung und Behandlung von Seignettesalz- und Quarzbeschleunigungsmessern sowie über deren Empfindlichkeiten (Empfindlichkeit = Beschleunigung in mm/sec^2 pro mm Zeigerausschlag) mit grosser Zusatzmasse, findet man in der Literatur zwei ausführliche Arbeiten von A. Herrmann (Lit. 10, 11). Die Seignetteelektrika, Ammonium- und Kaliumphosphat (Lit. 2), sind in jenen Arbeiten nicht besprochen. Die Empfindlichkeiten dieser Phosphate dürften jedoch, wie eine rohe Abschätzung zeigt, von

derselben Größenordnung wie diejenige von Quarz sein. VALASEK (Lit. 24), später SCHULWAS-SOROKIN (Lit. 22) untersuchten die Temperaturabhängigkeit des Piezomoduls δ_{14} und der Dielektrizitätskonstanten ϵ von Seignettesalz, während W. LÜDY (Lit. 18) in einer Arbeit über das dynamisch-elastische Verhalten von Seignettelektrika berichtet. (Weitere Zitate sind in den erwähnten Arbeiten zu finden.)

Die nachstehend beschriebene Eichung und Prüfung wurde an einem Beschleunigungsmesser aus Seignettesalz durchgeführt. Der Beschleunigungsmesser besteht aus einem dreieckförmigen Bieger und ist zusammen mit einer Vorstufe (Impedanztransformation), bestehend aus einer Raytheon-Miniaturelektrometertriode und den dazu gehörenden Batterien, in einem zylindrischen Gehäuse von

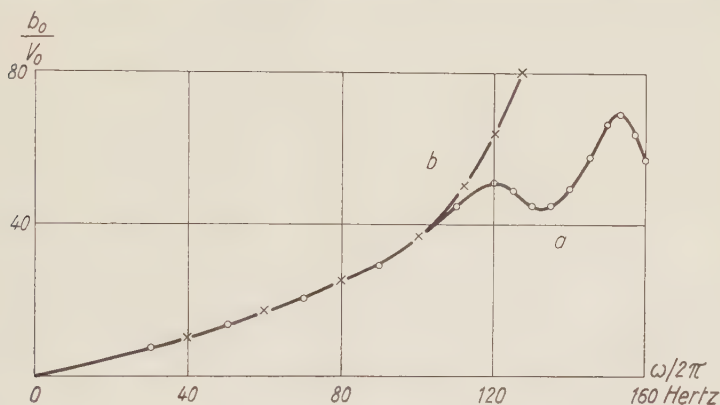


Fig. 15.

Prüfung der Einspannung eines Biegers mit Zusatzmasse (40 g). Kurve a: Bieger mittelst Gummunterlagen festgeklemmt; Kurve b: Derselbe Bieger mit Pasta festgeklebt; v_0 – Geschwindigkeitsamplitude des Tisches; b_0 – registrierte Beschleunigungsamplitude.

8,5 cm Durchmesser und einer Höhe von 3 cm untergebracht. Die Form des Biegers ist durch die Spaltbarkeit des Kristalls gegeben.

Mit besonderer Sorgfalt wurden die verschiedenen Einspannungsmöglichkeiten in bezug auf ihre Härte untersucht. Fig. 15 zeigt zwei Beispiele. Die Kurven wurden mit demselben Bieger (Zusatzmasse = 40 g) aufgenommen. Geändert wurde nur die Einspannung.

Biegeinspannung zu Kurve a: Kristall mittelst zweier Gummunterlagen festgeklemmt.

Biegeinspannung zu Kurve b: Kristall mit Pasta festgeklebt.

Die Kurve a zeigt deutlich die Wirkung der Gummunterlagen. Die Einspannung ist zu weich im Vergleich zur Kristallhärte und

es entstehen zwei gekoppelte Pendel. Die Kurve *b* entspricht qualitativ einem schwach gedämpften Pendel, was auf eine gute Einspannung schliessen lässt.

Fig. 16 zeigt die Translationsempfindlichkeit des Kristallbiegers (Länge = 2,6 cm; Dicke = 2,1 mm) in Funktion der Zusatzmasse *M*, bezogen auf die Empfindlichkeit ohne Zusatzmasse.

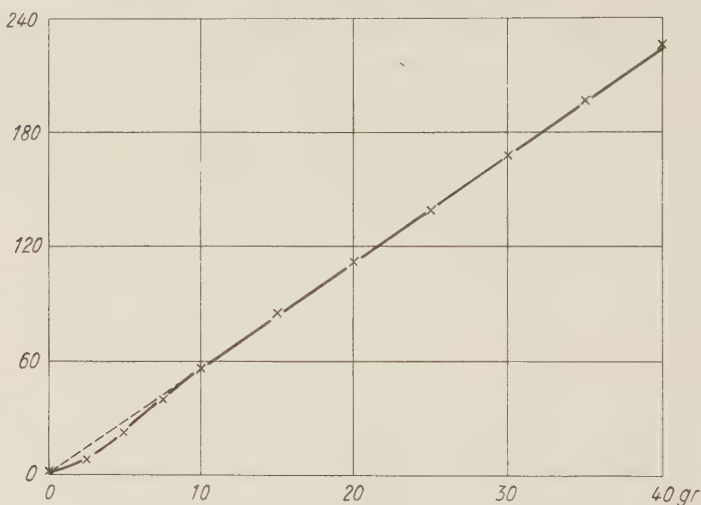


Fig. 16.

Die Translationsempfindlichkeit des Kristallbiegers (Länge = 2,6 cm; Dicke = 2,1 mm) in Funktion der Zusatzmasse *M*, bezogen auf die Empfindlichkeit ohne Zusatzmasse.

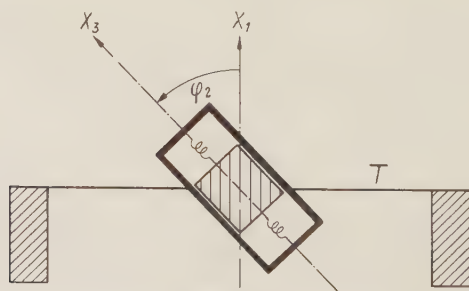


Fig. 17.

Schematisches Bild, wie die Empfindlichkeit in Funktion des Neigungswinkels gemessen wurde. x_3 = Arbeitsrichtung des Kristalls; φ_2 = Neigungswinkel zur Translationsbewegungsrichtung; T = Tischebene.

Dieser Kristallbieger, mit einer Zusatzmasse von 30 g wäre z. B. in der Seismik als Beschleunigungsmesser brauchbar; denn die

Empfindlichkeit beträgt $\sim 6/100$ mm/sec² pro mm, was z. B. bei 10 Hz einer Bodenamplitude von $\sim 1/6 \cdot 10^{-4}$ mm entspricht.

Für eine exakte Erschütterungsmessung (Beschleunigung) ist ein Messbereich von ca. 1 bis 400 Hz (= obere Schranke) erforderlich, und eine maximale Amplitudenüberhöhung m_b von $\sim 1\%$ und eine maximale Phasenverschiebung ϑ_b von $\sim 6^\circ$ noch zulässig. Diese Bedingungen erfüllt (Gleichungen (16), (17)) ein praktisch unge-

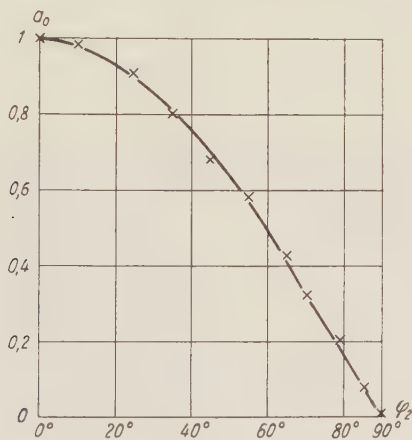


Fig. 18.

Die Empfindlichkeit in Funktion des Neigungswinkels. — = theoretische Kurve
+ = gemessene Werte.

dämpfter ($D = 0$) Beschleunigungsmesser mit einer Eigenfrequenz von 3500 Hz. Ein Beschleunigungsmesser mit diesen Eigenschaften ergibt sich z. B. aus einem dreieckförmigen Kristallbieger (Gleichung (54)) mit einer Länge von 2,5 cm und einer Dicke von 2 mm.

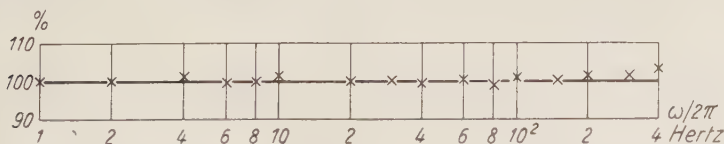


Fig. 19.

Die gemessene Frequenzkennlinie des Beschleunigungsmessers.

(Empfindlichkeit bei 200 Hz = 100%.)

(Abklingkurven zeigen, dass diese Kristallbieger praktisch ungedämpft sind.)

Die Prüfung und Eichung dieses Beschleunigungsmessers wurde wie folgt durchgeführt.

1. Die Prüfung der \angle -Abhängigkeit der Empfindlichkeit wurde, wie in Fig. 17 schematisch dargestellt ist, ausgeführt. Fig. 18 zeigt das Ergebnis der Messung.

2. Messung der Translationsempfindlichkeit in Funktion der Frequenz der aufgeprägten Beschleunigung. Fig. 19 zeigt die gemessene Frequenzkennlinie des Beschleunigungsmessers. Die Empfindlichkeit beträgt $5 \text{ mm, sec}^{-2} \text{ pro mm} \pm 5\%$ und schwankt unter den einzelnen Kristallen bis zu $\pm 20\%$.

3. Bestimmung des neutralen Punktes und Prüfung des Beschleunigungsmessers auf Rotationsempfindlichkeiten.

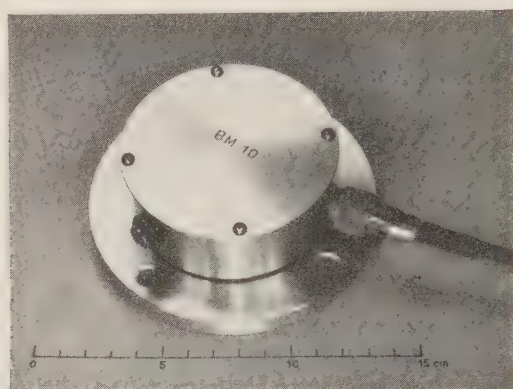


Fig. 20.

Kristallbeschleunigungsmesser mit eingebauter Elektrometertriode.

Erste Lage: Die Längsachse des Kristalls fällt mit der Drehachse D des Tisches zusammen. Es konnte kein messbarer Ausschlag festgestellt werden.

Zweite Lage: Die Längsachse des Kristalls steht \perp auf der Drehachse D und schneidet dieselbe. Die Empfindlichkeit zeigt den erwarteten linearen Verlauf und wird Null, wenn die Einspannstelle $\frac{1}{5} \pm 5\%$ der Kristalllänge von der Drehachse entfernt ist (= neutraler Punkt).

Dritte Lage: Die Seitenkanten liegen in einer Ebene, die \perp zur Drehachse ist. Ein messbarer Ausschlag konnte nicht festgestellt werden.

Damit sind die in der Theorie gemachten Voraussetzungen experimentell bestätigt, und die erreichten Empfindlichkeiten sind für die Praxis ausreichend.

Zum Schlusse möchte ich meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. F. GASSMANN, für das grosse Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte sowie für die vielen Anregungen und Diskussionen herzlichst danken. Ebenso bin ich Herrn R. BERGER, Feinmechaniker, der mich bei den experimentellen Arbeiten gewissenhaft unterstützte, zu Dank verpflichtet. Die Seignettesalzbieger wurden von der Firma Torson in Zürich hergestellt.

Zürich, Institut für Geophysik der Eidg. Techn. Hochschule.

Literaturverzeichnis.

1. BERNHARD, R. und KAMMERER, A., Einrichtung der Deutschen Reichsbahn-Gesellschaft zur Eichung von Messgeräten für die Feststellung von mechanischen Bemessungen. Elektrotechn. Zeitschrift 16, III, 33, 257–260.
2. BUSCH, G., Neue Seignette-Elektrika. H.P.A. 11, 1938, 269.
3. DE BRUIJN S. L. und DORSMAN, C., Ein Kathodenstrahloszillograph für Untersuchungen im Maschinenbau. Philips Techn. Rundschau 5, 1940, 285.
4. GASSMANN, F., Zur Bestimmung von Bodenbewegungen aus Registrierungen von Schwingungsmessern und Seismographen. Festschrift SIA der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich 1937.
5. GASSMANN, F., Zur Theorie der Schwingungsmesser. Beiträge zur Geophysik, Bd. 52, 1938, 1–19.
6. GASSMANN, F., Über Querschwingungen eines Stabes mit Einzelmasse. Ing. Arch., II. Bd., 1931, 222–227.
7. GASSMANN, F., Ein Schütteltisch und seine Anwendungsmöglichkeiten. Schweiz. Techn. Zeitschrift Nr. 3, 1933.
8. Handbuch der Physik, Bd. VI, 368, 1928 (H. Geiger und K. Scheel).
9. Handbuch der Physik, Bd. VI, 366, 1928 (H. Geiger und K. Scheel).
10. HERRMANN, A., Grundsätzliche Betrachtungen über piezoelektrische Beschleunigungsmesser, Z. f. Geophys., Bd. XV, 1939, 31.
11. HERRMANN, A., Piezoelektrischer Beschleunigungsmesser hoher Empfindlichkeit ohne Verstärker. Veröff. der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena, Heft 34, 1938, 25.
12. HOHENEMSER, R., Praktische Wege zur angenäherten Schwingungsberechnung elastischer Systeme. Ing.-Arch., Bd. I, Heft 3, 1930.
13. HORT, W., Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, Springer, Berlin 1925.
14. HORT, W., Technische Schwingungslehre, Springer, Berlin 1922.
15. KLEMT, A., Archiv für techn. Messen, Juni 1943, Z. 42–5.
16. KNESER, A., Belastete Integralgleichungen. Rend. Circ. mat. Palermo, Bd. 37, 169–197.
17. KÖHLER, H., Ein neuer Schütteltisch zur Eichung und Prüfung hochempfindlicher Erschütterungsmesser. Z. f. techn. Phys., Bd. 22, Nr. 9, 209–215.
18. LÜDY, W., Der Einfluss der Temperatur auf das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika. Promotionsarbeit Eidg. Techn. Hochsch. Zürich, 1942.

19. MÖLLER, H. G., Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenz-technik, Springer, Berlin 1940.
 20. ONO, A., Journ. Soc. Mech. Engin, Tokyo, Bd. 27, 1924, 467-479.
 21. REUTLINGER, C., Eichenlage für Schwingungsmesser. Gerl. Beitr. Geophys. 24, 206.
 22. SCHULWAS-SOROKIN, R. D., Piezoelektrische Eigenschaften von Seignettesalzkristallen. Z. f. Physik 73, 1931, 700.
 23. THIESSEN, G. J., R-C Filter Circuits, J. of the Acoustical Soc. of America 16, Nr. 4, 1945, 275-279.
 24. VALASEK, J., Physic. Rev. 17, 1921, 475, 19, 1922, 438, 20, 1922, 639, 23, 1924, 114, 24, 1924, 560.
 25. WENNER, FRANK, A New Seismometer Equipped for Electromagnetic Damping and Electromagnetic and Optical Magnification. Bureau of Standards Journal of Research. Vol. 2, 1929, 963-999.
 26. WILIP, J., On New Precision Seismographs. Publ. Univ. Tortu (Dorpat), 1926.
-

Remarks on the problem of the vacuum polarization and the photon-self-energy

by Res Jost*) and Jerzy Rayski**).

(17. V. 1949.)

As is well known the formulae for the polarization of the vacuum and the expression for the photon self energy are not well defined mathematical symbols and lead to conflict with the postulate of gauge invariance unless a certain regularizing procedure¹⁾ is applied. This procedure of regularization means however a change in the fundamentals of field theory, so that the question as to other possibilities of obtaining the desired result (i. e. the gauge invariance of the vacuum polarization current and the vanishing of the ph. s. e.) seems still to be of some interest. Indeed, it has been shown by Umesawa²⁾, and independently, by one of us³⁾ that by coupling the electromagnetic field to several charged fields of spinor and scalar (or pseudoscalar) types the gauge invariance of the vacuum polarization and the vanishing of the ph. s. e. may be achieved (at least in the second order of approximation e^2) due to some compensations. It would be premature to decide whether such compensations possess any deeper meaning or whether they should be considered merely as accidental. In any case it should be noted that one of the rules for regularization (i. e. the regularization of the whole expressions without factorization) appears as if borrowed from the theory of several mutually compensating fields. On the other hand it should be stressed that there still remains another difficulty i. e. the infinite self charge produced by the external field. This is, of course, immaterial for the photon self energy but plays a role in the problem of the vacuum polarization. In order to obtain a reasonable value for the vacuum polarization effects, the charges of the spinor and scalar fields have to be renormalized.

An external electromagnetic field $A_\mu(x)$ coupled with n fields of a spinor type (with the mass constants m_i) and with N fields of

*) Eidg. Techn. Hochschule, Zurich.

***) N. COPERNICUS, Univ. Torun, Poland. At present: Eidg. Techn. Hochschule, Zurich.

a scalar (or pseudoscalar) type (with masses M_i) is given. The charge and current of the vacuum polarization then assumes the form:

$$\langle j_\mu(x) \rangle_{\text{vac}} = -e^2 \int d^4 x' K_{\mu\nu}^{\sim}(x-x') A_\nu(x') \quad (1)$$

where $K_{\mu\nu}$ (in the e^2 approximation) consists additively of separate terms for different charged fields:

$$K_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n K_{\mu\nu}^{(1/2)}(m_i) + \sum_{i=1}^N K_{\mu\nu}^{(0)}(M_i) \quad (2)$$

with

$$K_{\mu\nu}^{(1/2)} = 4 \left\{ \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\lambda} + m^2 \bar{\Delta} \Delta^{(1)} \right) \right\} \quad (2')$$

and

$$K_{\mu\nu}^{(0)} = \left\{ -\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Delta^{(1)} + \Delta \frac{\partial^2 \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \delta_{\mu\nu} (-\bar{\Delta} \cdot \square \Delta^{(1)} - \Delta^{(1)} \cdot \square \bar{\Delta} + 2 M^2 \bar{\Delta} \Delta^{(1)}) \right\} \quad (2'')$$

where the $\bar{\Delta}$ and $\Delta^{(1)}$ functions are given by J. SCHWINGER⁴). As the expression for the vacuum polarization current of a spinor field has already been extensively discussed in the literature (compare e. g. footnote ¹), we limit ourselves here to giving only the derivation of $K_{\mu\nu}^{(0)}$:

The Hamiltonian of a scalar (or pseudoscalar) field coupled with an external electromagnetic field is⁵):

$$H_0 + H'$$

$$\text{where } H_0 = \frac{1}{2} \int d^3 x (\pi^* \pi + \text{grad } \varphi^* \text{ grad } \varphi + M^2 \varphi^* \varphi) \quad (3')$$

$$\text{and } H' = \int d^3 x (\varrho A_0 - \sum_{i=1}^3 s_i A_i + e^2 \varphi^* \varphi \sum_{i=1}^3 A_i A_i) \quad (3'')$$

$$\text{with } \varrho = i e (\pi^* \varphi^* - \pi \varphi) \quad s_i = i e \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi^* \right) \quad (4)$$

The current four vector j_μ has the components:

$$j_4 = i \varrho \quad \text{and} \quad j_i = s_i - 2 e^2 \varphi^* \varphi A_i \quad (5)$$

The SCHRÖDINGER equation is:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + H') \Psi \quad (6)$$

In the interaction representation⁶⁾ this becomes:

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = H' (t) \Psi' \quad (7)$$

$$\text{with } \Psi' = e^{iH_0 t} \Psi \text{ and } H' (t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (8)$$

In general, the time dependence of an operator F is given by

$$F (t) = e^{iH_0 t} F e^{-iH_0 t} \quad (9)$$

In this representation the canonically conjugate momenta become

$$\pi (t) = \frac{\partial \varphi^* (t)}{\partial t} \quad \pi^* (t) = \frac{\partial \varphi (t)}{\partial t} \quad (10)$$

while the commutation relations remain the same as in the interaction free case

$$\begin{aligned} [\varphi^* (x), \varphi (x')] &= i \Delta (x - x') \\ [\varphi (x), \varphi (x')] &= [\varphi^* (x), \varphi^* (x')] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

where x is written instead of x, y, z, t . With the aid of the notation:

$$s_\nu (t) = i e \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \varphi^* \right) \quad (12)$$

we obtain for the interaction energy:

$$H' (t) = \int d^3 x (-s_\nu A_\nu + e^2 \varphi^* \varphi \sum_{i=1}^3 A_i A_i) \quad (13)$$

while the current j_μ becomes:

$$j_\mu (x) = s_\mu (x) + 2 e^2 \varphi^* (x) \varphi (x) (\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - \delta_{\mu \nu}) A_\nu (x). \quad (14)$$

The vacuum expectation value of the perturbed (due to the existence of the external field) current j_μ is:

$$\begin{aligned} \langle j_\mu (x) \rangle_{\text{vac}} &= \frac{i}{2} \int d^4 x' \varepsilon (x - x') \langle [s_\mu (x), s_\nu (x')] \rangle_{\text{vac}} A_\nu (x') \\ &\quad + e^2 \Delta^{(1)} (0) (\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - \delta_{\mu \nu}) A_\nu (x) \end{aligned} \quad (15)$$

The commutator in (15) yields

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \varepsilon(x-x') \langle [s_\mu, s'_\nu] \rangle_{\text{vac}} = e^2 \left\{ \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Delta^{(1)} \right. \\ \left. - \bar{\Delta} \frac{\partial^2 \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right\} - e^2 \delta^{(4)}(x-x') \Delta^{(1)}(x-x') \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \end{aligned} \quad (16)$$

Here use has been made of the identity:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \varepsilon(x) \Delta(x) - 2 \delta^{(4)}(x) \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4}$$

which, together with the definition of the $\bar{\Delta}$ function, easily yields (16)*.

Therefore

$$\begin{aligned} \langle \dot{j}_\mu(x) \rangle_{\text{vac}} = e^2 \int d^4 x' \left(\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Delta^{(1)} \right. \\ \left. - \bar{\Delta} \frac{\partial^2 \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) A_\nu(x') - e^2 \Delta^{(1)}(0) A_\mu(x) \end{aligned} \quad (17)$$

or

$$\langle \dot{j}_\mu(x) \rangle_{\text{vac}} = -e^2 \int d^4 x' K_{\mu\nu}^{(0)}(x-x') A_\nu(x')$$

with

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^{(0)}(x) = - \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial^2 \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Delta^{(1)}(x) \\ + \bar{\Delta}(x) \frac{\partial^2 \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \Delta^{(1)}(x) \delta^{(4)}(x) \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (18)$$

With the aid of the equations:

$$\square \Delta^{(1)} - M^2 \Delta^{(1)} = 0 \quad \text{and} \quad \square \bar{\Delta} - M^2 \bar{\Delta} = -\delta^4 \quad (19)$$

(18) may be put into the form (2'').

*) The arguments of $\bar{\Delta}$ and $\Delta^{(1)}$ are in (16): $x-x'$.

The condition for the gauge invariance of the total vacuum polarization current is:

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (20)$$

the separate terms, however, yield:

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}^{(1/2)}(m_i)}{\partial x_\nu} = -4 \delta^{(4)}(x) \frac{\partial \Delta^{(1)}(m_i)}{\partial x_\mu} \quad (21)$$

and

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}^{(0)}(M_i)}{\partial x_\nu} = 2 \delta^{(n)}(x) \frac{\partial \Delta^{(1)}(M_i)}{\partial x_\mu}$$

whose right hand sides are not well defined at the origin¹). But the total $K_{\mu\nu}$ yields:

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 2 \delta^{(4)}(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sum_{i=1}^N \Delta^{(1)}(M_i) - 2 \sum_{i=1}^n \Delta^{(1)}(m_i) \right) \quad (22)$$

where the right hand side is regular and vanishes identically if two following conditions are satisfied:

$$N = 2n \quad \text{I}$$

$$\sum_{i=1}^N M_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n m_i^2. \quad \text{II}$$

These two conditions show a remarkable analogy with the conditions for regularization and are sufficient for the vanishing of the photon self energy. The mathematically simplest way to satisfy (I) and (II) is to take two scalar fields and to put their masses equal $M_1 = M_2 = m$. More general solutions exist too: we may introduce more than one spinor fields and assume the masses m_i and M_i very large except the mass of the electron m_1 so that the auxiliary charged particles would play a role in the extreme relativistic region only.

Next we proceed to the evaluation of the vacuum polarization current. We may FOURIER analyse the tensor $K_{\mu\nu}(x)$:

$$K_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k K_{\mu\nu}(k) e^{ik_\lambda x_\lambda} \quad (23)$$

with

$$K_{\mu\nu}^{(1/2)}(k) = \frac{4}{(2\pi)^3} \int d^4p [p_\mu(p_\nu - k_\nu) + p_\nu(p_\mu - k_\mu) - \delta_{\mu\nu}(p_\lambda(p_\lambda - k_\lambda) + m^2)] \frac{\delta(p_\lambda p_\lambda + m^2)}{(p_\lambda - k_\lambda)(p_\lambda - k_\lambda) + m^2} \quad (23')$$

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu}^{(0)}(k) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \left[-p_\mu (p_\nu - k_\nu) - p_\nu (p_\mu - k_\mu) \right. \\
& - p_\mu p_\nu - (p_\mu - k_\mu)(p_\nu - k_\nu) + \delta_{\mu\nu} (p_\lambda p_\lambda + (p_\lambda - k_\lambda)(p_\lambda - k_\lambda) \\
& \left. + 2M^2) \right] \frac{\delta(p_\lambda p_\lambda + M^2)}{(p_\lambda - k_\lambda)(p_\lambda - k_\lambda) + M^2} \quad (23'')
\end{aligned}$$

Here use has been made of the FOURIER representations of the Δ and $\Delta^{(1)}$ functions⁴⁾. We introduce a new variable:

$$p' = p - \frac{1}{2} k$$

and denote for brevity:

$$p - p' + \frac{1}{2} k = p^{(1)}, \quad p - k = p' - \frac{1}{2} k = -p^{(2)}$$

Now (23') and (23'') assume the form:

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu}^{(1/2)}(k) = & \frac{4}{(2\pi)^3} \int d^4 p \left(-p_\mu^{(1)} p_\nu^{(2)} - p_\nu^{(1)} p_\mu^{(2)} \right. \\
& \left. + \delta_{\mu\nu} (p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(2)} - m^2) \right) \frac{\delta(p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(1)} + m^2)}{p_\lambda^{(2)} p_\lambda^{(2)} + m^2} \quad (24')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu}^{(0)}(k) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \left(p_\mu^{(1)} p_\nu^{(2)} + p_\nu^{(1)} p_\mu^{(2)} - p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} - p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)} \right. \\
& \left. + \delta_{\mu\nu} (p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(1)} + p_\lambda^{(2)} p_\lambda^{(2)} + 2M^2) \right) \frac{\delta(p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(1)} + M^2)}{p_\lambda^{(2)} p_\lambda^{(2)} + M^2} \quad (24'')
\end{aligned}$$

where p has been written as integration variable instead of p' for convenience sake. The above integrals may be symmetrized by writing under the sign of integration:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta(p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(1)} + m^2)}{p_\lambda^{(2)} p_\lambda^{(2)} + m^2} + \frac{\delta(p_\lambda^{(2)} p_\lambda^{(2)} + m^2)}{p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(1)} + m^2} \right) \text{ instead of } \frac{\delta(p_\lambda^{(1)} p_\lambda^{(1)} + m^2)}{p_\lambda^{(2)} p_\lambda^{(2)} + m^2}$$

which obviously does not change the values of the integrals in question but has the advantage of permitting the replacement of

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta(p_\lambda p_\lambda + k_\lambda p_\lambda + m^2 + \frac{1}{4} k_\lambda k_\lambda)}{-2 k_\lambda p_\lambda} + \frac{\delta(p_\lambda p_\lambda - k_\lambda p_\lambda + m^2 + \frac{1}{4} k_\lambda k_\lambda)}{2 k_\lambda p_\lambda} \right)$$

by ⁷⁾

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^1 d u \delta' (p_\lambda p_\lambda + m^2 + \frac{1}{4} k_\lambda k_\lambda + k_\lambda p_\lambda u). \quad (25)$$

We introduce again new variables

$$p' = p - \frac{1}{2} k u \quad (26)$$

whence

$$p^{(1)} = \frac{1}{2} k (1 + u) + p', \quad p^{(2)} = \frac{1}{2} k (1 - u) - p' \quad (26')$$

which converts the argument of the δ' function in (25) into:

$$\delta' (p_\lambda p_\lambda + m^2 + \frac{1}{4} k_\lambda k_\lambda (1 - u^2)). \quad (25')$$

Now we introduce (25) and (26) into (24) and split $K_{\mu\nu}$ into two parts:

$$K_{\mu\nu}(k) = \bar{K}_{\mu\nu}(k) + J_{\mu\nu}(k) \quad (27)$$

with:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\mu\nu}^{(1/2)}(k) = & \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \int d^4 p \int_{-1}^1 d u (1 - u^2) \delta' (p^2 + m^2 \\ & + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) \end{aligned} \quad (28')$$

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}^{(1/2)}(k) = & - \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^4 p \int_{-1}^1 d u \{ p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} (p^2 + m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) \delta_{\mu\nu} \} \\ & \delta' (p^2 + m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2))^* \end{aligned} \quad (28'')$$

and

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = & \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \int d^4 p \int_{-1}^1 d u u^2 \delta' (p^2 + M^2 \\ & + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) \end{aligned} \quad (29')$$

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}^{(0)}(k) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \int_{-1}^1 d u \{ p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} (p^2 + M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) \delta_{\mu\nu} \} \\ & \delta' (p^2 + M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) \end{aligned} \quad (29'')$$

^{*}) As one sees from what follows, it is *not permissible* to put $[p^2 + m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)] \delta' (p^2 + m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) = - \delta (p^2 + m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2))$, which, however, makes the non-gauge-invariant term vanish.

Here k^2 and p^2 have been written instead of $k_\lambda k_\lambda$ and $p_\lambda p_\lambda$ for brevity. We discuss first the part $J_{\mu\nu}$. Denoting

$$A = M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)$$

we may write:

$$\int d^4 p \left\{ p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} (p^2 + A) \delta_{\mu\nu} \right\} \delta' (p^2 + A) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz z \int d^4 p \left\{ p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} (p^2 + A) \delta_{\mu\nu} \right\} e^{i(p^2 + A)z}.$$

With the aid of the formulae:

$$\int d^4 p e^{i p_\lambda p_\lambda z} = \frac{i \pi^2}{z^2} \varepsilon(z) \quad \int d^4 p p_\mu p_\nu e^{i p_\lambda p_\lambda z} = -\delta_{\mu\nu} \frac{\pi^2}{2 z^3} \varepsilon(z) \quad (30)$$

the above integral yields

$$\begin{aligned} & -\frac{i \delta_{\mu\nu} \pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dz \varepsilon(z) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{i A}{z} \right) e^{i A z} = -\frac{i \delta_{\mu\nu}}{4} \pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \varepsilon(z) \frac{d}{dz} \frac{e^{i A z}}{z} \\ & = \frac{i \pi}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{e^{i A z}}{z} \Big|_{[z=0]} \end{aligned}$$

whence

$$J_{\mu\nu}(k) = \frac{i \pi}{2 (2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \left\{ \frac{e^{i k^2/4} (1-u^2) z}{z} \left(\sum_{i=1}^N e^{i M_i^2 z} - 2 \sum_{i=1}^n e^{i m_i^2 z} \right) \right\} \Big|_{[z=0]}$$

It is immediately seen from (I) and (II) that this integral vanishes identically*). Only the gauge invariant part of $\bar{K}_{\mu\nu}(k)$ from (28) and (29) remains. We integrate $\bar{K}_{\mu\nu}^{(0)}(k)$ by parts:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 du u^2 \delta' (p^2 + M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1-u^2)) &= \frac{u^3}{3} \delta' (p^2 + M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1-u^2)) \Big|_{-1}^{+1} \\ &+ \frac{k^2}{6} \int_{-1}^1 du u^4 \delta'' (p^2 + M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1-u^2)) \end{aligned}$$

*) Elementary integration of:

$$I_{\mu\nu} = \int d^4 p \left\{ p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} (p^2 + A) \delta_{\mu\nu} \right\} \delta' (p^2 + A)$$

by performing the integration over p_0 first and with a large radius R gives (for $A > 0$):

$$I_{00} = 0, I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{R^3}{\sqrt{R^2 + A}} = R^2 - \frac{1}{2} A + \dots$$

which leads to the same conditions for vanishing of $J_{\mu\nu}$.

whence

$$\overline{K}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \frac{1}{4(2\pi)^3} (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \int d^4 p \left\{ \frac{2}{3} \delta'(p^2 + M^2) + \frac{1}{6} k^2 \int_{-1}^1 du u^4 \delta''(p^2 + M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)) \right\}.$$

The first term yields from (30):

$$- \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{12} (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\varepsilon(z)}{z} e^{iM^2 z} \quad (31')$$

while the second term may be integrated with the aid of the formula¹⁾:

$$\int d^4 p \delta''(p_\lambda p_\lambda + A) = \pi/A$$

giving:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{24} k^2 (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) P \int_{-1}^1 du \frac{u^4}{M^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)} = K_{\mu\nu}^{(0)}(k)_{(\text{regular})} \quad (31'')$$

In the same way $\overline{K}_{\mu\nu}^{(1/2)}$ yields:

$$- \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{3} (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\varepsilon(z)}{z} e^{im^2 z} \quad (32')$$

and

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{4} k^2 (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) P \int_{-1}^{+1} du \frac{u^2 (1 - \frac{u^2}{3})}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - u^2)} = K_{\mu\nu}^{(1/2)}(k)_{(\text{regular})} \quad (32'')$$

The parts (31') and (32') are logarithmically divergent and cannot compensate each other as the signs in both cases are equal. These terms are unphysical and have to be subtracted by means of a charge renormalization. The remaining terms (31'') and (32'') are finite and just responsible for the vacuum polarization effects.

In conclusions we state that the introduction of additional charged fields is sufficient to secure the gauge invariance of the vacuum polarization current and to yield a value zero for the photon self energy. On the other hand there remains the difficulty with the charge renormalization in an external field. This result contributes to the notion that the problem of the self charge is quite different from the problem of the self energy, and the analogy between the

procedures of mass and charge renormalizations may be more or less superficial.

Acknowledgement. The present authors wish to express their gratitude to Professor W. PAULI for his kind interest in this work as well as for much valuable aid.

References:

- 1) W. PAULI & F. VILLARS, "On Invariant Regularization", *Rev. M. Phys.* in press.
 - 2) H. UMEZAWA, J. YUKAWA, E. YAMADA, *Progr. Theor. Phys.* 3, 317 (1948).
 - 3) J. RAYSKI, *Acta Phys. Pol.* IX, 129 (1948).
 - 4) J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* 74, 1439 (1948) and 75, 651 (1949).
 - 5) G. WENTZEL, *Quantentheorie d. Wellenfelder* (1943).
 - 6) S. TOMONAGA, *Progr. Theor. Phys.* 1, 27 (1946).
 - 7) J. SCHWINGER, *Quantumelectrodynamics*, part III, in press.
-

Stosswellen in der eindimensionalen nichtstationären Gasströmung

von R. Sauer.

(9. IV. 1949.)

Einleitung.

Herr F. CAP¹⁾ hat kürzlich in dieser Zeitschrift einige Bemerkungen über die „instationäre Stosspolare“ veröffentlicht, die ich vor längerer Zeit in einer nur in wenigen Exemplaren vervielfältigten Arbeit²⁾ eingeführt hatte. Es mag daher gerechtfertigt sein, nochmals kurz auf die Darstellung eindimensionaler, nichtstationärer Verdichtungsstöße durch eine Stosspolare einzugehen und zu zeigen, wie man mit Hilfe dieser Stosspolaren die Reflexion und Überlagerung von Stößen in zylindrischen Röhren behandeln kann. Bezüglich weiterer Anwendungen sei auf eine demnächst erscheinende „Einführung in die Gasdynamik“ verwiesen³⁾.

Stosspolare.

In einer eindimensionalen Gasströmung (u = Gasgeschwindigkeit, a = Schallgeschwindigkeit, p = Druck) pflanze sich ein rechts- bzw. linkslaufender Verdichtungsstoss mit der Stossgeschwindigkeit $u \pm c$ fort; \hat{u} , \hat{a} und \hat{p} sind die Zustandswerte des Gases hinter dem Stoss. Bei Voraussetzung idealer Gase ($\gamma = c_p/c_v = \text{const}$, c_p bzw. c_v = spezifische Wärme bei konstantem Druck bzw. Volumen) er-

¹⁾ C. CAP, Zum Problem der instationären Stosspolare, Helvetica Physica Acta, XXI, 6 (1948), S. 505—512.

²⁾ R. SAUER, Theorie der nichtstationären Gasströmung. Forschungsbericht der Zentrale des wissenschaftlichen Berichtswesens für Luftfahrt Nr. 1675, Berlin (1943). Dieser Bericht wurde zwar von Herrn Cap zitiert, der auf die Stosspolare bezügliche Abschnitt war ihm aber offenbar nicht bekannt. — Erstmals wurde die nichtstationäre Stosspolare wohl von A. Busemann in einer Diskussionsbemerkung bei einer Mathematikertagung in München 1942 erwähnt.

³⁾ R. SAUER, Méthodes analytiques de la théorie des fluides compressibles (erscheint im Verlag Béranger, Paris).

geben sich aus den Erhaltungssätzen der Masse, des Impulses und der Energie die bekannten Stossleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\hat{u}-u}{a} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right), \\ \frac{\hat{a}^2 - a^2}{a^2} &= \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} (\omega^2 - 1) \left(\gamma + \frac{1}{\omega^2} \right), \\ \frac{\hat{p}-p}{p} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} (\omega^2 - 1),\end{aligned}\quad (1)$$

durch welche die unstetige Änderung der Gasgeschwindigkeit und die unstetigen Anstiege der Schallgeschwindigkeit und des Druckes in Abhängigkeit von der Stossgeschwindigkeit $\omega = c/a$ ($|\omega| \geq 1$) gegeben sind.

Die Stossleichungen (1) lassen sich in der u, a -Zustandsebene mit $\hat{u}-u/a$ und \hat{a}/a als rechtwinkligen Koordinaten durch eine „Stoss-

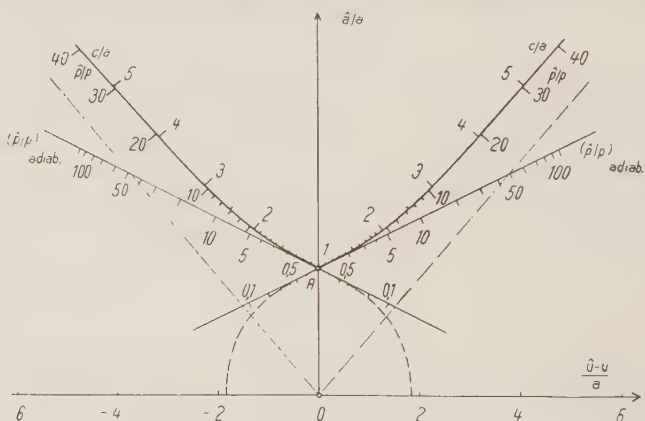


Fig. 1.
Stosspolare.

polare“ darstellen, welche Skalen für ω und für \hat{p}/p trägt (Fig. 1). Mit Hilfe dieser Stosspolaren kann man einerseits zu einer vorgegebenen Stossgeschwindigkeit ω die Werte von \hat{u} , \hat{a} und \hat{p} oder andererseits zu einem vorgegebenen Druckanstieg \hat{p}/p die Werte von \hat{u} , \hat{a} und die Stossgeschwindigkeit ω unmittelbar angeben.

Die Stosspolare ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen. Physikalische Bedeutung haben nur die beiden vom Doppelpunkt A (vgl. Fig. 1) nach oben laufenden Kurvenäste; der Fortsetzung dieser Kurvenäste vom Doppelpunkt A bis zur Abszissenachse entsprechen die physikalisch nicht realisierbaren Verdünnungsstöße.

Die Stosspolare hat im Doppelpunkt A zwei Wendetangenten. Sie liefern die adiabatischen Verdichtungen und Verdünnungen

$$\left(\frac{\hat{u}-u}{a}\right)_{\text{adiab.}} = \pm \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\hat{a}-a}{a}\right)_{\text{adiab.}}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\hat{p}}{p}\right)_{\text{adiab.}} = \left(\frac{\hat{a}}{a}\right)_{\text{adiab.}}^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

Schwache Verdichtungsstöße ($\hat{p}/p \rightarrow 1$) können durch adiabatische Verdichtungen approximiert werden; wie Fig. 1 zeigt, fallen die Druckskalen für schwache Verdichtungsstöße und für schwache adiabatische Verdichtungen praktisch zusammen.

Bei starken Verdichtungsstößen ($\hat{p}/p \rightarrow \infty$) lässt sich die Stosspolare durch ihre (in Fig. 1 strichpunktierten) Asymptoten mit der Gleichung

$$\frac{\hat{u}-u}{a} = \pm \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}} \frac{\hat{a}}{a} \quad (3)$$

ersetzen.

Mit Hilfe der Stosspolaren kann man eindimensionale nichtstationäre Gasströmungen mit abschnittsweise konstanten Zustandswerten auf sehr einfache Weise diskutieren und berechnen, wie im folgenden an einigen Beispielen gezeigt wird.

Reflexion und Überlagerung von Verdichtungsstößen.

In Fig. 2 sind folgende Aufgaben behandelt:

- die Reflexion eines rechtslaufenden Verdichtungsstosses in einem zylindrischen Rohr, das linksseitig unendlich lang und rechts durch eine feste Wand abgeschlossen ist;
- die Reflexion eines rechtslaufenden Verdichtungsstosses in einem zylindrischen Rohr, das linksseitig unendlich lang und rechts offen ist;
- die Durchkreuzung eines rechtslaufenden und eines linkslaufenden Verdichtungsstosses in einem beidseitig unendlich langen zylindrischen Rohr;
- die Überlagerung zweier aufeinanderfolgender rechtslaufender Verdichtungsstöße in einem beidseitig unendlich langen zylindrischen Rohr.

Oben ist jeweils die Wanderung der Stöße und der bei b) und c) hinzukommenden adiabatischen Verdünnungswellen durch den „graphischen Fahrplan“ in der x, t -Ebene dargestellt (x – Ortskoordinate in Richtung der Rohrachse, t = Zeit). Unten sind jeweils

die Zustandsänderungen in der u, a -Ebene angegeben. Die ausgezogenen Linien in der u, a -Ebene sind Bögen von Stosspolaren, die gestrichelten Linien sind Stücke von Wendetangenten und beziehen sich auf adiabatische Verdünnungen. Die Doppellinien in der x, t -Ebene sind Bahnlinien von Gasteilchen und Mediengrenzen zwischen Bereichen gleichen Druckes und gleicher Strömungsgeschwindigkeit, aber verschiedener Schallgeschwindigkeit und demgemäss auch mit verschiedenen Werten der Temperatur, Dichte und Entropie. Die Stosspolaren und Wendetangenten samt den Skalen für

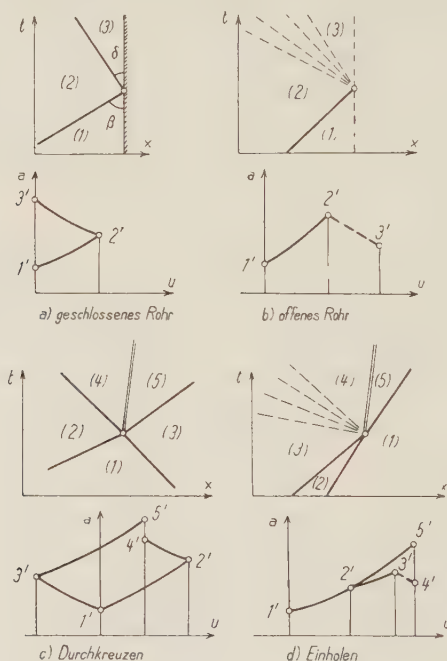


Fig. 2.

Reflexion und Überlagerung von Stössen.

\hat{p}/p und c/a sind jedesmal in dem durch die Lage des Doppelpunktes A bestimmten Maßstab zu zeichnen. So liegt z. B. bei a) der Doppelpunkt der Stosspolaren $2'3'$ im Punkt $2'$, bei c) der Doppelpunkt der Stosspolaren $3'5'$ im Punkt $3'$ usw.

Bei a) ergibt sich aus der Randbedingung $u_3 = 0$ am festen Rohrabschluss ein reflektierter linkslaufender Verdichtungsstoss. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des reflektierten Stosses und den Druckanstieg p_3/p_2 werden im Punkt $3'$ der Stosspolaren an den Skalen für ω und \hat{p}/p abgelesen. Im x, t -Diagramm erhält man hier-

bei $\beta > \delta$, d. h. der reflektierte Stoss läuft langsamer als der einfallende Stoss.

Bei b) hat man als Randbedingung am offenen Rohrende $p_3 =$ Aussendruck. Der Stoss wird als Verdünnungswelle reflektiert. Man muss auf der Wendetangente von 2' bis zu dem Punkt 3' fortschreiten, in dem man aus der Skala der adiabatischen Druckänderungen \hat{p}/p den gegebenen Aussendruck p_3 erhält.

Bei c) muss man auf den Stosspolaren 3'5' und 2'4' soweit fortschreiten, bis die übereinanderliegenden Punkte 4' und 5' die gleichen Druckwerte $p_4 = p_5$ liefern. Man erhält hierdurch nach der

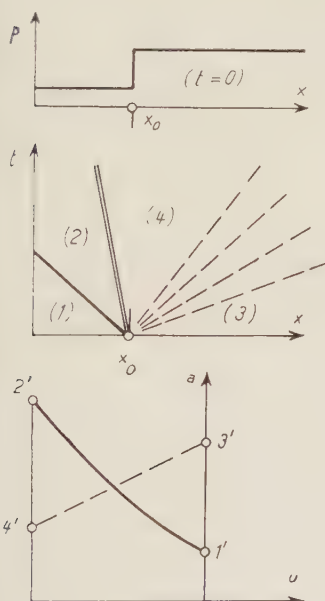


Fig. 3.
Druckausgleich.

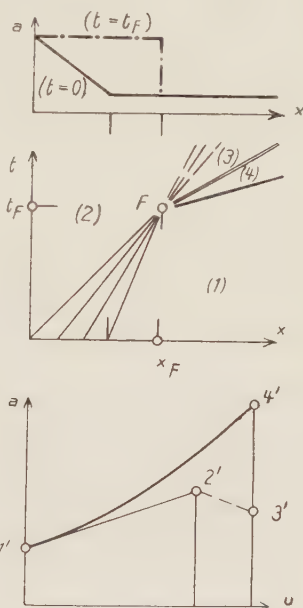


Fig. 4.
Entstehung eines Verdichtungsstosses aus
einer adiabatischen Verdichtungswelle.

Durchkreuzung zwei mehr oder weniger abgeänderte Verdichtungsstösse, hinter denen in den Bereichen (4) und (5) das Gas denselben Druck $p_4 = p_5$ und dieselbe Strömungsgeschwindigkeit $u_4 = u_5$ besitzt; die Strömungsgeschwindigkeit bestimmt die Bahnlinie, welche die Bereiche (4) und (5) als Mediengrenze trennt.

Bei d) entsteht beim Einholen der beiden rechtslaufenden Verdichtungsstösse ein weiterer rechtslaufender Verdichtungsstoss und eine linkslaufende adiabatische Verdünnungswelle. Man muss auf

der Stosspolaren $1'2'5'$ und der Wendetangente $3'4'$ soweit fortschreiten, bis die übereinander liegenden Punkte $4'$ und $5'$ dieselben Druckwerte $p_4 = p_5$ liefern. Die Bereiche (4) und (5) sind wieder durch eine Bahnlinie als Mediengrenze getrennt.

Druckausgleich.

In Fig. 3 ist der Druckausgleich dargestellt für ein beidseitig unendlich langes zylindrisches Rohr. Zur Zeit $t < 0$ soll das Rohr bei $x = x_0$ durch einen Verschluss in einen linken und rechten Teil getrennt sein; links und rechts ist das Gas in Ruhe, links mit dem Druck p_1 und rechts mit dem höheren Druck $p_3 > p_1$. Zur Zeit $t = 0$ wird der Verschluss plötzlich weggenommen. Es bildet sich dann ein linkslaufender Verdichtungsstoss und eine rechtslaufende adiabatische Verdünnungswelle. Man muss auf der Stosspolare $1'2'$ und der Wendetangente $3'4'$ somit fortschreiten, bis die übereinander liegenden Punkte $2'$ und $4'$ mit Hilfe der Druckskalen für \hat{p}/p dieselben Druckwerte $p_2 = p_4$ liefern. Die Bereiche (2) und (4) haben wieder eine Bahnlinie als Mediengrenze.

Entstehung eines Verdichtungsstosses aus einer adiabatischen Verdünnungswelle.

In Fig. 4 ist für ein beidseitig unendlich langes zylindrisches Rohr eine rechtslaufende adiabatische Verdichtungsstelle dargestellt, deren Wellenfront zur Zeit $t = 0$ durch einen linearen Anstieg der Schallgeschwindigkeit a gekennzeichnet ist. Für $t > 0$ steilt sich die Wellenfront mehr und mehr auf, bleibt aber geradlinig und geht bei $t = t_F$ in einen unstetigen Anstieg über. Die Verdichtungsstelle wird daher durch einen Fächer von Verdichtungslinien gegeben, welche in einem Punkt F der x, t -Ebene zusammenlaufen.

Zur Zeit $t = t_F$ bildet sich ein rechtslaufender Verdichtungsstoss und eine linkslaufende adiabatische Verdünnungswelle. In der Zustandsebene wird die gegebene adiabatische Verdichtungsstelle durch die Wendetangente $1'2'$, die Verdünnungswelle durch die Wendetangente $2'3'$ gegeben. Man muss auf $1'4'$ und $2'3'$ wieder so lange fortschreiten, bis die übereinander liegenden Punkte $3'$ und $4'$ dieselben Druckwerte liefern. Es entstehen wieder zwei Bereiche (3) und (4) mit einer Bahnlinie als Mediengrenze.

Das Trennrohr VII. Anreicherung der schweren Xenonisotope.

Bemerkung zur Trennung von mehrkomponentigen Gemischen*)

von Klaus Clusius.

(23. IV. 1949.)

In einer 27 m langen Trennrohranlage werden aus 14 Liter rohem Xenon die schweren Isotope angereichert. Eine von Herrn Dr. W. PAUL vorgenommene Massenanalyse gibt für die Massenzahlen folgende Häufigkeiten:

Massenzahl	124	126	128	129	130	131	132	134	136
Normales Xenon %	0,09 ₄	0,08 ₄	1,91	26,23	4,06	21,18	26,98	10,55	8,95
Trennrohr-Xenon %	0,04	0,06	0,12	0,23	0,15	3,45	17,51	33,61	44,83

Danach hat das Trennrohrxenon das Atomgewicht 134,32 gegenüber dem Wert 131,31 beim gewöhnlichen Xenon. Es wird vorgeschlagen, zur Trennung so komplexer Isotopengemische, wie es das Xenon ist, Gase geeigneter Masse und Wirkungsquerschnitte zuzusetzen, die sich zwischen die isotopen Komponenten schieben und dadurch den Trennvorgang verbessern.

1. Trennversuche sind am Xenon wegen seines grossen „isotopen Moments“ von 1,68, das für eine Trennung günstig ist, mehrfach durchgeführt worden. Darunter versteht man nach Aston den Ausdruck $\Sigma \gamma | \Delta M |$, in dem γ den Molenbruch des einzelnen Isotops und $| \Delta M |$ den absoluten Betrag seiner Massendifferenz gegen das durchschnittliche Atomgewicht bedeuten¹⁾. Den Quotienten aus isotopen Moment und durchschnittlichem Atomgewicht definiert Aston als die „Trennbarkeit“, sie ist für Xenon $1,28 \cdot 10^{-2}$. Guten Erfolg hatten GROTH und HARTECK im Trennrohr²⁾, mit dem sie leichte und schwere Fraktionen erhielten, die maximal um 2,95 Atomgewichtseinheiten auseinanderlagen. Weiter hat GROTH mit Gaszentrifugen die Xenonisotope angereichert³⁾, während Rektifikationsversuche mit einer einfachen Wendelsäule wegen des minimalen Dampfdruckunterschieds der Isotope erfolglos blieben⁴⁾.

Bei der Reinigung von Xenon für thermodynamische Messungen waren früher 2,5 Liter dieses Gases mit etwas Argon und Krypton,

*) Letzte Veröffentlichung: K. CLUSIUS und E. W. BECKER, Das Trennrohr VI. Isolierung des Mischmoleküls $^{14}\text{N}^{15}\text{N}$. Z. f. Naturforschung 2a, 154 (1947).

weitere 1,2 Liter verunreinigt durch Kohlenwasserstoffe, sowie schliesslich bei einer Untersuchung des Tripelpunktsdruckes rund 10 Liter eines Rektifikationsvorlaufs mit geringen Beimengungen unbekannter Natur angefallen⁴⁾⁵⁾. Dieses Xenon eignete sich ohne weitere Reinigung bestens zur Anreicherung seiner schweren Isotope. Alle Verunreinigungen konnten nur leichter als Xenon sein und mussten im Gasvorrat zurückbleiben. Das Fortschreiten der Trennung liess sich daher mit der Gaswaage am schweren Ende bequem verfolgen, wobei trockene, CO₂-freie Luft als Vergleichsgas diente. Für exakte Bestimmungen wäre reines Normalxenon oder wenigstens ein Gas ähnlicher Dichte erforderlich gewesen, die nicht in ausreichender Menge zur Verfügung standen. Dieser Umstand fiel aber nicht weiter ins Gewicht, da die Messungen doch nur relativen Wert besaßen, denn ein Rückschluss auf die genaue Zusammensetzung des aus 9 Komponenten aufgebauten Xenons war aus den Gasdichten allein nicht möglich.

2. Der Versuch wurde 1943/44 in der 27 m langen, sogenannten „kleinen“ Trennanlage des Physikalisch-Chemischen Instituts der Universität München vorgenommen. Die Trennröhrdrähte vom 0,4 mm Dicke bestanden aus mit Beryllium gehärtetem Platin, der Durchmesser der wassergekühlten Glasrohre betrug 8,4 mm. Folgende Daten legen die Betriebsverhältnisse fest:

Drahttemperatur $T = 1000^{\circ}$ abs.

Mittlere Gastemperatur $\bar{T} = 450^{\circ}$ abs.

Wandtemperatur $T_w = 300^{\circ}$ abs.

Zähigkeit bei \bar{T} , $\eta = 3,34 \cdot 10^{-4}$ g cm⁻¹ sec⁻¹.

Gaskonstante $R = 82,04$ cm³ Atm/Mol.

Molgewicht $M = 131,31$ g/Mol.

Charakteristischer Rohrradius $R_0 = 0,37_5$ cm.

Rohrradius $R_r = 0,42$ cm.

Drahtradius $r = 0,02$ cm.

Proportionalitätsfaktor der Selbstdiffusion²⁾ $f = 1,24$.

Gravitationsbeschleunigung $g = 981$ cm sec⁻².

Der optimale Gasdruck für die grösste Trennschärfe²⁾

$$p_0 = \frac{\eta R T}{M} \sqrt{\left(\frac{5,57}{R_0}\right)^3 \frac{f \bar{T}}{g(T - T_w)} \ln \frac{R_r}{r} \frac{\ln \frac{R_r}{r} - 1}{\ln \frac{R_r}{r} - 1,88}}$$

berechnet sich daraus zu 0,35 Atmosphären. Es wurde aber zur Erhöhung des Transportes ein grösserer Anfangsdruck, etwa 0,5 Atm

gewählt. Man hatte dann die Möglichkeit, durch Entnahme von Gasproben auf der schweren Seite den Druck allmählich zu senken, wodurch die Trennschärfe erhöht und die Verarmung des Ausgangsgases an schweren Isotopen in gewissem Umfang kompensiert wurde. Der Versuch endete am 13. Juli 1944 durch die Zerstörung der Anlage bei einem Luftangriff, wobei die 14 Liter Xenon verloren gingen.

3. Es zeigte sich bald, dass die Dichte der schweren Fraktionen bis zu 3 Einheiten über das normale Atomgewicht anstieg. Eine Probe wurde 1947 durch Herrn Dr. W. PAUL in Göttingen massenspektroskopisch untersucht. Das Ergebnis ist mit dem für gewöhnliches Xenon auf Fig. 1 verglichen, wobei das von Grund auf geänderte Intensitätsverhältnis der einzelnen Isotope sofort in die Augen springt. Die Verschiebung der mittleren Massenzahl von 131,40 beim gewöhnlichen Xenon bis zu 134,41 beim Trennrohrxenon ist durch die gestrichelten Vertikalen angedeutet. Mit dem

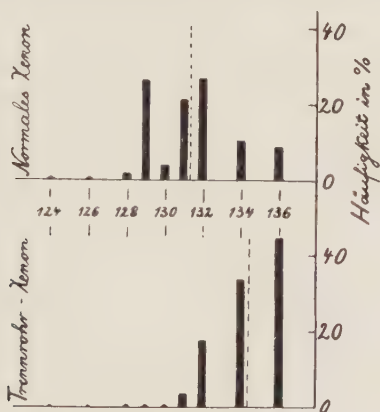


Fig. 1.

Isotope Häufigkeiten der verschiedenen Massenzahlen beim gewöhnlichen Xenon (Atom-Gew. 131,31) und beim Trennrohr-Xenon (Atom-Gew. 134,32). Die mittlere Massenzahl ist gestrichelt eingetragen, Häufigkeiten unter 1% sind als Dreiecke angedeutet.

Smythe'schen Faktor 1.000275 zur Umrechnung der chemischen auf die physikalische Atomgewichtsskala und dem Packungsanteil von $-4,2 \cdot 10^{-4}$ findet man für das Atomgewicht

$$134,41 (1 - 0.000275 - 0.00042) = 134,32,$$

während das gewöhnliche Xenon den Wert 131,31 hat. Das Trennrohrxenon ist also 3,01 Atomgewichtseinheiten schwerer als das normale Gas und weist nur noch 4 Komponenten mit mehr als 1%

Häufigkeit auf, während das Ausgangsgas deren 7 hatte. Das isotope Moment ist auf 1,41, die Trennbarkeit auf $1,05_2 \cdot 10^{-2}$ zurückgegangen, wie es bei fortschreitender Trennung der Fall sein muss.

Gleichwohl ist die Trennbarkeit des Gemisches noch als sehr gut anzusehen. Sie ist ebenso gross wie die des gewöhnlichen Kryptons und dasselbe Verfahren, das dort zur Isolierung der Isotope ^{84}Kr und ^{86}Kr mit Erfolg benutzt wurde⁶⁾, liesse sich für ^{134}X und ^{136}X anwenden. Zur Isolierung von ^{134}X wären allerdings einige Liter des Gemisches erforderlich, um das Isotop ^{132}X sauber abzutrennen, während man für ^{136}X mit viel weniger, vielleicht schon 1 Liter auskäme. Wie schon früher ausgeführt wurde, sind die äusseren Komponenten eines komplexen Isotopengemisches am leichtesten abzuspalten, falls sie nicht gar zu selten sind wie ^{124}X und ^{126}X , deren natürliche Häufigkeit noch nicht 0,1% beträgt. Ganz gut sollte noch die Abscheidung des ungeraden ^{129}X gelingen, da seine unmittelbaren Nachbarn verhältnismässig selten sind. Dafür unterscheiden sie sich nur um 1 Atomgewichtseinheit, so dass die charakteristische Trennrohlänge bei der Isolierung von ^{129}X doppelt so gross wie bei ^{134}X und ^{136}X ausfällt.

4. Die Tatsache, dass flankierende Isotope sehr viel leichter zu isolieren sind, führt auf den Gedanken, die Aufspaltung eines Mehrkomponentensystems, wie es das Xenon ist, in zwei oder mehrere Gemische niederer Komplexität durch einen Kunstgriff zu erreichen. Dazu betrachten wir als Modellversuch die quantitative Zerlegung einer Neon-Argonmischung im Trennrohr. Zu diesem Zweck fügt man reinen Sauerstoff hinzu und bekommt wegen der unterschiedlichen Masse der Molekeln von oben nach unten die Schichtung $\text{Ne-O}_2\text{-A}$. Bei einer ausreichenden Sauerstoffmenge enthält der Mittelteil im Endzustand nur reinen Sauerstoff, der nach oben durch eine Übergangszone allmählich in Neon, nach unten in Argon übergeht. Trennt man im Bereich des Sauerstoffs Ober- und Unter- teil durch einen Hahn voneinander, so lässt sich der Sauerstoff chemisch absorbieren, worauf reines Neon, bzw. reines Argon übrig bleiben. Durch die Zugabe eines dritten Gases wird also eine *restlose* Aufarbeitung möglich, während bei der Behandlung des ursprünglichen, binären Gemisches ohne Sauerstoff stets eine Mischzone der beiden Gase ihre quantitative Trennung verhindert. Enthält das Ausgangsgemisch eine der beiden Komponenten, Neon bzw. Argon, nur in kleiner Konzentration, so lässt sich dieser Anteil doch in grosser Reinheit gewinnen. Dazu unter- bzw. überschichtet man das Gas mit so viel Sauerstoff, dass die häufigere Komponente von dem einen Trennrohrende ganz abgedrängt wird, worauf die

seltene Komponente in dieses Sauerstoffpolster eindiffundiert und sich in ihm ansammelt. Wird der Sauerstoff abgezogen und chemisch weggenommen, so bleibt die seltene Komponente quantitativ zurück. (Dieser Gedanke lässt sich natürlich nicht nur auf die verschiedensten Gaspaare, sondern auch mutatis mutandis auf verschiedene Trennverfahren wie z. B. die Adsorption, Rektifikation usw. anwenden.)

Auf das Isotopengemisch des normalen Xenons übertragen, sollte man durch Zugabe von Jodwasserstoff HJ, bzw. DJ die leichteren Xenonisotope von den schwereren Begleitern abdrängen können. Ähnlich müssten sich die Bromwasserstoffe $H^{79}Br$, $H^{81}Br$ bzw. $D^{79}Br$, $D^{81}Br$ in die Plejade des Kryptons ^{78}Kr , ^{80}Kr , ^{82}Kr , ^{83}Kr , ^{84}Kr , ^{86}Kr einschieben lassen und deren Trennung erleichtern. Oder die Chlorwasserstoffe $H^{35}Cl$, $H^{37}Cl$ bzw. $D^{35}Cl$, $D^{37}Cl$ sollten die Abtrennung kleiner, aber hochkonzentrierter Mengen der seltenen Argonisotope ^{36}A und ^{38}A vom Hauptisotop ^{40}A erlauben.

Diese Betrachtung setzt freilich voraus, dass der Thermodiffusionsfaktor allein von der relativen Massendifferenz der Molekeln abhängt. Tatsächlich sind die Verhältnisse gerade bei Molekeln vergleichbarer Masse viel komplizierter, wie aus den schönen Arbeiten von Chapman hervorgeht⁷⁾. Ausser der Masse spielt dann der unterschiedliche Durchmesser der Molekeln, das zwischen ihnen waltende Kraftgesetz und die Abweichung des effektiven Wirkungsquerschnitts von dessen geometrisch erwarteten Betrag eine entscheidende Rolle. Die beiden letzteren Einflüsse sind noch vom Mischungsverhältnis abhängig, so dass sogar das Vorzeichen der Thermodiffusion umgekehrt und die schwerere, aber härtere und kleinere Molekel am oberen, d. h. „leichten“ Ende des Trennrohrs angereichert werden kann. Grew hat diesen Effekt mit einem Trennrohr an Ammoniak-Neon-Mischungen nachgewiesen⁸⁾*). Berücksichtigt man weiter die Tatsache, dass der Thermodiffusionsfaktor noch von der Temperatur und der Abweichung vom idealen Gaszustand⁹⁾ abhängt, so lässt sich für die genannten und manche anderen Systeme eine Fülle von Erscheinungen erwarten, die kaum theoretisch in ihren Feinheiten vorauszusagen sind, sondern experimentall klar-

*) Die Ergebnisse von GREW müssen allerdings in doppelter Hinsicht überprüft werden. Einmal verwendete er keine reinen Neonisotope, sondern das natürliche Gemisch, was bei Bestimmung so kleiner Thermodiffusionsfaktoren, wie sie im System NH_3 -Ne auftreten, nicht zulässig ist. Zum andern liefert das Trennrohr für Gasgemische variabler Zähigkeit η nicht ohne weiteres die richtigen Relativwerte für den Thermodiffusionsfaktor. Dies ist nur der Fall, wenn man bei konstanten η/ρ -Werten arbeitet, also für jedes Gemisch die richtige Dichte ρ durch Wahl des passenden Drucks einstellt.

gestellt werden müssen. Dass sich mancher der dabei auftretenden Effekte zu einer Erleichterung der Trennung physikalisch und chemisch sehr ähnlicher Komponenten¹ wird benutzen lassen, ist wohl sicher. Mit derartigen Versuchen sind wir z. Zt. in Zürich beschäftigt.

5. Herrn Dr. G. DICKEL danke ich für seine Hilfe beim Einfüllen des Xenons in die Trennanlage und Herrn Dr. W. SCHANZER für verschiedene Dichtemessungen. Besonderen Dank schulde ich weiter Herrn Dr. W. PAUL in Göttingen sowie Herrn Dr. H. KNOPF für die Massenanalyse. Der Firma für Linde's Eismaschinen AG., Höllriegelskreuth, verdanke ich schliesslich die kostenlose Beschaffung des Xenons.

Universität Zürich, Physikalisch-Chemisches Institut.

LITERATURLEGENDE.

- ¹) F. W. ASTON, Mass Spectra and Isotops. Edward Arnold & Co. 1948, S. 211.
 - ²) W. GROTH und P. HARTECK, Z. f. Elektrochem. **47**, 167 (1941).
 - ³) W. GROTH, Angewandte Chemie **61**, 34 (1949) ohne Zahlenangaben.
 - ⁴) K. CLUSIUS, L. STAVELEY und G. DICKEL, Z. f. phys. Chem. (B) **50**, 403 (1941).
 - ⁵) K. CLUSIUS und L. RICCOBONI, Z. f. phys. Chem. (B) **38**, 81 (1937).
 - ⁶) K. CLUSIUS und G. DICKEL, Z. f. phys. Chem. (B) **52**, 348 (1942).
 - ⁷) S. CHAPMAN, Proc. Roy. Soc. London A **177**, 38 (1940).
 - ⁸) K. E. GREW, Nature **150**, 320 (1942). Phil. Mag. **35**, 30 (1944).
 - ⁹) E. W. BECKER und A. SCHULZEFF, Naturwiss. **35**, 219 (1948).
-

Sur la théorie des diélectriques d'Onsager et la polarisation spontanée des cristaux

par Jean Pirene

Université de Liège et Ecole Polytechnique Fédérale, Zürich.

(27. IV. 1949.)

Résumé. On admet généralement que, suivant la théorie d'ONSAGER, un diélectrique ne peut se polariser spontanément sous la seule influence de l'interaction classique dipôle-dipôle. Nous montrons ici que cette déduction est inexacte: la méthode d'ONSAGER conduit seulement à un abaissement du point de CURIE, dont nous pouvons d'ailleurs évaluer l'importance. Cette conclusion est importante au sujet de la ferroélectricité, celle-ci étant souvent attribuée à l'interaction dipolaire. En outre, elle pourrait expliquer que la «catastrophe $4\pi/3$ » ne se soit pas manifestée dans certains cristaux où l'on s'attendait à l'observer.

1. L'interaction dipolaire dans les cristaux.

L'interaction mutuelle entre dipôles classiques, électriques ou magnétiques, est-elle susceptible de provoquer la polarisation spontanée d'un cristal, donnant lieu ainsi à des phénomènes de ferroélectricité ou de ferromagnétisme d'un type particulier? La question a été souvent discutée sans pouvoir être résolue définitivement¹⁾²⁾³⁾.

Une réponse affirmative est bien fournie par la théorie des diélectriques de DEBYE, théorie formellement identique à la théorie du ferromagnétisme de WEISS, mais dans laquelle le champ moléculaire est donné par la formule de LORENTZ-LORENZ, $\vec{F} = f\vec{P}$, le facteur de LORENTZ f ayant la valeur $4\pi/3$ dans le cas des réseaux cubiques.

Mais une telle théorie néglige totalement l'influence de la structure cristalline, sauf en ce qui concerne l'évaluation de f , et celle des corrélations statistiques entre les orientations des dipôles voisins: seule, la valeur moyenne de la polarisation intervient dans le calcul de l'énergie totale du cristal.

Il résulte tout d'abord de cette approximation que l'état d'énergie minima correspondrait à l'état de polarisation maxima, où tous

¹⁾ VAN VLECK, J. Chem. Phys., **5**, 320, 1937 et Ann. Inst. Poincaré, X, fasc. II, 122 (1947).

²⁾ SLATER, J. Chem. Physics **9**, 16 (1941).

³⁾ J. M. LUTTINGER and L. TISZA, Phys. Rev. **70**, 954—964 (1946).

les dipôles sont parallèles. Cette conclusion est certainement inexacte dans le cas du réseau cubique simple où l'on a trouvé des états de polarisation nulle dont l'énergie est plus faible que celle de l'état de polarisation maxima¹⁾³⁾. Toutefois, il semble bien que cette circonstance ne se présente plus dans les réseaux où le nombre de voisins immédiats est plus élevé, par exemple dans les réseaux cubiques à corps centré et à face centrée.

2. Rôle des corrélations.

Le fait d'ignorer les corrélations statistiques conduit d'autre part à admettre qu'un cristal est nécessairement ferroélectrique ou ferromagnétique si un état polarisé est un état d'énergie minima. Or, une telle condition n'est pas suffisante a priori, comme cela est particulièrement bien mis en évidence dans le cas du modèle d'ISING, beaucoup plus simple que le réseau de dipôles: l'interaction est isotrope, s'étend aux seuls voisins immédiats et ne prend que les valeurs $\pm w/2$. Les points de CURIE exacts ont pu être déterminés pour les réseaux à une et à deux dimensions; les voici comparés aux points de CURIE fournis par une théorie de WEISS, qui

	kT_c/w		
	chaîne linéaire	réseau quadrat. plan	réseau cubique simple
WEISS	1	2	3
BETHE, PEIERLS	0	1,442	2,466
Exacts	0	1,134	?

néglige complètement les corrélations, et par la méthode de BETHE et PEIERLS, qui en tient compte partiellement (on calcule la fonction de partition d'un petit amas de voisins immédiats, l'action du reste du cristal étant supposée représentée par un champ moléculaire convenablement adapté). Ce tableau met en relief l'influence considérable des corrélations dans le modèle d'ISING.

Les corrélations jouent sans doute aussi un rôle important dans le cas de l'interaction classique entre dipôles, comme semble l'indiquer l'étude expérimentale des diélectriques polaires. On sait, en effet, que la formule de DEBYE⁴⁾

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \frac{\mu^2}{kT} \quad (1)$$

⁴⁾ Pour simplifier l'exposé, nous avons négligé la polarisation électronique qui ne joue pas un rôle essentiel dans le raisonnement.

n'admet pas de solution positive ε lorsque

$$T < T_0 = \frac{4\pi}{3} N \frac{\mu^2}{k} \quad (2)$$

Pour ces températures, le diélectrique serait polarisé spontanément par suite de l'interaction entre dipôles, T_0 étant le point de CURIE. C'est ce qu'on a appelé la «catastrophe $4\pi/3$ », le phénomène n'ayant jamais été observé (nous reviendrons ultérieurement sur ce point).

3. La théorie d'Onsager.

C'est pour cette raison qu'ONSAGER⁵⁾ a construit une théorie où les corrélations jouent un rôle essentiel, et d'ailleurs surestimé. L'équation obtenue

$$\frac{(\varepsilon - 1)(2\varepsilon + 1)}{\varepsilon} = 4\pi N \frac{\mu^2}{kT} \quad (3)$$

admet toujours une solution ε positive, quelque petite que soit la température. On a cru pouvoir déduire de là que la méthode d'ONSAGER conduisait nécessairement à écarter toute possibilité de polarisation spontanée sous l'influence de l'interaction classique entre dipôles^{1) 2)}.

Cette conclusion est pourtant tout à fait erronée, comme nous allons le montrer. Elle provient de ceci: ONSAGER suppose a priori que le diélectrique est caractérisé par une constante diélectrique ε déterminée, autrement dit, que la polarisation est proportionnelle au champ électrique E . On exclut ainsi d'avance tout phénomène de saturation qui accompagne obligatoirement l'existence de la polarisation spontanée. Mais on peut développer le raisonnement d'ONSAGER sans cette hypothèse, qui n'a rien d'essentiel: on arrive alors simplement à un abaissement du point de CURIE.

Esquissons tout d'abord le raisonnement primitif d'ONSAGER. On isole l'un des dipôles par une sphère élémentaire de rayon r_0 centrée sur ce dipôle et ayant pour volume celui du diélectrique divisé par le nombre de dipôles qu'il contient. On considère alors l'intérieur de la sphère comme une cavité au sein d'un diélectrique fictif, continu, isotrope et de même constante diélectrique ε que le diélectrique réel. On admet alors que l'action des autres dipôles sur le dipôle «central» est représentée, en première approximation, par celle du diélectrique fictif.

Imposons au diélectrique réel un champ électrique uniforme \vec{E} . Il règne alors à l'intérieur de la cavité sphérique un certain champ

⁵⁾ L. ONSAGER, J. Am. Chem. Soc. **58**, 1486 (1936).

\vec{F} qui tend à orienter le dipôle central parallèlement à \vec{E} . Pour calculer ce champ, on peut adopter l'une ou l'autre des hypothèses extrêmes suivantes:

1° On suppose que le diélectrique fictif est soumis au champ \vec{E} et au champ *moyen* du dipôle central, les mouvements de celui-ci étant considérés comme trop rapides pour que les autres dipôles puissent les suivre (absence totale de corrélations). Dans ce cas, l'action perturbatrice de la cavité sur le diélectrique est exactement compensée par celle du dipôle central, de sorte que les positions moyennes des dipôles sont toutes parallèles dans le diélectrique. Le champ dans la cavité est alors donné par la formule de LORENTZ-LORENZ

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \quad (4)$$

et l'on est conduit à la formule de DEBYE (1).

2° On admet au contraire, suivant ONSAGER, que le diélectrique fictif prend à chaque instant la polarisation correspondant à l'action simultanée du champ \vec{E} et du champ *instantané* du dipôle central (surestimation des corrélations). Comme les équations du diélectrique fictif sont linéaires, le champ agissant sur le dipôle central peut être considéré comme la somme de deux champs partiels. Le premier est celui que donnerait le diélectrique fictif soumis à la seule action du dipôle central; ce «champ de réaction» étant parallèle au dipôle n'influe aucunement sur son orientation. Le deuxième champ partiel est celui qui existerait seul, si le dipôle central était absent; c'est uniquement ce «champ de cavité» qui tente d'orienter le dipôle, conformément à la théorie de Langevin; sa valeur est

$$\vec{F}' = \frac{3}{2\varepsilon+1} \vec{E} \quad (5a)$$

$$= \vec{E} + \frac{4\pi}{2\varepsilon+1} \vec{P} \quad (5b)$$

De là résulte immédiatement la formule d'ONSAGER (3).

4. La polarisation spontanée avec le modèle d'Onsager.

Les choses ne sont plus aussi simples si l'on admet a priori que le diélectrique est polarisé spontanément: la polarisation n'étant plus proportionnelle au champ, on aurait à résoudre un problème non linéaire très ardu. Cependant, si la température est suffisamment basse, on peut admettre que le diélectrique est très fortement polarisé (cette hypothèse est conséquente, comme on le verra) de

sorte que la polarisation est, en première approximation, une fonction linéaire de \vec{E} :

$$P(T) = P_0(T) + \left(\frac{\partial P(T)}{\partial E} \right)_{E=0} \cdot E \quad (6)$$

On voit immédiatement que le raisonnement d'ONSAGER subsiste, car il n'exige que la linéarité de la relation unissant P à E ; la simple proportionnalité n'est nullement nécessaire.

Nous aurons ainsi à considérer un diélectrique fictif dont la susceptibilité et la constante diélectrique sont:

$$\kappa = \frac{\partial P}{\partial E} \quad (7)$$

$$\varepsilon = 1 + 4 \pi \kappa \quad (8)$$

Pour obtenir le potentiel V qui correspond au champ de cavité, il suffit de résoudre l'équation de LAPLACE $\Delta V = 0$, avec les conditions (exprimées en coordonnées polaires)

$$V(r_0 - 0, \theta) = V(r_0 + 0, \theta)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r_0 - 0} = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r_0 + 0} - 4 \pi P_0 \cos \theta,$$

sur la sphère, et la condition à l'infini

$$V + Er \cos \theta \rightarrow 0 \text{ pour } r \rightarrow \infty.$$

On trouve ainsi le champ de cavité

$$F'' = \frac{3}{2\varepsilon + 1} E + \frac{4\pi}{2\varepsilon + 1} P_0 \quad (9a)$$

$$= E + \frac{4\pi}{2\varepsilon + 1} P \quad (9b)$$

Ces équations ne diffèrent de celles d'ONSAGER que par la présence du terme P_0 . La dernière formule montre que le facteur de LORENTZ est ici

$$f = \frac{4\pi}{2\varepsilon + 1}. \quad (10)$$

Calculons enfin la polarisation spontanée. En présence du champ E , la polarisation s'obtient en résolvant l'équation

$$P = N\mu L \left(\frac{\mu(E + fP)}{kT} \right) \quad (11)$$

où L est la fonction de LANGÉVIN

$$L(x) = \text{Cth } x - \frac{1}{x} \quad (12)$$

Le facteur de LORENTZ f se déduit de (10), en remarquant que

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{N \mu^2}{kT} \left(1 + f \frac{\partial P}{\partial E} \right) L' \left(\frac{\mu(E + fP)}{kT} \right). \quad (13)$$

Nous supposons maintenant que le champ appliqué est nul. Pour la suite du calcul, il est commode d'introduire la nouvelle variable

$$x = \frac{f P \mu}{kT}. \quad (14)$$

Les équations (11) et (13) s'écrivent alors

$$x = f \frac{N \mu^2}{kT} L(x) \quad (15)$$

$$\kappa = (1 + \kappa f) \frac{N \mu^2}{kT} L'(x) \quad (16)$$

En éliminant f et κ entre les équations (10), (15) et (16) et en repérant les températures par rapport au point de Curie de DEBYE (2), il vient

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{L'(0)} \frac{L(x)}{x} \frac{\frac{L(x)}{x} - 3 L'(x)}{\frac{L(x)}{x} - L'(x)} \quad (17a)$$

D'autre part, la polarisation est donnée par la formule

$$\frac{P}{N\mu} = L(x) \quad (17b)$$

Les équations (17) fournissent la relation unissant P à T sous forme paramétrique. Elles nous ont servi à tracer la courbe $P(T)$ de la fig. 1.

On s'aperçoit que, au-dessous d'une certaine température T_c , l'équation (17a) admet, pour x , une solution nulle et deux solutions non nulles. Seule, la plus grande de ces solutions correspond à un état stable, car elle donne lieu à l'énergie libre minima. Pour $T = T_c$, les deux solutions différentes de zéro se confondent sans s'annuler. Au-dessus de T_c , il ne subsiste que la solution $x = 0$, déjà considérée par ONSAGER.

T_c est donc bien le point de Curie, mais la disparition de la polarisation spontanée se présente, dans cette approximation, comme une transition du premier ordre.

5. Le point de Curie.

La méthode d'ONSAGER, ainsi adaptée, nous a fourni les résultats suivants :

$$\frac{T_c}{T_0} = 0,221; \quad x(T_c) = 7,28; \quad \frac{P(T_c)}{N\mu} = 0,863 \quad (18)$$

Etant donné que cette méthode surestime les corrélations tandis que celle de LORENTZ-DEBYE les néglige totalement, il paraît vraisemblable que la théorie exacte fournisse un point de CURIE compris entre ceux que l'on obtient par ces deux voies extrêmes.

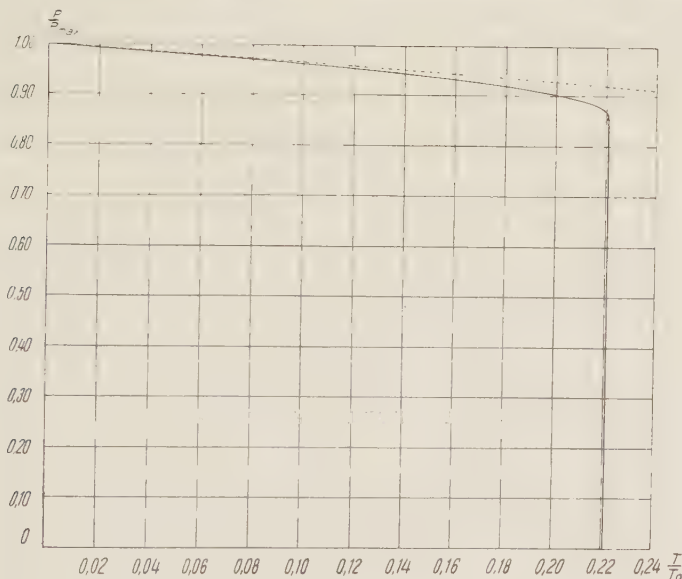


Fig. 1.

Polarisation spontanée P_s en fonction de la température :

----- suivant la théorie de DEBYE-LORENTZ,
 ————— suivant la théorie d'ONSAGER modifiée,

..... id., états instables.

T_0 = point de CURIE de DEBYE,

$P_{\max} = N\mu$ = polarisation à saturation.

Le point de CURIE que nous venons de calculer serait donc une borne inférieure. Toutefois, il s'agit ici d'une première évaluation plutôt que d'une détermination précise, l'hypothèse de linéarité (6) n'étant certainement plus vérifiée au voisinage de cette température.

Il n'est cependant pas sans intérêt de remarquer que cette évaluation permettrait d'écarter l'objection expérimentale citée par

VAN VLECK: les cristaux (cubiques à faces centrées) de HCl et HBr ne deviennent pas ferroélectriques à 260° K et 120° K, respectivement comme l'indiquerait la théorie de DEBYE; on observe seulement une transition à 100° K et 90° K, respectivement, attribuée à la cessation des rotations suivant la théorie de DEBYE-FOWLER. Or, d'après les résultats que nous venons d'obtenir, les points de CURIE seraient ramenés à 57,5° K et 26,5° K, c'est-à-dire à des températures où les rotations des dipôles seraient empêchées: la polarisation spontanée ne pourrait donc plus s'établir. Cet exemple montrerait que pour des dipôles tournant librement, l'influence des corrélations sur le point de CURIE est considérable sans être nécessairement aussi grande que la théorie d'ONSAGER modifiée le laisserait prévoir.

6. La polarisation à très basse température.

Supposons maintenant que la température tende vers zéro. Les formules (17) montrent alors que $x \rightarrow \infty$ et $P \rightarrow N\mu$: le milieu tend vers la saturation. On voit donc qu'à température suffisamment basse, l'hypothèse de linéarité (6), admise au début, est consistante et que, par conséquent, le cristal est bien polarisé spontanément.

Il convient toutefois de préciser le domaine de variation de F dans lequel cette linéarité doit être pratiquement réalisée. Si l'on retourne complètement le dipôle central, les variations de champ, ainsi produites à l'endroit d'un dipôle voisin sont de l'ordre de grandeur du champ moléculaire maximum $4\pi/3 N\mu$. Dans ce cas, l'hypothèse de linéarité n'est certainement plus réalisée. Cependant, à basse température, de tels retournements complets deviennent excessivement rares; les mouvements effectivement réalisés par les dipôles sont des oscillations de faible amplitude et il est alors justifié d'admettre que les variations locales de la polarisation sont proportionnelles aux variations locales du champ, suivant la formule (6).

Ceci nous amène à considérer le développement de P suivant les puissances croissantes de la température, lequel s'obtient aisément en éliminant x entre les équations (17)⁶; en voici le début:

$$\frac{P}{N\mu} = 1 - \frac{1}{3} \frac{T}{T_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - \frac{20}{27} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 + \dots \quad (19)$$

⁶ Ce développement n'est toutefois possible que si l'on confond Cth. x avec l'unité, dans la fonction de LANGEVIN; l'erreur résultante est d'ailleurs tout à fait négligeable car Cth $x - 1 < 10^{-6}$ pour tout le domaine de polarisation spontanée, $x \geq 7,28$.

L'intérêt de ce développement résulte de ce que ses quatre premiers termes sont indépendants de l'approximation linéaire (6): on les retrouverait inaltérés si l'on résolvait directement le problème non linéaire posé par la méthode d'ONSAGER, lorsque le diélectrique est partiellement saturé (cf. 4). Pour voir qu'il en est bien ainsi, remarquons que la formule (6) ne fournit correctement la polarisation locale P que jusqu'au terme du premier ordre en E . Or, les fluctuations de l'amplitude de E sont du premier ordre en T , tandis que la susceptibilité χ est du second ordre en T (on a, en effet, pour x suffisamment grand, $L(x) = 1 - x^{-1}$ et $L'(x) = x^{-2}$). Il résulte de là que le champ de cavité et, par suite, la polarisation moyenne P sont calculées correctement jusqu'aux termes du troisième ordre.

D'autre part, la théorie de LORENTZ-DEBYE fournit, de façon analogue, le développement suivant:

$$\frac{P}{N\mu} = 1 - \frac{1}{3} \frac{T}{T_0} - \frac{1}{9} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - \frac{2}{27} \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 + \dots \quad (20)$$

La décroissance linéaire de $P(T)$ à très basse température est la même dans les deux théories. Ceci résulte clairement de ce qu'à $T = 0$ le facteur de LORENTZ (10) atteint sa valeur maxima $4\pi/3$, la susceptibilité étant nulle. Lorsque T augmente, ε croît également et f diminue, précipitant de plus en plus la disparition de la polarisation spontanée, comme le montre la comparaison des formules (19) et (20).

Enfin, nous avons déjà remarqué plus haut que les théories d'ONSAGER et de DEBYE constituent deux cas extrêmes opposés. Aussi, la courbe réelle $P(T)$ se situe-t-elle, très vraisemblablement, entre celles que représentent les formules (19) et (20), pourvu naturellement qu'il suffise de considérer les quatre premiers termes de ces formules.

Le rôle réel des corrélations apparaît donc ainsi: elles accroissent la courbure du diagramme $P(T)$, sans changer sa pente initiale, et abaissent le point de CURIE; la transition du premier ordre, trouvée dans l'approximation linéaire, indique probablement une chute extrêmement rapide au voisinage de ce point. Une telle allure est effectivement observée dans certains cristaux ferroélectriques, tels que KH_2PO_4 ; mais, dans ce cas, elle pourrait sans doute résulter en partie du modèle des dipôles responsables de la polarisation spontanée.

Conclusions.

Contrairement à ce qui est généralement admis, l'hypothèse d'ONSAGER, au sujet des corrélations entre dipôles, ne conduit pas à rejeter la possibilité de polarisation spontanée sous l'influence exclusive de l'interaction classique dipôle-dipôle: le point de CURIE est seulement abaissé d'un facteur que nous avons évalué à 0,221, pour des dipôles tournant librement.

Ainsi se trouve écartée une objection, souvent citée, aux théories de la ferroélectricité basées sur l'interaction dipolaire seule. Telle est, semble-t-il, la conclusion la plus importante de cette discussion.

Notons encore que les corrélations ont pour effet de faire décroître la polarisation spontanée plus rapidement que dans la théorie de DEBYE (ou celle de WEISS), de telle sorte que la courbure du diagramme P , T s'en trouve accrue. Une telle allure est effectivement observée dans certains cristaux ferroélectriques tels que ceux de KH_2PO_4 , où elle pourrait d'ailleurs avoir une autre origine.

Enfin, l'abaissement du point de CURIE au-dessous du point où cesseraient les rotations, pourrait expliquer la non apparition de la catastrophe $4\pi/3$ dans certains cristaux, tels que ceux de HCl et HBr , où l'on s'attendrait à l'observer.

Zur Theorie der Multipolstrahlung.

von **M. Fierz**, Basel.

(1. IV. 1949.)

Zusammenfassung. Es wird in einfacher Weise die Intensität und Charakteristik der niedrigsten, von einer elektromagnetischen Strahlungsquelle ausgesandten Multipolwelle berechnet. Weiter werden allgemeine Formeln für die Korrelationen von γ -Strahlen mit Hilfe der Darstellungstheorie der Drehgruppe hergeleitet.

Einleitung.

Formeln für die Intensität der durch Kerne ausgesandten γ -Strahlung sind mit Hilfe des Tröpfchenmodells abgeleitet worden¹⁾. Sie entsprechen recht gut der Erfahrung²⁾. Entsprechende Formeln hat BERESTETZKY³⁾ für eine beliebige Multipolquelle angegeben. Im ersten Teile dieser Arbeit legen wir eine Methode dar, die in einfacher Weise die Intensität und Charakteristik der Multipolstrahlung niedrigster Ordnung zu berechnen gestattet, die eine elektromagnetische Strahlungsquelle ausstrahlen kann. Es zeigt sich, dass die magnetische und die elektrische Strahlung auch im allgemeinen Falle dem schiefen und dem symmetrischen Teil eines gewissen Tensors entspricht.

Wenn man die Formeln für ein bestimmtes Kernmodell anwenden will, müssen natürlich die Multipolmomente durch entsprechende Matricelemente ersetzt werden.

In den folgenden Abschnitten werden Fragen, die mit der Korrelation nacheinander ausgestrahlter γ -Quanten zusammenhängen, behandelt. Diese Fragen sind für Dipol- und Quadrupolstrahlung vor allem von D. R. HAMILTON⁴⁾ ausführlich untersucht worden. Er konnte seine Formeln so weit auswerten, dass sie leicht mit der Erfahrung verglichen werden können. C. N. YANG⁵⁾ hat darauf hingewiesen, dass sich derartige Probleme allgemein gruppentheoretisch behandeln lassen. Er beschränkt sich jedoch auf allgemeine Aussagen, ohne auf Einzelheiten näher einzugehen.

Wir leiten in dieser Arbeit Formeln ab, die für Korrelationen bei beliebiger Multipolordnung gültig sind.

Es ist auch berücksichtigt, dass im allgemeinen elektrische und magnetische Strahlung kohärent auftritt. Weiter wird der Fall behandelt, dass bei solchen Prozessen Korrelationen zwischen γ -Quanten und Konversionselektronen auftreten.

Zur Herleitung der Formeln bedienen wir uns der gruppentheoretischen Methode.

1. Klassische Theorie der Multipolstrahlung.

Wir betrachten die Ausstrahlung, die durch eine periodisch veränderliche Stromdichte

$$\vec{j}(x) e^{-i\omega t} + \text{konjg.}$$

zustande kommt. Rechnet man in GAUSS'schen Einheiten und eicht man die Potentiale so, dass

$$\text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0$$

dann wird das Strahlungsfeld in der Wellenzone durch das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \cdot \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{x}') e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x}')} d\tau' = \frac{1}{rc} e^{ikr - i\omega t} \vec{J} \quad (1,1)$$

beschrieben. Die Meinung ist dabei die, dass stets der konjugierte komplexe Term zu addieren sei. \vec{k} hat den Betrag ω/c , seine Richtung ist diejenige von \vec{x} .

Wir wollen nun das Integral \vec{J} in (1,1) nach Multipolmomenten entwickeln. Das ist sinnvoll, wenn die Wellenlänge der Strahlung gross gegen die Ausdehnung der Strahlungsquelle ist.

Wir entwickeln $e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x}')}$ in eine Potenzreihe:

$$e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x}')} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-i\vec{k} \cdot \vec{x}')^{l-1}}{(l-1)!} \quad (1,2)$$

Entsprechend wird nun $\vec{J} = \sum_{l=1}^{\infty} \vec{J}^{(l)}$. Die Komponente $J_n^{(l)}$ ist durch

$$J_n^{(l)} = \frac{(-i)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{n_1} \dots \sum_{n_{l-1}} k_{n_1} \dots k_{n_{l-1}} \int x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} j_n(\vec{x}) d\tau \quad (1,3)$$

gegeben.

Den Integranden spalte man nun in einen in den Indices $n_1 \dots n$ symmetrischen Teil und einen, der im Indexpaar n_{l-1}, n schief ist.

$$x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} \dot{j}_n = \frac{1}{l} \sum_{(n_1 \dots n)} x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} \dot{j}_n \\ + \frac{1}{l} \sum_{(n_1 \dots n_{l-1})} x_{n_1} \dots x_{n_{l-2}} (x_{n_{l-1}} \dot{j}_n - x_n \dot{j}_{n_{l-1}}) \quad (1,4)$$

Hier bedeutet $\sum_{(n_i \dots n_k)}$ die Summe über die zyklischen Permutationen der angeschriebenen Indices. Der symmetrische Teil entspricht der elektrischen, der schiefe Teil der magnetischen Multipolstrahlung.

Den symmetrischen Teil formen wir mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\text{div } \vec{j} + \dot{\varrho} = 0$ um:

$$\frac{1}{l} \int x_{n_1} \dots x_n \dot{\varrho} d\tau = -\frac{1}{l} \int x_{n_1} \dots x_n \text{div } \vec{j} d\tau = \\ \frac{1}{l} \sum_{(n_1 \dots n)} \int x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} \vec{j}_n d\tau$$

Somit ist derjenige Teil von $\vec{J}^{(l)}$, der der elektrischen Multipolstrahlung entspricht:

$$\vec{J}_E^{(l)} = \frac{(-i)^{l-1}}{l!} \int (\vec{k} \vec{x})^{l-1} \vec{x} \dot{\varrho} d\tau \quad (1,5)$$

Interessiert man sich nun lediglich für die Multipolstrahlung niedrigster Ordnung, die eine Strahlungsquelle ausstrahlt, so kann man auch die Entwicklung

$$e^{-i(\vec{k} \vec{x})} \sim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_m \frac{4\pi}{l-1} \frac{2^{l-1} (l-1)!}{(2l-2)!} \\ (-ikr)^{l-1} Y_{l-1,m}(\theta, \Phi) Y_{l-1,m}^*(\vartheta, \varphi) \quad (1,6)$$

betrachten, die man erhält, wenn man in der bekannten Entwicklung nach Kugelwellen die BESSELFunktionen nach kr entwickelt und jeweils nur den 1. Term beibehält. Hier sind θ, Φ die Polwinkel von \vec{k} ; ϑ, φ diejenigen von \vec{x} . $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ sind die normierten Kugelfunktionen. Da dies später wesentlich sein wird, wollen wir hier schon anmerken, dass die Vorzeichen der Funktionen so ge-

wählt sein sollen, dass $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$ ist. Indem man nun (1,5) und (1,6) vergleicht, ergibt sich

$$\vec{J}_E^{(l)} \sim \frac{4\pi(l-1)!}{l(2l-1)!} (-2ik)^{l-1} \sum_m Y_{l-1,m}(\theta, \Phi) \int \dot{\varrho}(\tilde{x}) \tilde{x} Y_{l-1,m}^*(\vartheta, \varphi) r^{l-1} d\tau \quad (1,7)$$

Diese Formel ist nur richtig, wenn man die Strahlung höherer Ordnung, die ein Multipol der Ordnung l ausstrahlt, vernachlässigt.

Die Ladungsdichte ϱ entwickle man nach Kugelfunktionen:

$$\varrho(\tilde{x}) = \sum_{l,m} \varrho_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

Mit dieser Entwicklung erhält man für das Potential Φ in der Nahezone $r \ll \lambda$:

$$\Phi(\tilde{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \Phi) \int \varrho_{l,m}(r') r'^{l+2} dr'$$

Die Integrale

$$Q_{l,m} = \int \varrho_{l,m}(r) r^{l+2} dr \quad (1,8)$$

nennen wir deshalb die Multipolmomente.

Unserer Näherung entsprechend, hat man in (1,7) nur den Term

$$\varrho^{(l)} = \sum_{m'} \varrho_{l,m'}(r) Y_{l,m'}(\vartheta, \varphi)$$

zu berücksichtigen. Setzt man das ein und integriert über die Winkel, so erhält man für das Integral in (1,7)

$$\sum_{m'} \tilde{c}_{m,m'}^{(l)} Q_{l,m'} \quad (1,9)$$

Die $\tilde{c}_{m,m'}^{(l)}$ sind bekannte Koeffizienten. Insbesondere gilt

$$\sum_m \tilde{c}_{m,m'}^{(l)} Y_{l-1,m}(\theta, \Phi) = \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l-1}} \text{grad} [r^l Y_{l,m'}(\theta, \Phi)] \quad (1,10)$$

(Siehe hiezu H. BETHE, Handbuch der Physik 24/1, 2. Aufl., S. 555ff.). Indem wir das beachten, erhalten wir einen Ausdruck für $\vec{J}_E^{(l)}$ und damit für \mathfrak{A} . Die elektrische Feldstärke ist gleich der transversalen Komponente von $-\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}$.

Daher sind die Komponenten von \mathfrak{E} in den Richtungen θ und Φ (meridionale und azimutale Komponente)

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{\theta}^{(l)} \\ \mathfrak{E}_{\Phi}^{(l)} \end{array} \right\} = -\frac{e^{ikr}}{r c^2} \cdot 8 \pi \frac{(l-1)!}{(2l+1)!} \left(\frac{2k}{i} \right)^{l-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \end{array} \right\} \sum_m Y_{l,m}(\theta, \Phi) \ddot{Q}_{l,m} \quad (1,11)$$

Natürlich ist $\ddot{Q}_{l,m} = -\omega^2 Q_{l,m}$.

Um die magnetische Strahlung zu erhalten, führen wir die Dichte des magnetischen Momentes ein:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} [\vec{x} \vec{j}] \quad (1,12)$$

Diese entwickle man nach Kugelfunktionen:

$$\vec{\mu} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_m \vec{\mu}_{l-1,m}(r) Y_{l-1,m}(\vartheta, \varphi)$$

Die $\vec{\mu}_{l-1,m}$ haben nun auf Grund gruppentheoretischer Sätze die Form

$$\vec{\mu}_{l-1,m} = \sum_{m'} \vec{c}_{m,m'}^{(l)} \mu_{l,m'}(r)$$

Wenn man die entsprechende Rechnung macht, wie für die elektrische Strahlung, so findet man leicht, dass hier \mathfrak{H} an Stelle von \mathfrak{E} tritt und dass die magnetischen Multipolmomente sich zu

$$M_{l,m} = \frac{2l}{l+1} \int \mu_{l,m}(r) r^{l+1} dr \quad (1,13)$$

ergehen. Der Faktor $\frac{l}{l+1}$ rührt davon her, dass in der Summe in (1,4), die dem magnetischen Multipolmoment entspricht, nur $l-1$ Summanden auftreten. Der Faktor 2 rührt von der Definition (1,12) her.

Die gesamte Ausstrahlung erhält man, wenn man $\frac{c}{4\pi} \mathfrak{E}^2$ über die Kugeloberfläche integriert. Nun ist

$$\int \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{l,m} \right|^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{l,m} \right|^2 \right\} d\Omega = l(l+1)$$

Darum ist die pro Sekunde und im Zeitmittel ausgestrahlte Energie

$$S_E^{(l)} = 8 \pi c \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2l+2} \frac{2^{2l} l!^2 (l+1)}{(2l+1)! l} \sum_m |Q_{l,m}|^2 \quad (1,14)$$

Für die magnetische Strahlung hat man die $Q_{l,m}$ durch die $M_{l,m}$ zu ersetzen.

2. Charakteristik einer Multipolquelle in der Quantenmechanik.

Wir betrachten einen Atomkern in einem Zustande mit den Drehimpulsquantenzahlen j_1, m_1 . Durch Ausstrahlung eines Lichtquants, das einer 2^j -Pol-Strahlung entspricht, gehe der Kern in den Zustand mit den Quantenzahlen j_2, m_2 über. Das Lichtquant hat den Drehimpuls j^6). Aus dem Drehimpulssatz folgt weiter, dass

$$m_1 = m_2 + m \quad (2,1)$$

gelten muss. Hier ist m der Drehimpuls des Lichtquants um die z -Achse. Das diesem Übergang zugeordnete Matrixelement nennen wir $Q_{j,m}$. Dann wird der Endzustand, in welchem ein Lichtquant und der Atomkern im Zustande ψ_{j_2} vorhanden ist, durch den Ausdruck

$$\sum_m Q_{j,m} Y_{j,m} \psi_{j_2, m_1 - m} \quad (2,2)$$

charakterisiert. Der Drehimpuls dieses Endzustandes muss der gleiche sein, wie derjenige des Anfangszustandes ψ_{j_1, m_1} , weshalb sich (2,2) bei Drehungen des Koordinatensystems so transformieren muss, wie die Eigenfunktion ψ_{j_1, m_1} . Daher verhalten sich die Matrixelemente $Q_{j,m}$ so wie die Koeffizienten der CLEBSCH-GORDAN'schen Reihe der Produktdarstellung $\vartheta_{j_1} \times \vartheta_{j_2}$ der Drehgruppe⁷⁾.

Falls man sich für die Charakteristik der Strahlung interessiert, so hat man den Erwartungswert von (2,2) bezüglich der Koordinaten des Atomkerns zu bilden. Da die Funktionen ψ_{j_2, m_2} mit verschiedenen m_2 orthogonal sind, addieren sich die Beiträge mit verschiedenen m inkohärent. Dies entspricht auch der Rotations-symmetrie des Problems um die z -Achse.

Beobachtet man die Strahlung in der Richtung ϑ, φ und im

Polarisationszustände a_ϑ, a_φ ($|a_\vartheta|^2 + |a_\varphi|^2 = 1$), dann findet man für die Intensität:

$$J(\vartheta, \vec{a}) \sim \sum_m \left(a_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + a_\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{j,m}(\vartheta, \varphi) Q_{j,m}(j_1 m_1) \\ + \left(a_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - a_\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y_{j-1,m}(\vartheta, \varphi) M_{j-1,m}(j_1 m_1) \quad (2,3)$$

Hier ist berücksichtigt, dass neben der elektrischen Multipolstrahlung der Ordnung j noch eine magnetische Strahlung der Ordnung $j-1$ auftreten kann, die zur elektrischen Strahlung kohärent ist.

Die Änderung der Parität des Zustandes des Atomkerns ist stets $(-1)^j$.

Falls entweder $j_1 = j + j_2$ oder $j_2 = j + j_1$ ist, so tritt keine magnetische Strahlung auf; die $M_{j-1,m}$ verschwinden. Die $Q_{j,m}$ sind dann, bis auf einen gemeinsamen von m unabhängigen Faktor, wie folgt gegeben:

$$j_1 = j + j_2 \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) \sim \binom{j_1 + m_1}{j + m}^{1/2} \binom{j_1 - m_1}{j - m}^{1/2} \\ j_2 = j_1 + j \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) \sim (-1)^m \binom{j + j_1 + m_1 - m}{j - m}^{1/2} \binom{j + j_1 - m_1 + m}{j + m}^{1/2} \quad (2,4)$$

$\left[\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \right]$; falls im Nenner ein Argument negativ wird, verschwindet der Binomialkoeffizient per definitionem.

Ein Spezialfall, der in (2,4) nicht enthalten ist, ist der Übergang $j_1 = j_2 = 1/2, j = 1$. Hier sind die $Q_{j,m}$ wie folgt bestimmt:

$$Q_{1,0}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = Q_{1,0}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 1 \\ Q_{1,1}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = Q_{1,-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2} \quad (2,5)$$

Wenn hingegen $j_1 = j + j_2 - 1$ oder $j_2 = j + j_1 - 1$ ist, tritt eine magnetische Strahlung der Ordnung $j-1$ auf. Die $M_{j-1,m}$ sind wiederum durch (2,4) bzw. (2,5) gegeben, wobei natürlich j durch

$j - 1$ zu ersetzen ist. Weiter tritt eine elektrische Multipolstrahlung auf. Es gilt:

$$\begin{aligned} j_1 &= j + j_2 - 1 \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) &\sim \binom{j_1 + m_1}{j + m - 1}^{1/2} \binom{j_1 - m_1 + 1}{j - m}^{1/2} \sqrt{(j + m)(j_1 + 1 - m_1)} \\ &- \binom{j_1 + m_1 + 1}{j + m}^{1/2} \binom{j_1 - m_1}{j - m - 1}^{1/2} \sqrt{(j - m)(j_1 + m_1 + 1)} \end{aligned} \quad (2,6)$$

$$\begin{aligned} j_2 &= j + j_1 - 1 \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) &\sim (-1)^m \left[\binom{j_1 + j + m_1 - m - 1}{j - m}^{1/2} \binom{j_1 + j - m_1 + m - 1}{j + m - 1}^{1/2} \right. \\ &\quad \cdot \sqrt{(j_1 + m_1)(j + m)} \\ &\quad \left. - \binom{j_1 + j + m_1 - m - 1}{j - m - 1}^{1/2} \binom{j_1 + j - m_1 + m - 1}{j + m}^{1/2} \sqrt{(j_1 - m_1)(j - m)} \right] \end{aligned} \quad (2,7)$$

Diese Ausdrücke für $Q_{j,m}$, $M_{j-1,m}$ sind in die Formel (3,3) einzusetzen. Dabei ist das Verhältnis von Phase und Intensität der elektrischen und magnetischen Strahlung durch einen komplexen Faktor zu berücksichtigen. Dieser kann aus einem Modell für die Strahlungsquelle berechnet werden, oder man kann gegebenenfalls versuchen, ihn aus der Erfahrung zu bestimmen.

3. Korrelation nacheinander emittierter γ -Quanten.

Wir betrachten zwei hintereinander folgende Emissionsprozesse eines Atomkerns, bei welchen dieser von seinem Anfangszustand mit dem Impulsmoment j_1 in den einen Zwischenzustand mit dem Impulsmoment j_2 und hierauf in den Endzustand mit dem Impulsmoment j_3 übergeht. Dabei werden zwei Lichtquanten ausgestrahlt, die in den Richtungen $\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi'$ beobachtet werden, und zwar unter den Polarisationsrichtungen \vec{a}, \vec{a}' .

Wir interessieren uns für die Korrelation von Richtung und Polarisation der ausgestrahlten Lichtquanten, falls im Anfangszustand keine Richtung bevorzugt ist, d. h. alle m_1 gleich wahrscheinlich sind. Auf Grund des Drehimpulssatzes erhält man für die Korrelationsfunktion $W(\theta, \vec{a}, \vec{a}') - \theta$ ist hier der Winkel zwischen den Richtungen $\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi'$, — Ausdrücke folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} W(\theta, \vec{a}, \vec{a}') &= \sum_{m_1} \sum_{m'} \left| \left(a_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + a_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(a'_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta'} + a'_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_m Y_{j,m}(\vartheta, \varphi) Y_{j',m'-m}(\vartheta', \varphi') Q_{j,m}(j_1, m_1) Q_{j',m'-m}(j_2, m_1 - m) \right|^2 \end{aligned} \quad (3,1)$$

Diese Formel gilt, falls z. B. $j_1 = j_2 + j$; $j_2 = j_3 + j'$ angenommen wird. Die $Q_{j,m}$; $Q'_{j',m'}$ sind dann wiederum durch (2,4) gegeben. Dass der Ausdruck (3,1) nur von θ abhängt, ist eine Folge der Struktur der $Q_{j,m}$ und entspricht einem verallgemeinerten Additionstheorem von Kugelfunktionen. Dadurch kommt die Symmetrie des Problems zum Ausdruck.

Es ist daher zweckmässig, $\vartheta = 0$, $\varphi = \varphi' = 0$ zu setzen.

Weiter wollen wir die Polarisation durch zirkular polarisierte Komponenten beschreiben:

$$p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \frac{1}{i} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right); \quad a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vartheta} \pm i a_{\varphi})$$

$$a_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + a_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = a_+ p_+ + a_- p_-$$

$$a_{\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - a_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = i (a_+ p_+ - a_- p_-) \quad (3,2)$$

$$\text{Nun gilt } (p_+ Y_{j,m})_{\vartheta=\varphi=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 1 \\ \left(\frac{2j+1}{8\pi j(j+1)} \right)^{1/2} & \text{für } m = 1 \end{cases}$$

$$(p_- Y_{j,m})_{\vartheta=\varphi=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq -1 \\ \left(\frac{2j+1}{8\pi j(j+1)} \right)^{1/2} & \text{für } m = -1 \end{cases} \quad (3,3)$$

Damit erhält man für die Korrelationsfunktion (N. B. $\theta = \vartheta'$) im allgemeinsten Falle

$$W(\vartheta', \vec{a}, \vec{a}') =$$

$$\sum_{m_1} \sum_{m'_1} \left[a_+ Q_{j,1}(j_1, m_1) + i a_+ \sqrt{\frac{(2j-1)(j+1)}{(2j+1)(j-1)}} \cdot M_{j-1,1}(j_1, m_1) \right]$$

$$\cdot [(a'_+ p'_+ + a'_- p'_-) Y_{j',m'-1} Q'_{j',m'-1}(j_2, m_1 - 1)$$

$$+ i (a'_+ p'_+ - a'_- p'_-) \cdot Y_{j'-1,m'-1} M_{j'-1,m'-1}(j_2, m_1 - 1)]$$

$$- \left[a_- Q_{j,-1}(j_1, m_1) - i a_- \sqrt{\frac{(2j-1)(j+1)}{(2j+1)(j-1)}} \cdot M_{j-1,-1}(j_1, m_1) \right]$$

$$\cdot [(a'_+ p'_+ + a'_- p'_-) Y_{j',m'+1} Q'_{j',m'+1}(j_2, m_1 + 1)$$

$$+ i (a'_+ p'_+ - a'_- p'_-) Y_{j'-1,m'+1} M_{j'-1,m'+1}(j_2, m_1 + 1)]^2 \quad (3,4)$$

Auch hier sind, je nach den Gleichungen, die zwischen j_1, j_2, j_3, j, j' bestehen, die Multipolmomente durch (2,4) bis (2,7) gegeben. Wieder ist dem Verhältnis zwischen den elektrischen und magnetischen Momenten mit Hilfe komplexer Faktoren Rechnung zu tragen.

Leider scheint es unmöglich zu sein, die in den Formeln (2,3) und (3,4) auftretenden Summen allgemein auszuführen. Die Ergebnisse von Hamilton sind in dieser Hinsicht jedenfalls nicht ermutigend.

4. Richtungsverteilung von Konversionselektronen.

Für weiche γ -Strahlen, die ein Kern emittiert, kann die Konversion der Strahlung in Elektronen beträchtlich sein. Man kann auch die Charakteristik der Konversionselektronen angeben. Die hierfür massgebenden Formeln sind aus zwei Gründen einfacher als im Falle der Strahlungscharakteristik. Hier treten nämlich die Kugelfunktionen selber auf und nicht ihre Ableitungen. Da man zudem die Polarisierung der Elektronen, d. h. ihre Spinorientierung, nicht beobachtet, so addieren sich die magnetischen und die elektrischen Übergänge inkohärent.

Das sieht man wohl am einfachsten wie folgt ein:

Wir betrachten die Emission eines K -Elektrons. Die beiden K -Elektronen bilden einen Singulett-Zustand. Bei elektrischer Konversion bildet das herausgeworfene Elektron mit dem verbleibenden K -Elektron einen Singulett-Zustand, bei magnetischer Konversion bilden jedoch diese Teilchen einen Triplett-Zustand. Diese beiden Zustände sind jedoch bei Summation über die Spinrichtungen orthogonal und addieren sich somit inkohärent. Man kann deshalb elektrische und magnetische Übergänge in diesem Falle getrennt betrachten. Die zugehörigen Elektronenintensitäten sind jeweils zu addieren.

Geht ein Kern im Zustande $j_1 m_1$ durch Konversion eines K -Elektrons in den Zustand j_2 über, so ist im Falle elektrischer Strahlung die Charakteristik der Elektronenintensität einfach:

$$J(\vartheta) = \sum_m |Q_{j,m}(j_1, m_1)|^2 \cdot |Y_{j,m}(\vartheta)|^2 \quad (4,1)$$

Für magnetische Übergänge erhält man 3 Terme, die den drei Termen des Triplett-Zustandes entsprechen. Bei einem magnetischen Übergang der Ordnung $j-1$ wird ein Elektron mit dem Bahndrehimpuls $j-2$ ausgesandt. Dieser Bahndrehimpuls muss sich mit dem

Spindrehimpuls 1 des Triplets zum Gesamtpuls $j-1$ zusammensetzen. Sei S_m die Spinfunktion ($m = 0, 1, -1$), dann muss sich

$$\sum_{m'} Y_{j-2, m'} c_{m', m-m'}^{j-1} S_{m-m'} \quad (4,2)$$

wie $Y_{j-1, m}$ transformieren. Es ist deshalb in diesem Falle

$$J(\vartheta) = \sum_m |M_{j-1, m}|^2 \left\{ |Y_{j-2, m-1}|^2 \frac{(j+m-1)(j+m-2)}{2} + |Y_{j-2, m+1}|^2 \frac{(j-m-1)(j-m-2)}{2} \right\} \quad (4,3)$$

Wenn der Kern zwei Übergänge hintereinander ausführt, wobei beim ersten Übergang an Stelle eines Lichtquants ein Konversions-Elektron ausgesandt wird, dann kann nach der Korrelation des Elektrons mit dem beim zweiten Übergange ausgestrahlten Lichtquant gefragt werden. Man wird zweckmässig die z -Achse in die Richtung des Elektrons legen. Ist der erste Übergang elektrischer Natur, so erhält man für die Korrelationsfunktion

$$W(\vartheta, \vec{a}) = \sum_{m_1} \sum_{m'} |Q_{j,0}(j_1, m_1)|^2 \cdot |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'} \cdot Q_{j', m'}(j_2, m_1) + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'} M_{j'-1, m'}(j_2, m_1)|^2 \quad (4,4)$$

Wenn der erste Übergang dagegen magnetischer Natur ist, so gilt

$$W(\vartheta, \vec{a}) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1} \sum_{m'} \left\{ |M_{j-1,1}(j_1, m_1)|^2 \cdot |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'-1} Q_{j', m'-1}(j_2, m_1-1) \right. \\ & + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'-1} M_{j'-1, m'-1}(j_2, m_1-1)|^2 \frac{j(j-1)}{2} \\ & + |M_{j-1,0}(j_1, m_1)|^2 \cdot |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'} Q_{j', m'}(j_2, m_1) \\ & + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'} M_{j'-1, m'}(j_2, m_1)|^2 (j-1)^2 \\ & + |M_{j-1,-1}(j_1, m_1)|^2 \cdot |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'+1} Q_{j', m'+1}(j_2, m_1+1) \\ & \left. + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'+1} M_{j'-1, m'+1}(j_2, m_1+1)|^2 \frac{j(j-1)}{2} \right\} \quad (4,5) \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind die Ausdrücke (4,4) und (4,5) mit passenden Gewichten zu addieren.

Im Falle, dass das zweite Lichtquant konvertiert wird, kann die Korrelationsfunktion in der entsprechenden Art auch ohne Mühe angegeben werden.

Basel, Seminar für theoretische Physik.

LITERATUR.

- ¹⁾ S. FLÜGGE, *Annalen d. Phys.* **39** (1941) 373.
 - ²⁾ BERTHELOT, *Annales de Chimie et de Physique* **19** (1944) 117, 219;
M. L. WIEDENBECK, *Phys. Rev.* **69** (1946), 567.
 - ³⁾ BERESTETCKY, *Journ. of Phys. U.S.S.R.* **XI**, 85 (1947).
 - ⁴⁾ D. R. HAMILTON, *Phys. Rev.* **58**, 122 (1940); **74**, 782 (1948).
 - ⁵⁾ C. N. YANG, *Phys. Rev.* **74**, 764 (1948).
 - ⁶⁾ W. HEITLER, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **32**, 112 (1936).
 - ⁷⁾ B. L. VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode*, Berlin 1932.
-

Compte rendu de la réunion de la Société Suisse de Physique

à Lausanne, le 3 septembre 1949.

Président: Prof. Dr. H. MÜGELI (Neuchâtel),
Vice-président: Prof. Dr. A. MERCIER (Berne),
Secrétaire: Dr. P. DINICHERT (Neuchâtel).

Partie administrative.

Sont reçus comme membres ordinaires: MM. E. KEBERLE (Berne) et M. CHRÉTIEN (Bâle).

La S.S.P. compte actuellement 342 membres.

Le professeur A. PERRIER (Lausanne) donne un aperçu de l'activité de l'Union internationale de physique pure et appliquée et annonce qu'une réorganisation du Comité suisse de physique est à l'étude.

Un congrès international de physique, organisé par MM. P. HUBER et K. MEYER, aura lieu à Bâle, du 5 au 10 septembre 1949.

La S.S.P. se réunira au printemps 1950, en un lieu et à une date qui seront fixés ultérieurement.

Partie scientifique.

Les variations thermiques de la biréfringence du quartz dans la région de passage $\alpha\beta$; le cristal élémentaire de silice

par R. DE MANDROT (Lausanne).

La transformation $\alpha\beta$ du quartz a été l'objet de nombreuses recherches; à l'approximation où ces expériences «anciennes» ont été effectuées, elles laissaient conclure à une *discontinuité* nette des phénomènes. Des travaux plus récents se sont montrés en désaccord sur ce point.

L'auteur a cherché à voir exactement la nature de la transformation, à examiner avec précision un intervalle étroit de température.

La méthode optique (biréfringence, analyseur à pénombre, etc.) donne une observation *immédiate et précise*.

La température du four contenant l'échantillon d'essai était mesurée par voie thermo-électrique et l'on pouvait évaluer des variations de température de $0,01^{\circ}$.

Les échantillons soumis à l'expérience étaient un prisme rectangulaire, épais de 4,6 mm et des lames minces (0,35; 0,21; 0,15 mm) de surface très petite (quelques mm^2).

La précision des mesures de différence de marche $(n_e - n_o) e$, e étant l'épaisseur de l'échantillon, n_e et n_o les indices extraordinaire principal et ordinaire, était d'environ un dix-millième; elle était un peu moindre dans le cas des lames minces, très bien travaillées.

Echantillon épais.

La courbe $(n_e - n_o) e = f(t)$ présente au «point» $\alpha\beta$ une *partie verticale*, la température étant portée en abscisses; la différence de marche y subit une variation voisine de 2,5%; ce n'est pas une discontinuité au sens de LE CHATELIER; la durée de transformation (la température étant maintenue constante dès que ce phénomène débute) est de *quelques minutes*.

L'écart de température des «seuils» (début) $\overrightarrow{\alpha\beta}$ et $\overrightarrow{\beta\alpha}$ de transformation, variable, est voisin de 1° . Il y a donc nette irréversibilité.

Lames minces.

La transformation a ici un *caractère tout autre*. La courbe représentative de $(n_e - n_o) e$ se compose de *paliers* (s'étendant sur quelques $0,1^{\circ}$) et de *discontinuités* dont la durée de parcours est inférieure à celle enregistrée dans le cas d'une lame épaisse.

On a donc plusieurs transformations partielles, interrompues par des états d'équilibre; on a une courbe en *escalier*.

L'intervalle de température qui correspond à la transformation $\overrightarrow{\alpha\beta}$ (ou $\overrightarrow{\beta\alpha}$) peut être une fraction de degré, et l'écart des *seuils* est de quelques $0,1^{\circ}$.

Avec les lames *très minces* (0,21; 0,15 mm) et dans le cas d'une vitesse de passage lente et constante, on a dès le début de la transformation une courbe *sensiblement continue* (marches d'escalier très petites, invisibles!), mais *non réversible*; elle s'étend sur une partie notable du domaine de transformation (surtout dans le passage $\beta \rightarrow \alpha$) et se termine par une *chute* (dans le passage $\alpha \rightarrow \beta$) ou un *relèvement* (passage $\beta \rightarrow \alpha$) «verticaux» (la température étant portée en abscisses) dont la durée de parcours est faible (quelques 10 secondes).

Chaque point correspond maintenant à un état *bien défini* de la biréfringence de la lame.

La transformation peut s'étendre sur un intervalle notable de la température (1°) et les seuils $\alpha\vec{\beta}$ et $\vec{\beta}\alpha$ sont peu écartés (zéro à quelques $\pm 0,1^{\circ}$).

L'hypothèse d'un passage $\alpha\vec{\beta}$ réversible à la limite est exclue.

Le changement graduel du caractère de la transformation, quand diminue l'épaisseur de la lame d'essai, conduit à l'hypothèse que sous l'épaisseur des lames très minces (0,15 mm) on atteint les dimensions du cristal élémentaire de silice. Sa transformation $\alpha\beta$ est sensiblement représentée par les courbes obtenues avec les lames très minces.

Nous avons ici le passage $\alpha\beta$, le déplacement relatif des atomes Si et O dont parle BRAGG; mais c'est la transformation *élémentaire*.

Les faits expérimentaux parlent contre l'existence de blocs élémentaires très petits, dont les dimensions linéaires oscilleraient de 10^{-4} à 10^{-6} cm.

Le travail se termine par quelques considérations théoriques. La transformation $\alpha\beta$ se propage de *proche en proche* dans une lame épaisse. On explique l'écart plus grand de température des seuils $\alpha\vec{\beta}$ et $\vec{\beta}\alpha$ des lames épaisses que celui des lames minces, etc.

Un travail détaillé paraîtra dans les Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.

Nouvelle représentation de l'effet Hall spontané

par J.-P. JAN (Lausanne).

La représentation habituelle de l'effet Hall est la suivante: soit une plaque rectangulaire conductrice parcourue dans le sens de la longueur par un courant électrique de densité \vec{J} ; sous l'effet d'un champ magnétique extérieur \vec{H} perpendiculaire à la plaque, le champ électrique \vec{E} forme avec les lignes de courant un angle φ . Si E_{\perp} désigne la composante du champ électrique perpendiculaire au courant, l'effet Hall est mesuré par la «constante» de Hall R telle que:

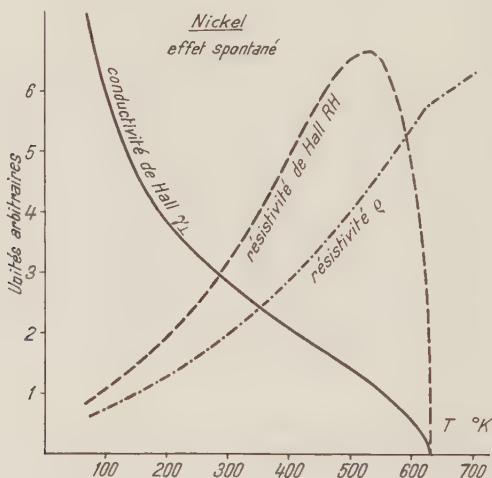
$$E_{\perp} = RHJ \quad (1)$$

Le paramètre R ne fournit pas une représentation convenable de l'effet Hall; d'une part, il est rapporté au champ magnétique *extérieur* à l'échantillon; d'autre part, à température fixe, il peut dépendre du champ H , surtout pour les ferromagnétiques. Dans ce

dernier cas, on utilise couramment la représentation par le produit RH , dont la dimension est celle d'une résistivité; ce dernier paramètre est proportionnel à l'aimantation observable, et sa valeur à saturation mesure sensiblement l'effet spontané¹⁾²⁾. RH spontané tend vers zéro aux basses températures et s'annule au point de Curie (voir la figure).

A. PERRIER a montré³⁾ les inconvénients de cette dernière représentation et lui substitue une conductibilité de Hall γ_{\perp} définie par la relation :

$$\gamma_{\perp} = \frac{J_{\perp}}{E} \quad (2)$$



où E désigne le champ électrique total et J_{\perp} la composante de densité de courant («autocourant») perpendiculaire à \vec{E} . Cette conductibilité apparaît dans la relation linéaire entre le champ et le courant pour un milieu anisotrope. Si ρ désigne la résistivité :

$$\gamma_{\perp} = \frac{RH}{\rho^2 + (RH)^2} \cong \frac{RH}{\rho^2} \quad (RH \ll \rho) \quad (3)$$

L'auteur a mesuré γ_{\perp} spontané sur du nickel du commerce et sur du fer électrolytique, entre la température de l'air liquide (-192°C) et le point de Curie. Il n'existait aucune mesure de RH et de ρ sur le même échantillon, mesures nécessaires pour le calcul de γ_{\perp} .

La figure montre les résultats obtenus pour le nickel. Comme toutes les conductibilités, γ_{\perp} spontané s'accroît fortement vers les basses températures, alors même que l'aimantation ne varie presque pas⁴⁾. Les courbes du fer présentent le même aspect. La dif-

férence avec la représentation habituelle, où l'effet Hall semblait s'annuler aux basses températures, est particulièrement frappante.

Les mesures sont effectuées sur des plaques rectangulaires perpendiculaires au champ magnétique; des sondes longitudinales et transversales permettent la mesure de la résistivité ϱ et du paramètre RH respectivement; le métal des sondes étant le même que celui de la plaque, l'effet mesuré est sensiblement isotherme. Les différences de potentiel sont données par un galvanomètre étalonné.

La saturation, accessible sur le nickel, ne l'est pas pour le fer; il a été fait usage d'une méthode d'extrapolation décrite ailleurs⁵⁾.

Pour les mesures à haute température, la plaque est placée dans un four électrique; les mesures à basse température sont effectuées sur la plaque refroidie à l'air liquide, puis se réchauffant lentement dans un Dewar. La température est mesurée directement sur la plaque à l'aide de doubles sondes employées comme couples thermo-électriques.

Bibliographie.

¹⁾ A. PERRIER, Théorèmes sur la variation des effets magnétogalvaniques transversaux et effets connexes dans les milieux ferromagnétiques. *Helv. Phys. Acta* **6**, p. 461 (1933).

²⁾ E. M. PUGH and T. W. LIPPERT: Hall e. m. f. and Intensity of Magnetization. *Phys. Rev. Ser. II*, **42**, 709 (1932).

³⁾ A. PERRIER, Grandeurs et formules théoriques nouvelles pour les phénomènes galvanomagnétiques et thermomagnétiques. *Helv. Phys. Acta* **3**, 317 (1930).

⁴⁾ A. PERRIER, Interprétation unitaire des particularités de la conduction des milieux ferromagnétiques. *Helv. Phys. Acta* **3**, 400 (1930).

⁵⁾ A. PERRIER, Actions démagnétisantes et lois expérimentales des phénomènes du type magnétogalvanique et des effets connexes. *Helv. Phys. Acta* **6**, 466 (1933).

Interprétation thermoélectrique du magnétogalvanisme

par ALBERT PERRIER (Lausanne).

I. Sous les vocables magnétogalvanisme et magnétothermoélectricité, on comprend les phénomènes nombreux et variés qui se manifestent dans les milieux conducteurs aimantés lorsqu'on y établit des gradients de potentiel ou de température. On sait que les diverses formes de théorie de la conduction métallique ne sont pas en mesure de rendre compte de manière satisfaisante de tout cet ensemble. L'auteur pense que cela tient pour une bonne part déjà à la manière de poser le problème phénoménologique, et il a introduit des représentations qu'il croit de nature à donner des fonctions notablement plus simples, et où les liaisons doivent apparaître plus clairement.

La communication de J.-P. JAN (ce procès-verbal, No 2) justifie cette méthode par un de ses aspects expérimentaux.

Le présent travail en étudie un autre, de nature énergétique cette fois: il s'attache à la nature même de ce que l'on appelle la *force électromotrice de Hall*: il est d'usage d'appliquer aux courants qui en dérivent les lois classiques (ОПМ avec résistivité, JOULE). L'auteur a fait remarquer il y a déjà longtemps que de telles conceptions ne peuvent être maintenues rationnellement. Pour lui, *les composantes rotationnelles de courants ne coûtent ni ne fournissent aucune énergie dans les conditions usuelles d'observation: il les envisage comme des «autocourants» entretenus par le milieu conducteur lui-même.*

II. On décrit ici un groupe d'expériences, simples dans leur principe, et dont le but est d'asseoir sur les faits ces conceptions théoriques hétérodoxes que l'on peut aussi condenser dans l'expression suivante (on y fait usage de termes traditionnels aux fins de liaison avec les notions classiques, bien qu'ils cadrent mal avec les idées ici admises): *les forces électromotrices magnétogalvaniques transversales sont au fond proprement thermoélectriques.*

Soit comme exemple explicatif particulièrement simple: un tube métallique cylindrique aimanté en tous ses points normalement à sa surface (polarisation *radiale*, permanente ou maintenue par un champ). Appliquons-lui un champ électrique (-grad V) uniforme, parallèle en tous points aux génératrices du cylindre (champ axial). Il existe alors un courant permanent, à *lignes d'écoulement hélicoïdales*. Choissant comme référentiel le système des génératrices (Ox) et des cercles parallèles (Oy), la densité de courant \vec{J} est la résultante des vecteurs \vec{J}_x entretenu par le champ \vec{E} et \vec{J}_y qui symbolise l'effet Hall.

Passons maintenant sur le cylindre une bobine coaxiale qui constitue avec lui une induction mutuelle, soit un transformateur (mais pour la composante \vec{J}_y seulement). Envoyons enfin suivant Ox (génératrices du cylindre) un courant alternatif. Il est clair alors que le courant secondaire *emprunte de l'énergie au primaire, ce donc par l'intervention exclusive des courants de Hall.*

III. La question capitale est alors celle de la *source première de cette énergie*. Le calcul revient essentiellement à celui de l'expression $W = \vec{E} \cdot \vec{J}$ de la puissance par unité de volume du primaire. Faisant usage d'une seule hypothèse de superposition de vecteurs (d'ailleurs quasi inévitable), on trouve

$$W = J_x^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 (\alpha + \varphi)}$$

forme généralisée d'une loi de JOULE où γ désigne la conductibilité réelle, φ la rotation magnétogalvanique et α l'angle entre le champ électrique réel et la direction Ox ; α exprime l'effet du couplage inductif et peut d'ailleurs être réglé à volonté par injection dans le secondaire d'une f. é. m. alternative convenable.

La discussion de cette expression montre qu'en présence de prélèvement d'énergie ($0 > \alpha > -\varphi$) la *consommation totale d'énergie électrique primaire est plus faible* et continue à diminuer régulièrement jusqu'à son minimum ($\alpha = -\varphi$).

Ainsi l'énergie prélevée ne peut être fournie par la source primaire et on doit raisonnablement conclure qu'elle est *empruntée à la matière même du conducteur primaire soit à son énergie interne*.

Ou encore: *si la force électromotrice de Hall travaille contre un champ d'origine extérieure, elle le fait à l'aide de l'énergie moléculaire; on est donc fondé à la qualifier de thermoélectrique*.

On pourrait imaginer d'autres types d'expériences conduisant au même résultat.

IV. Il convient de relever que le raisonnement n'est lié à aucun mécanisme particulier de la conduction électrique.

Ces déductions sont susceptibles de plus d'une grande extension de leur domaine. On peut en effet montrer que des effets similaires doivent se manifester tout à fait généralement dans des milieux *non aimantés c'est-à-dire dénués de propriétés rotationnelles*; il suffit que la conduction électrique y soit anisotrope, avec une dyssymétrie plus élevée que celle du cube (*dyssymétries translationnelles* cette fois). On peut s'attendre qu'ils puissent même y apparaître *notablement plus intenses qu'en présence d'aimantation*.

On note en terminant que l'effet prévu revenant à une destruction de chaleur, il peut faire entrevoir une nouvelle possibilité de production électrique du froid. — Le détail et d'autres aspects seront exposés dans un article ultérieur in H.P.A.

Über die Umwandlung unverzwilligter BaTiO₃-Kristalle von der kubischen in die tetragonale Phase

von W. KÄNZIG und R. MEIER (ETH. Zürich).

Die Umwandlung der ferroelektrischen BaTiO₃-Kristalle von der kubischen, unpolarisierten in die tetragonale, polarisierte Phase wurde an unverzwilligten Kristallen von ziemlich grosser Reinheit dielektrisch und röntgenometrisch untersucht. Der Curiepunkt liegt bei 119,0° C. Die spontane Polarisation wurde aus Hysteresis-

kurven ermittelt, die nach der Methode von SAWYER und TOWER¹⁾ mit dem Kathodenstrahloszillographen aufgenommen wurden bei Frequenzen von 15 bis 1000 Hz. Die Messungen wurden erst reproduzierbar, nachdem die Curietemperatur bei angelegtem Wechselfelde mehrmals passiert wurde. Erst dann nahmen die ganzen Kristalle an der Hysteresis teil. Die Extinktion der Röntgenstrahlen ist in allen Punkten der Hysteresiskurve innerhalb der



Fig. 1.

Spontane Polarisation und Intensität der Reflexion (020).

Messgenauigkeit (0,25 %) gleich gross. Wenn parallele und antiparallele Domänen vorhanden sind, dann sind dieselben entweder sehr gross, oder an der Grenze zweier Domänen tritt keine Störung des Kristallgitters auf. Letzteres ist aber sehr unwahrscheinlich.

In Fig. 1 ist die Temperaturabhängigkeit der spontanen Polarisation eingezeichnet. Der steile Anstieg mit sinkender Temperatur lässt sich nicht mit einer Langevinfunktion erfassen. Bei

¹⁾ C. SAWYER, C. TOWER, Phys. Rev. **35**, 269 (1930).

Zimmertemperatur beträgt der Wert $(16,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$ Clb/cm². Das Koerzitivfeld steigt ebenfalls steil auf 200 Volt/cm, um dann noch langsam auf 300 Volt/cm bei Zimmertemperatur anzuwachsen.

Der steile Übergang von der unpolarisierten in die spontan polarisierte Phase ist mit beträchtlichen Störungen der Periodizität des Kristallgitters verbunden, welche die Extinktion der Röntgenstrahlen vermindern. Die Intensität der Reflexion (020) steigt bei

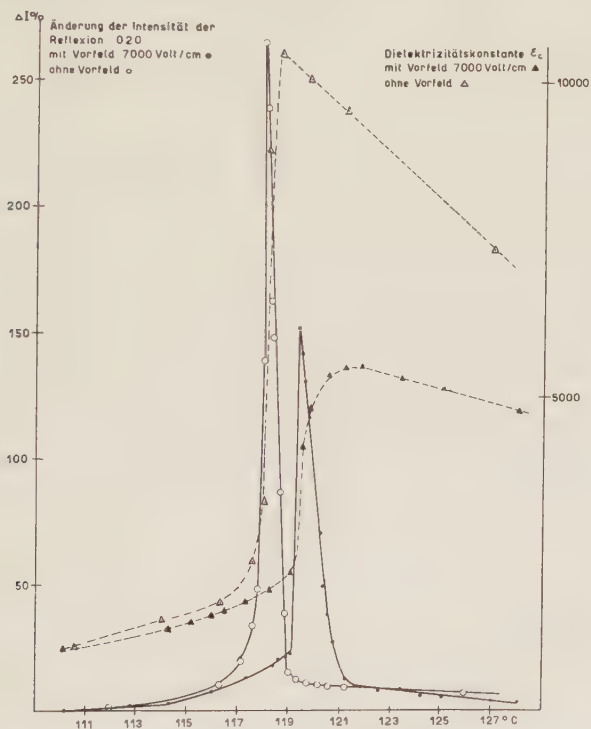


Fig. 2.

Dielektrizitätskonstante ϵ_c und Intensität der Reflexion (020) mit und ohne Vorfeld.

Mo K_α -Strahlung während der Umwandlung auf das 3- bis 4-fache und sinkt nach erfolgter Umwandlung wieder auf normale Werte ab. Die Intensitätsänderung verhält sich qualitativ wie dP/dT (Fig. 1).¹⁾

*) Bei extrem langsamer Variation der Temperatur kann in der Nähe des Maximums in einem Temperaturintervall von einigen $1/100$ Grad noch ein plötzliches Absinken und Wiederansteigen der Intensität beobachtet werden. Der Temperaturfaktor nimmt anomale Werte an, da der Kristall während der Umwandlung kurze Zeit sehr weich wird. Dieser Effekt ist zur Zeit Gegenstand ausgedehnter röntgenometrischer Untersuchungen.

Durch ein Feld von 7000 Volt/cm wird die Spitze der Röntgenintensität um $1,4 \pm 0,1^\circ$ C zu höherer Temperatur verschoben. Zugleich wird sie niedriger und breiter. Der Anstieg der Polarisation ist also bei angelegtem Felde weniger steil und zu höherer Temperatur verschoben. Der genaue Verlauf wird gegenwärtig durch Messung der Dielektrizitätskonstanten mit Vorfeld ermittelt. Fig. 2 zeigt das Ergebnis einer gleichzeitigen Messung der Dielektrizitätskonstanten ϵ_c und der Intensität der Reflexion (020) am selben Kristall, das eine Mal mit Vorfeld, das andere Mal ohne.

Bandenspektren von Borfluorid (BF) im Schumanngebiet

von M. CHRÉTIEN und E. MIESCHER (Basel).

Seit langem kennt man im sichtbaren und ultravioletten Spektralgebiet liegende Bandenspektren des BF-Moleküls. Sie bilden, soweit sie analysiert sind, Tripletsysteme $b\ ^3\Sigma \rightarrow a\ ^3\Pi$ und $c \rightarrow a\ ^3\Pi$; die Konstanten der Terme a , b und c sind in Tabelle 1 enthalten¹⁾. Sowohl die Moleküle BCl und BBr, als auch die mit BF isoelektronischen Moleküle CO und N₂ haben einen $^1\Sigma$ -Grundzustand und einen Π -Term als niedrigsten angeregten Singulettzustand. Man mußte deshalb annehmen, daß das Hauptsystem $^1\Pi - ^1\Sigma$ des BF-Moleküls bisher der Beobachtung entgangen war.

Tabelle 1.

Molekülkonstanten des B¹¹F in cm⁻¹.

Zustand	ν_e	ω_e	$\omega_e x_e$	B_e	α	$D \cdot 10^6$	r_e in Å
$c^1)$	$x + 38651,4$						
$b^1)$ $^3\Sigma$	$x + 31870,0$	1631,40	23,10	1,634	0,020	4,2	1,217
$a^1)$ $^3\Pi$	x	1323,64	9,40	1,412	0,018		1,309
D $^1\Pi$	72140	(1696)	(14)				
C $^1\Sigma$	69010,1	1603,0	13,7				
B $^1\Sigma$	65334,8	1692,7	12,7	1,66			1,20
A $^1\Pi$	51150,1	1271,4	14,9	1,42	0,02	7,1 ⁺	1,31
X $^1\Sigma$	0	1399,8	11,3	1,52	0,02	7,1 ⁺	1,26

$$+ \text{ Berechnet aus } D = \frac{4 B^3}{\omega^2}$$

¹⁾ H. M. STRONG und H. P. KNAUSS, Phys. Rev. **49**, 740 (1936); F. W. PAUL und H. P. KNAUSS, Phys. Rev. **54**, 1072 (1938).

Unter Benützung eines 1 m-Vakuumgitterspektrographen mit 8,3 Å/mm Dispersion in erster Ordnung wurde das Spektrum einer Entladung in Helium von ca. 5 mm Druck, dem BF_3 -Gas zuge-mischt war, aufgenommen. Das Helium zirkulierte in einem Kreis-lauf, wo es mittels Aktivkohle, die auf der Temperatur der flüssigen Luft gehalten war, fortwährend gereinigt wurde. Die so auf Ilford Q 1-Platten erhaltenen Spektren zeigen im Gebiet von 2100–1900 Å äusserst intensiv das gesuchte Spektrum vom Typus ${}^1\Pi - {}^1\Sigma$, dessen Zuordnung zum Molekül BF und dessen Vibrationsanalyse durch die beobachteten Isotopendublette $B^{11}\text{F} - B^{10}\text{F}$ leicht und ein-deutig vorgenommen werden können. Aus etwa 30 vermessenen Q -Kanten der rotabschattierten Banden sind die in Tabelle 1 ent-haltenen Konstanten der $X^1\Sigma$ - und $A^1\Pi$ -Terme berechnet. Die Spektrogramme enthalten ferner im kürzerwelligen Teil weitere neue wohlausgebildete, durch die Isotopenaufspaltung ebenfalls sicher dem BF -Molekül zuzuordnende Bandensysteme $B-X$ (1630–1480 Å), $C-X$ (1520–1400 Å) und $D-X$ (1390–1340 Å), welche alle violett abschattiert sind. Alle enthalten die Grundfrequenz 1400 cm^{-1} des BF -Moleküls. Tabelle 1 gibt auch die Vibrations-konstanten der B -, C -, D -Terme. Aus dem Fehlen von Q -Zweigen in den Systemen $B-X$ und $C-X$ schliesst man auf den Σ -Charakter der B - und C -Terme. Das Termschema des BF -Moleküls erweist sich, wie zu erwarten, nunmehr völlig analog dem wohlbekannten Schema des ebenfalls 14 Elektronen enthaltenden CO -Moleküls; allerdings bleibt die Lage der Tripletterme, da keine Interkombi-nation beobachtet ist, vorläufig unbestimmt¹⁾.

Aufnahmen des $A-X$ -Systems, welche unter Benutzung einer einfachen Vorzerlegung in der 2. Ordnung des Gitters mit einer Dispersion von 4,2 Å/mm gewonnen wurden, gestatteten die teil-weise Auflösung der Rotationsstruktur einiger der BF -Banden. Es gelingt, obwohl die einzelnen Zweige einer Bande nur streckenweise aufgelöst sind, eindeutig die J -Numerierung zu finden. So sind für fünf Banden (v' , $v'' = 0,1; 2,1; 3,1; 3,2; 4,2$) 4 Werte $B_{v'}$ des $A^1\Pi$ - und 2 Werte $B_{v''}$ des $X^1\Sigma$ -Zustandes ermittelt worden. Aus ver-schiedenen Banden erhaltene Werte des gleichen B_v stimmen inner-halb der Messgenauigkeit überein. Tabelle 1 enthält die aus den B_v -Werten berechneten Rotationskonstanten der neuen BF -Terme, zusammen mit den entsprechenden Konstanten der Tripletterme. Die beiden Π -Terme verschiedener Multiplizität stimmen in ihren Konstanten nahezu überein und zeigen eine auffallende Lockerung der Bindung im Vergleich zu den höher angeregten Σ -Termen.

¹⁾ M. CHRÉTIEN und E. MIESCHER, Nature **163**, 996 (1949).

Eine ausführliche Arbeit, welche demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen wird, enthält ins Einzelne gehende Angaben über die neuen BF -Spektren und eine vergleichende Diskussion der Bindungsenergien in den zweiatomigen (BX) und vieratomigen (BX_3) Borhalogeniden.

Neue Bandenspektren der zweiatomigen Bleihalogenide

VON K. WIELAND und R. NEWBURGH (Zürich).

Die zweiatomigen Radikale PbF , $PbCl$ und $PbBr$ besitzen im sichtbaren Spektralgebiet nach Rot abgeschattigte Bandenspektren (Systeme A), die von MORGAN¹⁾ (in Emission) und von ROCHESTER²⁾ (in Absorption) analysiert worden sind. ROCHESTER³⁾ hat ferner bei PbF , teils in Emission, teils in Absorption, mehrere ultraviolette Systeme (B , C , D , E und F) gefunden.

Wir konnten nun in Absorption, unter Verwendung sehr kleiner, in Quarzrohre eingewogener Substanzmengen von PbX_2 , auch bei $PbCl$, $PbBr$ und PbJ ultraviolette Bandensysteme auffinden, die offensichtlich System B von PbF entsprechen. In Emission, andeutungsweise auch in Absorption, liess sich ferner bei PbJ das bisher fehlende System A photographieren⁴⁾. Die Kantenformeln mit $u = v + \frac{1}{2}$) dieser neuen Bandenspektren lauten

a) für die Systeme B (nach Violett abgeschattiert):

$$PbCl^{35}: \quad \nu = 35199 + 382,1 u' - 1,05 u'^2 \quad u' \quad 0-13 \\ \quad \quad \quad - 304,2 u'' + 0,89 u''^2 \quad u'' \quad 0-6$$

$$PbBr^{79}: \quad \nu = 34523 + 258,2 u' - 0,6 u'^2 \quad u' \quad 0-9 \\ \quad \quad \quad - 207,5 u'' + 0,5 u''^2 \quad u'' \quad 0-9$$

$$PbJ: \quad \nu = 33488 + 198,7 u' - 0,35 u'^2 \quad u' \quad 0-14 \\ \quad \quad \quad - 160,5 u'' + 0,25 u''^2 \quad u'' \quad 0-9$$

b) für System A (nach Rot abgeschattiert):

$$PbJ: \quad \nu = 20528,5 + 142,0 u' - 1,5 u'^2 \quad u' \quad 0-17 \\ \quad \quad \quad - 160,5 u'' + 0,25 u''^2 \quad u'' \quad 0-36$$

Die letzte Formel ist in bezug auf die u' -Numerierung bis auf 1 oder 2 Einheiten unsicher.

Die Banden der Systeme B weisen, ähnlich wie beim entsprechenden System von PbF ³⁾, teilweise grosse Unschärfe und auch einige starke Vibrationsstörungen auf, was sich auf Prädissoziation (Fall c nach HERZBERG⁵⁾) zurückführen lässt. Das erklärt auch, dass es uns nicht gelungen ist, diese Spektren in Emission zu erregen.

Durch Vergleich aller Systeme A und B der vier Moleküle PbX (X – Halogenatom), unter Berücksichtigung der oben erwähnten Prädissoziationserscheinungen bei den Systemen B , ergibt sich beinahe zwangsläufig, dass der Grundzustand (2II) in normale Atome Pb ($2p, ^3P_0$) + X ($^2P_{3/2}$), der obere Zustand ($^2\Sigma$) von B in Pb ($2s, ^3P_1$ 35285 cm^{-1}) + X ($^2P_{3/2}$) und der die Prädissoziation verursachende Zustand (Abstossungskurve $^2\Sigma$) in Pb ($2p, ^3P_1$ 7817 cm^{-1}) + X ($^2P_{3/2}$) dissoziieren muss. Die Richtigkeit dieser Zuordnung vorausgesetzt lassen sich dann die Dissoziationsenergien D_0 auf mindestens 5% genau festlegen. Man erhält so jeweils für den Grundzustand (2II) folgende Werte D_0'' in kcal/Mol:

PbF: 80,0 PbCl: 72,0 PbBr: 68,5 PbJ: 65,5 kcal/Mol.

Die so erhaltenen Werte weichen beim Bromid und Jodid merklich von den aus der Bandenkonvergenz extrapolierten ab.

Literatur.

- 1) F. MORGAN, Phys. Rev. **49**, 47 (1936).
- 2) G. D. ROCHESTER, Proc. Roy. Soc. London **153**, 407 (1936).
- 3) G. D. ROCHESTER, Proc. Roy. Soc. London **167**, 567 (1938).
- 4) Inzwischen auch von P. T. RAO, Curr. Sci. **18**, 8 (1949) beobachtet.
- 5) G. HERZBERG, Erg. d. exakt. Naturwiss. **10**, 241 (1931).

Temperaturabhängigkeit der Gesamtabsorption von Joddampf (J_2)

VON P. SULZER UND K. WIELAND (Zürich).

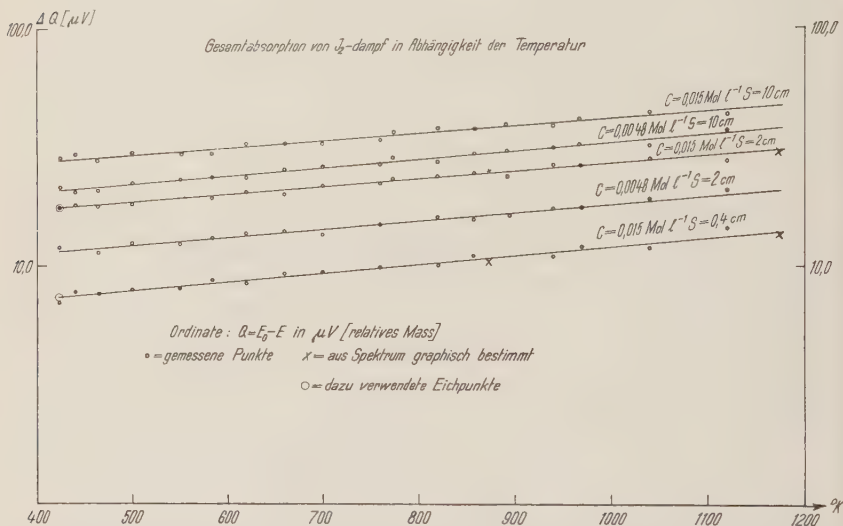
Joddampf (J_2) bildet, infolge seiner Temperaturbeständigkeit und seiner einfachen Absorptionsverhältnisse (ausgedehntes Absorptionsspektrum im sichtbaren Spektralgebiet, kein infrarotes Vibrations- und Rotationsspektrum), eine recht geeignete Substanz, um an ihr, unter Konstanthalten der Molekülzahl, die Temperaturabhängigkeit der absorbierten Lichtenergie zu studieren. Ausser Messungen der spektralen Intensitätsverteilung werden hier auch Messungen der totalen (spektral unzerlegten) Absorption aufschlussreich sein, da, unter Verwendung eines Planck'schen Strahlers als Lichtquelle, die im U. V.-Gebiet absorbierte (hier nicht interessierende) Energie nicht mehr ins Gewicht fällt.

Als Lichtquelle diente eine stabilisierte Wolframbandlampe (L), deren spektrale Intensitätsverteilung bei Kenntnis der Temperatur $T_L \cong 2600^\circ K$ mit Hilfe der Planck'schen Formel angenähert bekannt ist. Die Jodmenge (Konzentration c) befand sich in einem Quarzgefäß (Schichtdicke s) eingeschmolzen. Die Messung der gesamten, bei der Temperatur T absorbierten Energie $Q_T = (E_0 - E)_T$

(E_0 - einfallende, E - austretende Energie in relativen Einheiten) erfolgte mittels einer Moll'schen Thermosäule. Für die Ermittlung des natürlichen, molaren Absorptionskoeffizienten

$$k_{\nu, T} = \frac{1}{c \cdot s} \ln \frac{I_0}{I_{\nu}}$$

über den Spektralbereich γ 9000 Å bis 4000 Å wurde die Sektorermethode von HALBAN¹⁾ in Verbindung mit einem Zwei-Prismen-Glasspektrographen benützt.



Der Zusammenhang zwischen der integralen Energie Q_T (in rel. Einheiten) und der monochromatischen Absorption (in %)

$$A_{\nu, T} = \frac{I_{0\nu} - I_{\nu}}{I_{0\nu}} = 1 - e^{-k_{\nu, T} \cdot c \cdot s}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der spektralen Intensitätsverteilung der Wolframbandlampe durch

$$Q_T \sim \int \left[\frac{J_{\nu, T_L}^{\max}}{J_{\nu, T_L}} \cdot A_{\nu, T} \right] d\nu$$

wo J_{ν, T_L} = Intensität der Lampe an Stelle ν und J_{ν, T_L}^{\max} -- Intensitätsmaximum ($\nu = \nu_{\max}$) bei konstanter Lampentemperatur T_L bedeuten.

¹⁾ HR. HALBAN, G. KORTUM und B. SZIGETI, Z. El. Ch. **42**, 628 (1936).

Das Ergebnis unserer, in beigegebener Figur dargestellten Messungen zeigt zunächst eine gute (relative) Übereinstimmung der integral gemessenen Werte Q_T (o in Figur) mit den wenigen aus $A_{\nu,T}$ gewonnenen Werten (x in Figur). Ganz allgemein finden wir *eine erhebliche Zunahme der absorbierten Energie mit steigender Temperatur, bei konstanter Molekühlzahl*, wobei die oberhalb etwa 700°C merklich werdende Dissoziation der J_2 -Moleküle durch Korrektur berücksichtigt worden ist.

Wir haben auch auf Grund unserer spektralen Messungen die Absorptionsstärke

$$\int (k_{\nu,T}) d\nu$$

des sichtbaren Absorptionsspektrums von J_2 ermittelt, worüber in Zusammenhang mit ähnlichen Messungen an Brom und Chlor später berichtet werden soll.

Un cas particulier d'inhibition de fluorescence

par E. BANDERET (Mulhouse).

Le but de la présente communication est de donner une explication des courbes de fluorescence¹⁾ obtenues en ajoutant à des solutions de colorants faiblement ionisés des inhibiteurs à longues chaînes faiblement dissociés. Une étude plus complète nous a permis de montrer que, contrairement à notre première supposition, la forme des courbes intensité de fluorescence I_{fl} — concentration de l'inhibiteur C_i était due à l'apparition de nouveaux corps.

En faisant l'analyse chromatographique d'une solution de rhodamine et de gardinol par exemple, on observe à la partie supérieure de la colonne d' Al_2O_3 une bande étroite grenat dont la largeur augmente avec la concentration C_i . Cette bande a une luminescence intense sensiblement identique à celle du colorant. La courbe expérimentale peut être considérée comme une résultante d'une courbe d'inhibition ordinaire asymptotique à l'axe des concentrations et d'une autre courbe due au nouveau corps et croissant fortement avec la concentration.

On combinera des colorants et des inhibiteurs de signes opposés: Rhodamines, orangé d'acridine, sulfate de quinine (ions colorés +) avec: Gardinol, sels sodés des acides gras à partir de 12C (ions —); Uranine, éosine (ions +) avec sapamine (ions —).

¹⁾ Helv. Phys. Acta **10**, 259 (1937).

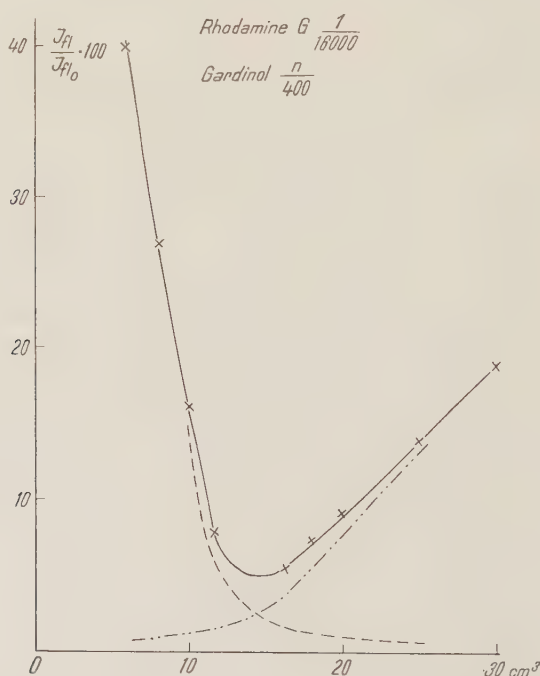
Nous avons trouvé les trois cas suivants:

1. Effet inhibiteur et nouveau corps fluorescent: courbe avec minimum rhodamines-gardinol ou palmitate et laurate de Na, orangé d'acridine-gardinol, sulfate de quinine-gardinol, uranine-sapamine, éosine-sapamine.

2. Effet inhibiteur et nouveau corps non-fluorescent: courbe asymptotique orangé d'acridine-palmitate et laurate.

3. Effet inhibiteur sans apparition d'un nouveau corps: courbe asymptote. Rhodamines et orangé d'acridine-stéarate de Na (temp. ordin.).

Les solutions présentant des minima ont été étudiées au point de vue conductométrique. Elles montrent plus ou moins nettement des changements dans l'allure des courbes aux concentrations des minima. (J. HINCKY.)



Les spectres d'absorption dans le visible établis au moyen d'un spectrophotomètre d'Arsonval montrent un très léger déplacement des maxima d'absorption par l'addition des inhibiteurs. En général les ions actifs positifs déplacent les maxima vers le violet, et les ions négatifs vers le rouge. (M. HAAB.)

Ces séries de mesures confirment la présence d'un nouveau corps.

Les questions chimiques se rapportant à la nature des substances formées, au rôle que pourraient jouer des impuretés dans les substances utilisées ont été écartées de notre étude, n'étant pas importantes dans l'interprétation des courbes observées.

Sur le calcul du dichroïsme moléculaire

par S. NIKITINE (Alexandrie et Zurich).

L'expérience montre que les molécules absorbent la lumière d'une façon anisotrope: leur probabilité d'excitation dépend de l'orientation de directions privilégiées, fixées à l'édifice de la molécule, par rapport au vecteur électrique de la lumière. Cette propriété a reçu le nom de «dichroïsme moléculaire»; on peut l'étudier au moyen du photodichroïsme^{1) 2)}.

Si ox , oy , oz sont les directions optiques privilégiées d'une molécule, le dichroïsme moléculaire se traduit par l'inégalité des carrés des moments de transition:

$$\mathfrak{M}_x = \int \psi_n x \psi_m d\tau; \quad \mathfrak{M}_y = \int \psi_n y \psi_m d\tau; \quad \mathfrak{M}_z = \int \psi_n z \psi_m d\tau \quad (1)$$

relatifs à la transition d'un état quantique n à un état quantique m , caractérisés par les fonctions propres ψ_n et ψ_m .

Récemment une méthode a été indiquée^{3) 4)} pour le calcul des fonctions propres relatives à de nombreuses molécules organiques, plus particulièrement pour celles qui comportent une chaîne de doubles et simples liaisons en résonance. On admet que les électrons π qui forment la deuxième liaison de la double liaison se comportent comme des électrons métalliques pouvant se déplacer le long de la chaîne en résonance. Dans l'approximation de SOMMERFELD du modèle d'électrons métalliques on calcule facilement les fonctions propres des électrons π . Ces fonctions s'étendent le long de la chaîne et sont relativement peu étendues suivant des directions normales à celle-ci.

Les molécules en question sont généralement planes et la chaîne a la forme d'une ligne brisée. Prenons une variable curviligne ξ le long de cette ligne et les variables η et ζ suivant deux directions normales à ξ ; ξ et η seront dans le plan de la molécule. Prenons d'autre part un système de coordonnées cartésien $oxyz$ et supposons la molécule dans le plan oxy . Nous prendrons pour direction ox celle suivant laquelle la projection de la chaîne brisée est la plus grande.

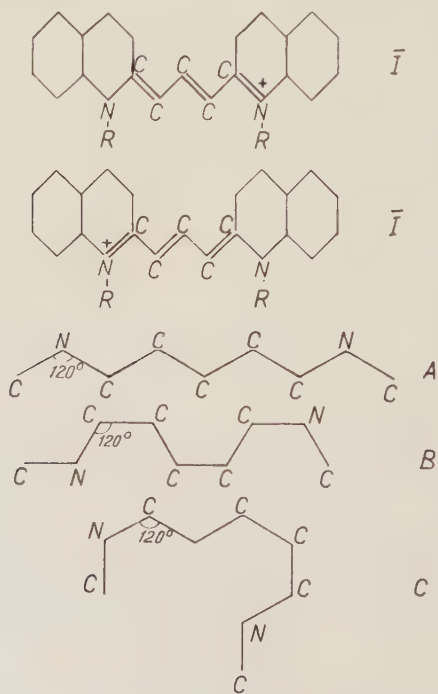
On montre que l'état normal et le premier état excité d'une molécule sont caractérisés par des fonctions propres de la forme:

$$\Psi_1 = \psi_n(\xi) \varphi_1(\eta) \chi_1(\zeta) \quad \text{et} \quad \Psi_{n+1} = \psi_{n+1}(\xi) \varphi_1(\eta) \chi_1(\zeta). \quad (2)$$

Les états excités relatifs à φ et χ sont beaucoup plus élevés. On démontre que l'on peut écrire d'une façon approchée:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \int \psi_n(\xi) \varphi_1(\eta) \chi_1(\xi) \cdot x(\xi, \eta, \zeta) \cdot \psi_{n+1}(\xi) \varphi_1(\eta) \chi_1(\zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int \psi_n(\xi) \cdot \bar{x}(\xi, 0, 0) \psi_{n+1}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

et deux expressions analogues pour \mathfrak{M}_y et \mathfrak{M}_z . Dans cette expression $\bar{x}(\xi, 0, 0)$ est une valeur moyenne de $x(\xi, \eta, \zeta)$, prise pour $\eta = \zeta = 0$.



La chaîne de doubles liaisons en résonance peut prendre diverses formes. Nous avons représenté sur la figure les deux structures extrêmes en résonance du pinacyanol; en A nous avons représenté la ligne brisée à laquelle nous assimilons la chaîne du pinacyanol dans sa forme all trans, en B la forme all cis et en C une forme ramassée qui, si elle existe, n'est pas complètement plane. Nous supposons que la chaîne est encore plane.

On voit que pour ces formes les fonctions $\bar{x}(\xi)$, $\bar{y}(\xi)$ et $\bar{z}(\xi)$ ne sont généralement pas uniques le long de toute la chaîne, sauf pour A . Pour chaque segment de la chaîne il y a lieu de prendre la transformation correspondante $\bar{x}_k(\xi)$, $\bar{y}_k(\xi)$ et $\bar{z}_k(\xi)$. Ainsi il y a lieu de remplacer les intégrales (3) par des sommes d'intégrales étendues chacune à un segment seulement:

$$\mathfrak{M}_x = \sum_k \int_k^{k+1} \psi_n(\xi) \cdot \bar{x}_k(\xi) \psi_{n+1}(\xi) d\xi \quad (4)$$

et des expressions analogues pour \mathfrak{M}_y et \mathfrak{M}_z .

Le calcul de ces intégrales a montré pour les trois formes de la figure les résultats suivants, L étant la longueur totale de la chaîne en admettant avec BAYLISS 6 électrons libres, $n = 3$, $\Delta n = 1^5$) pour la chaîne considérée.

Forme A , all-trans:

$$\mathfrak{M}_x = 0,17 L; \quad \mathfrak{M}_y = 0; \quad \mathfrak{M}_z = 0$$

Forme B , all-cis:

$$\mathfrak{M}_x = 0,15 L; \quad \mathfrak{M}_y = 0,01 L; \quad \mathfrak{M}_z = 0$$

Forme C :

$$\mathfrak{M}_x = 0,1 L; \quad \mathfrak{M}_y = 0,05 L; \quad \mathfrak{M}_z \text{ petit.}$$

Les deux premières formes correspondent pratiquement à des oscillateurs linéaires. L'expérience montre que le dichroïsme dans la première bande du pinacyanol est très grand au bord rouge de la bande, mais qu'il diminue fortement dans le bleu¹). Cette variation s'explique si on admet que les divers isomères ont des courbes d'absorption légèrement décalées les unes par rapport aux autres. La forme A aurait la bande d'absorption la plus décalée vers le rouge, les formes ramassées, telles que C , auraient des bandes d'absorption décalées vers le bleu. Ces suppositions concordent avec les faits généralement admis. Il y a lieu de remarquer que nous n'avons pas considéré les changements d'états de vibrations des molécules qui pourraient influencer le dichroïsme.

La théorie exposée dans cette communication démontre que les molécules que nous avons étudiées expérimentalement *doivent être dichroïques*. Elle donne une relation entre leur structure et leur dichroïsme et suggère une explication de la variation du bleu au rouge du dichroïsme dans une bande d'absorption. Les applications de cette théorie peuvent être étendues, mais il y a lieu de ne pas perdre de vue le caractère schématique du modèle adopté.

Littérature.

¹⁾ S. NIKITINE, C. R. **204**, 973 (1937); **206**, 1219 (1938); **207**, 331, 462 (1938); **208**, 805 (1939); **213**, 32 (1941), exposé d'ensemble: Ann. de Physique **15**, 276 (1941); J. de Phys. **3**, 203 (1942).

²⁾ G. LEWIS et collab. J. A. C. S. **63**, 3005, 3232 (1941); **64**, 1774, 1916, 2801 (1942); **65**, 502, 2102, 2107, 2419, 2424 (1943); **66**, 2100 (1944).

³⁾ N. S. BAYLISS, J. of Chem. Phys. **16**, 287 (1948).

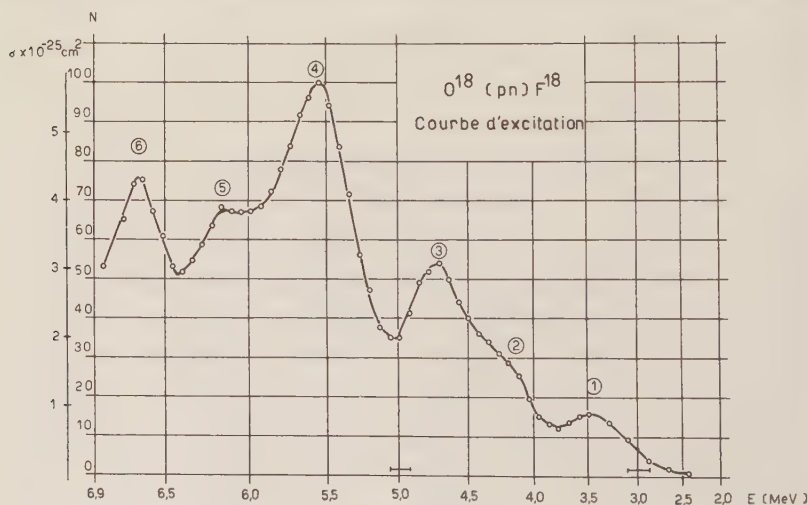
⁴⁾ H. KUHN, H. C. A. XXXI, 1441 (1948); Zs. f. El. Chem. **53**, 165 (1949).

⁵⁾ H. KUHN admet 8 électrons pour le même modèle⁴⁾.

Fonction d'excitation de la réaction $O^{18}(p, n)F^{18}$

par J.-P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER, P. PREISWERK et P. SCHERRER
(EPF. Zurich).

L'isotope 18 du fluor (112 min.) peut être obtenu par réaction (p, n) à partir de l'oxygène 18. Il se désintègre par émission de positrons ayant une énergie maximum de 635 keV¹⁾. En irradiant de la muscovite (mica au potassium $Si_3Al_3KH_2O_{12}$) on peut obtenir une forte source de F^{18} , quoique l'abondance relative de l' O^{18} ne soit que de 0,204%. Les autres éléments constitutifs de la muscovite ne



donnent aucune activité de période et d'intensité comparables à celle du F^{18} .

Ces sources ont le grand avantage de se présenter sous forme de feuilles minces et uniformes, ce qui rend possible la mesure de la fonction d'excitation à la réaction (p, n) au moyen de la méthode des feuilles superposées.

¹⁾ J.-P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER, Phys. Rev. **75**, 1953 (1949).

Le faisceau de protons émergeant du dispositif de déflexion du cyclotron traverse un monochromateur qui sera décrit ultérieurement. Les protons, dont l'énergie primaire est de 6,9 MeV, tombent sur une pile de feuilles de mica ayant chacune l'épaisseur de 7,0 μ . Chaque feuille est ainsi irradiée par des protons ayant subi l'absorption des feuilles précédentes.

La courbe d'excitation est mesurée en déterminant l'activité engendrée dans chacune des feuilles. Des points intermédiaires peuvent être trouvés en plaçant devant la pile de feuilles un absorbant correspondant, quant au pouvoir d'arrêt, à une feuille de demi-épaisseur.

Le pouvoir d'arrêt de la muscovite a été comparé, dans différents domaines de l'énergie, à celui de l'aluminium. Les formules de BETHE¹⁾ permettent de calculer l'énergie du faisceau à son passage par une feuille donnée.

La courbe d'excitation que nous avons obtenue présente six résonances dans le domaine étudié. Les sections efficaces ont été déterminées à partir du courant de protons et de l'activité absolue des feuilles. Elles sont exactes à 20% près environ. Dans le tableau suivant qui résume les résultats, nous donnons également les énergies d'excitation du noyau intermédiaire, F¹⁹:

Résonance	Energie des protons	Section efficace	Energie d'excitation du F ¹⁹
1	3,5 MeV	0,9 · 10 ⁻²⁵ cm ²	11,4 MeV
2	(4,2)	(1,8)	(12,1)
3	4,70	3,1	12,6
4	5,55	5,7	13,4
5	6,13	3,9	13,9
6	6,65	4,3	14,4

La résonance 1 a déjà été trouvée par DU BRIDGE, BARNES, BUCK et STRAIN²⁾, en bon accord avec nos résultats.

La courbe d'excitation permet, en tenant compte du straggling, de situer le seuil de la réaction à 2,5 MeV, ce qui concorde avec la valeur calculée d'après la limite supérieure du spectre de positrons émis par le F¹⁸:

$$Q' = \{m_e c^2 + (m_N - m_P) + E_{\max}^{\beta+}\} \left(1 + \frac{m_P}{m_{O^{18}}}\right) = -2,55 \text{ MeV.}$$

¹⁾ M. LIVINGSTON and H. BETHE, Rev. Mod. Phys. **9**, 262 (1937).

²⁾ L. A. DU BRIDGE, S. W. BARNES, J. H. BUCK and C. V. STRAIN, Phys. Rev. **53**, 447 (1938).

Die Verteilung der thermischen Neutronen in der Umgebung der Kante eines Cadmium-Blechtes

von DILSCHAD T. ELBRUS und K. ZÜBER (Istanbul).

1. Die Verteilung der thermischen Neutronen in einem Moderator wird bestimmt durch die Verteilung der Bremswege der von einer Neutronenquelle emittierten schnellen Neutronen und durch die Diffusion der langsamen Neutronen. Um die Diffusion allein zu bestimmen, verwendet man ausgedehnte, Neutronen absorbierende Substanzen und bestimmt die Neutronendichten ohne und mit dieser Substanz im Moderator. Die Kurve für die Differenzen der beiden Messungen, gebildet für gleiche Punkte, zeigt dann den Einfluss der Diffusion¹⁾. Charakterisiert wird die Diffusion durch die Diffusionslänge, welche angibt, wie weit ein Neutron im Mittel diffundiert, bevor es durch einen Kern des Moderators eingefangen wird. Sie beträgt für Paraffin $2,1 \text{ cm}^1$).

Sehr schön ist die Diffusion in der Umgebung der Kante eines Cadmium-Blechtes zu sehen. Diese Anordnung ist für experimentelle Fragen von Bedeutung, da sie bei jeder Neutronenbestimmung bis zu einem gewissen Grade realisiert ist, falls der Detektor die Neutronen merklich absorbiert und er nicht sehr klein ist.

2. Wir haben eine zylindrische Anordnung gewählt. In der Achse eines Paraffinzylinders von 7 cm Durchmesser befand sich in mittlerer Höhe die Ra-Be-Neutronenquelle (80 mg Ra). In gleicher Höhe mit ihr war auf der Zylinderfläche ein 0,1 mm dicker, beidseitig mit 0,05 mm dicker Al-Folie bedeckter Goldstreifen als Detektor befestigt. Das zylindrisch gebogene Cd-Blech ($15 \times 15 \text{ cm}^2$) wurde derart am Zylinder angebracht, dass ein Stück des Streifens vom Cd nicht abgedeckt wurde. Ein kleiner Teil des vor dem Cd-Blech liegenden Streifens war auch auf der Quellenseite durch Cd abgedeckt und diente somit zur Registrierung der schnellen Neutronen. Das Ganze passte in die Bohrung eines grossen Hohlzylinders aus Paraffin.

3. Die Wahl von Gold als Detektor der Neutronen geschah aus folgenden Gründen: Um die in der Umgebung der Kante sich rasch ändernden Neutronendichten messen zu können, müssen entweder sehr kleine Sonden verwendet werden, oder es müssen bei einer grösseren Sonde die Aktivitäten kleiner Flächenelemente gemessen werden. Bei der Messung steht somit auf alle Fälle nur eine kleine Fläche zur Verfügung. Damit man die für die Messung benötigte Anzahl von β -Strahlen erhält, ist es zweckmässig, ein Material für

¹⁾ E. AMALDI und E. FERMI, Phys. Rev. **50**, 899 (1936); A. BERTHELOT, R. COHEN und H. RECH, C. R. **225**, 406 (1947).

den Detektor zu wählen, das eine passend grosse Halbwertszeit besitzt, da bei gegebenem Neutronenfluss und Neutronenabsorption durch den Detektor die Zahl der entstandenen radioaktiven Kerne bei genügend langer Aktivierungszeit proportional der Halbwertszeit ist. Das durch den Fermiprozess entstehende Au^{198} besitzt eine Halbwertszeit von 2,69 Tagen¹⁾. Da der Wirkungsquerschnitt für

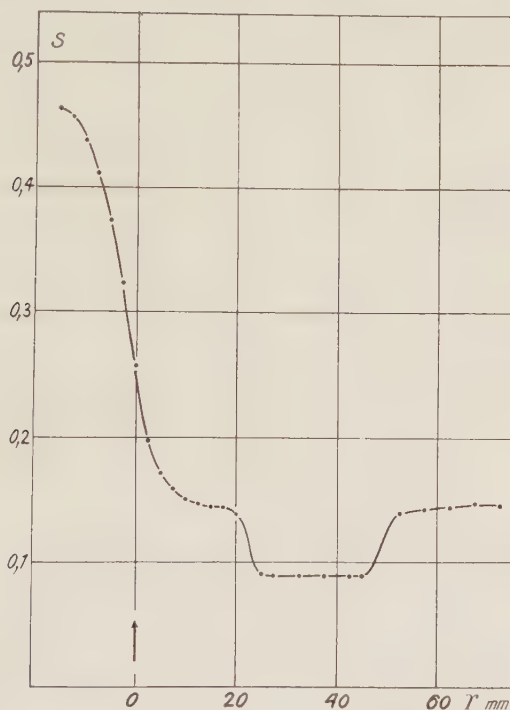


Fig. 1.

Verlauf der gemessenen Schwärzungen S .

Die Lage der Kante des Cd-Blechtes ist durch einen Pfeil markiert.

den Fermiprozess für thermische Neutronen recht beträchtlich ist (96 barns²⁾), vermag Gold selbst bei geringen Neutronenflüssen eine beträchtliche Aktivität zu akkumulieren³⁾. Um diese Aktivität bei der Messung ausnützen zu können, muss eine Messmethode verwendet werden, welche zuverlässig über mehrere Tage die emittierte Strahlung zu integrieren vermag. Bequem und sicher ist hierfür die Autoradiographie, da bei Gold keine pseudophotographischen Ef-

¹⁾ D. SAXON und R. HELLER, Phys. Rev. **75**, 909 (1949).

²⁾ L. SEREN, H. FRIEDLANDER und S. TÜRKEL, Phys. Rev. **72**, 888 (1947).

³⁾ K. ZUBER, Helv. Phys. Acta **21**, 366 (1948).

fekte auftreten. Der aktivierte Streifen wurde beidseitig mit je zwei Röntgenfilmen bedeckt und wirkte auf diese während einer Woche ein. Man erhält nach der Entwicklung bei einem einzigen Versuch vier Filme, deren Schwärzungen sich bequem messen lassen. Verwendet wurde ein 0,6 mm schmaler und 2 mm hoher Lichtfleck im Photometer. Die Anordnung besaß somit ein gutes Auflösungsvermögen, auch wenn man berücksichtigt, dass die β -Strahlen nicht senkrecht auf den Film fallen¹⁾. Es sei bemerkt, dass der Streifen

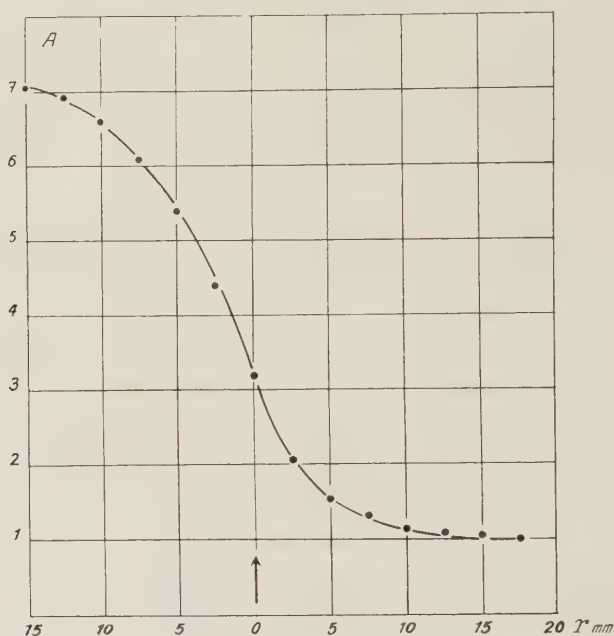


Fig. 2.

Verlauf der Aktivitäten A , hervorgerufen durch die thermischen Neutronen (in willkürlichen Einheiten).

die thermischen Neutronen mit weniger als 10% absorbiert, so dass er die Neutronenverteilung nur unwesentlich stört.

4. Die gemessenen Schwärzungen eines Films sind in der Fig. 1 als Ordinate, der Abstand von der Kante als Abszisse aufgetragen. Die Einsenkung zwischen 25 und 50 mm entspricht dem beidseitig mit Cd abgedeckten Teil des Streifens, die Schwärzung hier ist ein Mass für die schnellen Neutronen, die bei der zylindrischen Anord-

¹⁾ Für Einzelheiten und weitere Anwendungen der Autoradiographie auf Neutronenverteilungen sei auf die ausführliche Arbeit des einen von uns (D. T. ELBRUS) hingewiesen, welche in der Rev. Fac. Sci. Université Istanbul erscheinen wird.

nung überall die gleiche Intensität haben. Zieht man von der gemessenen Schwärzung den Beitrag der schnellen Neutronen ab, so erhält man Fig. 2, welche die Verteilung der thermischen Neutronen allein wiedergibt. Für grosse Entfernungen von der Kante ist ihr Fluss willkürlich eins gesetzt worden. Es ist aus den Figuren ersichtlich, dass vor dem Cd-Blech bis in die Nähe von etwa 2 cm der Kante der Fluss der thermischen Neutronen konstant ist. Er besteht aus Neutronen, welche im Innenzylinder auf die thermische Energie gelangt sind. Nähert man sich der Kante, so diffundieren aus dem Aussenzylinder stammende Neutronen an diese Stellen. An der Kante selbst ist der Fluss über dreimal so gross wie vor dem Blech. Von der Kante weg nimmt der Neutronenfluss weiter zu, weil das Blech das Hin- und Herdiffundieren von einem Zylinder in den andern immer weniger stört. In grosser Entfernung müsste der Fluss den konstanten Wert besitzen, den man auch ohne jedes Cd feststellt. In unserer zylindrischen Anordnung nähert man sich aber der zweiten Kante des Bleches, so dass dieser Endwert nicht erreicht wird. Die Kurven zeigen, dass die Übergangsgebiete beidseitig der Kante eine Ausdehnung von einigen Zentimetern haben, doch ist der Abfall vor dem Blech besonders stark.

Das Isomer des Technetiums 99

von H. MEDICUS, D. MAEDER und H. SCHNEIDER (ETH. Zürich).

Die Übergangsenergie des Isomers des Tc^{99} mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden war bisher zu 136 keV angenommen worden, da ausser den zu dieser Energie gehörenden Konversionselektronen des Tc^{99} keine weiteren Elektronenlinien beobachtet worden waren, die mit der genannten Halbwertszeit abfielen¹⁾.

Wir haben in der BEPO-Pile in Harwell fünf Tage lang Molybdänoxid mit langsamen Neutronen bestrahlen lassen und erhielten dabei das radioaktive Mo-Isotop Mo^{99} , das sich mit einer Halbwertszeit von 67 Stunden durch β -Zerfall grossenteils in das Tc-Isomer umwandelt. Absorptionsmessungen der β - und der γ -Strahlung am abgetrennten Tc, sowie die Ausmessung der Konversions- und Photoelektronen im β -Spektrometer ergaben, dass die oben erwähnte γ -Linie, deren genaue Energie wir zu $141,2 \pm 0,5$ keV bestimmten, nur zu 10% konvertiert ist und dass das Konversionsverhältnis in K- und L-Schale $N_K:N_L$ $8,1 \pm 0,5$ beträgt. Damit ist erwiesen, dass bei diesem Übergang (wahrscheinlich magnetische) Dipolstrah-

¹⁾ G. T. SEABORG und E. SEGRÈ, Phys. Rev. **55**, 808, 1939.

lung emittiert wird. Die Isomerie muss daher in einem vorangehenden Übergang ihre Ursache haben. Im β -Spektrometer suchten wir deshalb nochmals, jedoch erfolglos, den Bereich kleiner Energien bis auf 8 keV herunter nach Konversionselektronen ab. Durch Koinzidenz- und Absorptionsmessungen, für die sich das Präparat in einem der Zählrohre befand, während das andere Zählrohr nur auf γ -Strahlung ansprach, konnte nachgewiesen werden, dass tatsächlich Koinzidenzen zwischen einer extrem weichen Strahlung und den 141 keV-Quanten auftreten. Die Koinzidenzrate entspricht der Annahme einer Kaskade zwischen dem isomeren Übergang und der 141 keV-Strahlung.

Um die Energie der Isomerenstrahlung zu finden, brachten wir das Tc in ein Proportionalzählrohr ein. Ein handelsüblicher Kathodenstrahloszillograph diente als Linearverstärker und zugleich, in

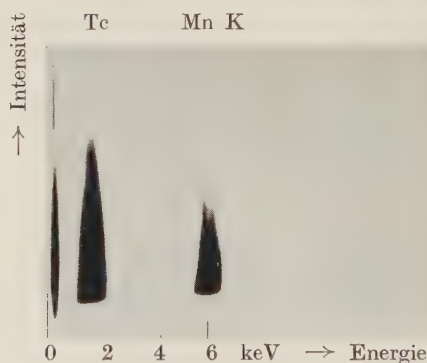


Fig. 1.

Verbindung mit einem Filter ähnlich einer kurzgeschlossenen Delay-Line, als Impulsspektrograph. Das Gerät liefert eine photographische Registrierung der Amplitudenverteilung in völlig analoger Weise wie der Impulsspektrograph der Universität Basel¹⁾, von dem es sich durch grössere Einfachheit, hauptsächlich infolge Verzicht auf automatische Sperrung gegenüber zu rasch aufeinanderfolgenden Stößen, unterscheidet. Eine weitere Vereinfachung ergab sich dadurch, dass die gewünschte Variation der Strahlhelligkeit auf elektrischem Wege anstatt optisch durch einen Graukeil erreicht wurde.

Fig. 1 zeigt die Kopie einer Aufnahme, bei welcher zwecks Eichung des Energiemaßstabes gleichzeitig die K-Röntgenstrahlung

¹⁾ D. MAEDER, *Helv. Phys. Acta* **20**, 139 (1947); D. MAEDER, P. HUBER und A. STEBLER, *Helv. Phys. Acta* **20**, 230 (1947).

von Mn durch ein Zählrohrfenster eingelassen wurde. Die dem Tc entsprechende Energie von $1,8 \pm 0,3$ keV ist mit dem Ergebnis der Absorptionsmessungen nur verträglich, wenn es sich um Elektronen handelt. Andererseits zeigt das Fehlen der *L*-Röntgenstrahlung des Tc, dass die Elektronen aus der *M*- und *N*-Schale des Tc stammen müssen. In Anbetracht der starken Absorbierbarkeit der gleichzeitig emittierten Röntgenstrahlung misst man somit die Gesamtenergie des isomeren Überganges.

Wahrscheinlich wird dieser 1,8 keV-Übergang mit einer Drehimpulsänderung von $\Delta I = 3$ verbunden sein, so dass dem direkten Übergang vom isomeren in den Grundzustand eine Spindifferenz von 2, 3 oder 4 entsprechen würde. Der erste Wert kann ausgeschlossen werden, weil in diesem Fall durch die Ermöglichung von Quadrupolstrahlung der isomere Zustand gar nicht auftreten würde. Auch mit einer Spinänderung von 3 wäre noch immer der direkte Übergang bevorzugt, der an seiner starken Konversion erkennbar sein müsste. Mit $\Delta I = 4$ wird hingegen, falls die beiden Zustände verschiedene Parität besitzen, die Halbwertszeit des 143 keV-Überganges so gross, dass er nur schwer beobachtbar wäre, weil seine Konversionselektronen praktisch mit denen des 141 keV-Überganges zusammenfallen würden.

Ebenfalls konnte der Zerfall des Mo^{99} in weiteren Punkten geklärt werden. Die Maximalenergie des β -Spektrums wurde spektrometrisch bestimmt und beträgt $1,215 \pm 0,010$ MeV. Nach Ausweis des Fermi-Diagramms ist das Spektrum komplex, wobei die Differenz der Energien der beiden Partialspektren von der Grössenordnung der harten γ -Linie¹⁾ ist, die wir durch Ausmessung der Photo- und Comptonelektronen zu 726 ± 8 keV bestimmten. Rund ein Viertel der β -Übergänge koinzidiert mit dieser Linie; dies ist auch mit der Analyse des Fermi-Diagrammes verträglich. Aus der γ - γ -Koinzidenzrate ist zu schliessen, dass der Emission jedes 726 keV-Quanten ein 141 keV- γ -Quant folgt. Zwei sehr schwache γ -Linien von 181 und 360 keV, deren Photoelektronen wir auffanden, konnten wir bisher nicht eindeutig in das Term-schema einordnen. Sie wurden nur in den Molybdänpräparaten, jedoch nicht beim abgetrennten Tc beobachtet.

Eine ausführliche Arbeit erscheint nächstens in den *Helv. Phys. Acta*.

¹⁾ L. C. MILLER und L. F. CURTISS, *Phys. Rev.* **70**, 983 (1946).

Spins, moments magnétiques et structure nucléaire

par G. J. BENE, P.-M. DENIS, R.-C. EXTERMANN (Université de Genève).

Le but de ce travail est l'étude des relations existant entre les spins I et les moments magnétiques M d'une part et d'autre part la structure nucléaire, structure mise en évidence¹⁾ par la stabilité des noyaux ayant 2, 8, 20, 50, 82 protons (Z) ou 2, 8, 20, 50, 82, 126 neutrons (N). Une telle étude vient d'être entreprise par W. GORDY²⁾ pour les moments électriques quadrupolaires.

Les diagrammes $M - M(I)$ ont souvent pour but³⁾ de mettre en évidence les limites de SCHMIDT⁴⁾; ils nous montrent par ailleurs un groupement tout à fait remarquable des noyaux ayant un nombre voisin de protons ou de neutrons. Ainsi pour l'abscisse $3/2$, les noyaux pour lesquels $Z = 29, 31, 33, 35, 37$ ont un moment magnétique compris entre 1,5 et 2,7 magnétons nucléaires (M. N.). On retrouve pour les autres abscisses des groupements similaires: $Z = 71, N = 72, Z = 57$ et $Z + N = 59$ pour $I = 7/2 \dots$ Ces ensembles peuvent être décrits par la règle empirique suivante:

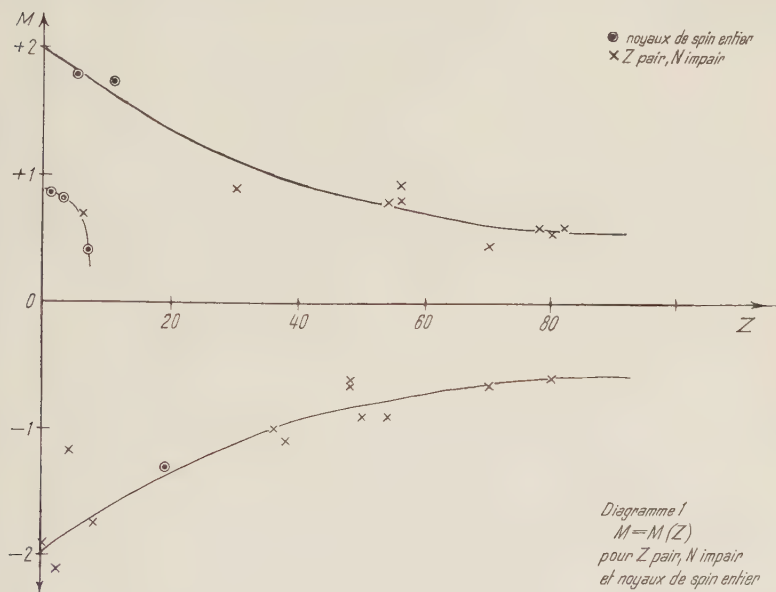
« Dans des domaines d'importance variable, mais dépassant rarement une dizaine d'éléments, deux noyaux, qui ne diffèrent que d'un nombre pair de protons ou de neutrons, ont des moments magnétiques voisins, sous réserve que leurs spins soient égaux. Si les spins sont différents de $1/2$, les moments électriques quadrupolaires doivent être voisins. »

Cette règle rend compte du fait connu que deux isotopes de même spin ont des moments magnétiques voisins, et du cas particulier de l'Europium. Elle permet de prévoir les moments de noyaux de spin connu, lorsqu'ils peuvent entrer dans un des groupes indiqués; on peut ainsi prévoir ^{a)}:

noyaux	spins	moments magnétiques
W_{74}^{183} et Os_{76}^{187}	$1/2$	+ 0,6
Ir_{77}^{191}	$1/2$	+ 1,5
C_6^{11}	$3/2$	- 1,1
Ir_{77}^{193}	$3/2$	- 0,1
V_{23}^{51}	$7/2$	+ 4,5
I_{55}^{129}	$7/2$	+ 2,7 (b)

Cette règle ne donne qu'un ordre de grandeur; examinons les diagrammes $M - M(Z)$. Celui des Z pairs, N impairs sur lequel

on a ajouté les noyaux de spin entier (diagramme 1), montre une variation régulière des moments. Les deux courbes construites sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des Z . Les groupements naturels correspondent encore à des noyaux de même spin.



Ainsi, au voisinage de $Z = 50$, les noyaux de moment M positif ont le spin $3/2$, ceux pour lesquels M est négatif ont le spin $1/2$, la valeur absolue de M dans les deux cas est d'environ $0,8$ M. N. Ceci fixe les moments des isotopes du Tellure pour lesquels les spins viennent d'être déterminés^{5) 6)}.

Te 127, 129, 131	$I = 3/2$	$M = + 0,8$ M. N.
Te 123, 125	$I = 1/2$	$M = - 0,8$ M. N.

Malgré l'incertitude sur le spin, on peut, néanmoins préciser la valeur absolue du moment magnétique de $\text{Hf}_{72}^{177, 179}$ soit $0,6$ M. N.

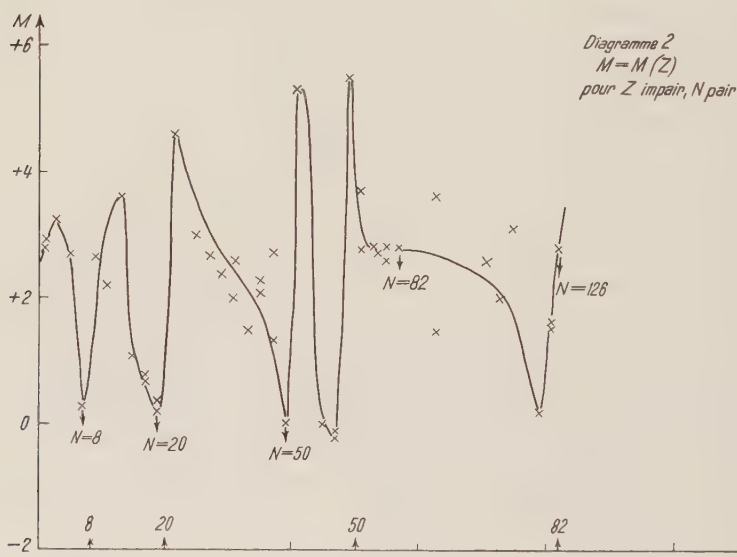
Le diagramme pour Z impair, N pair (diagramme 2) montre une variation de M beaucoup moins monotone. Les nombres «magiques» découpent ce diagramme en 6 régions limitées en général par des noyaux de moment magnétique voisin de zéro (minimum beaucoup moins accusé pour $N = 82$). Dans les deux premières régions, I comme M , croissent d'abord, puis passent par un maximum avant de décroître jusqu'au nombre magique suivant. Pour I les deux

premiers minima ont lieu aux points $Z + N = 20, 32$, points de discontinuité de la courbe des énergies de liaison dans ce domaine⁷⁾. Trois des régions suivantes débutent par un noyau de spin et de moment très élevés (3e, 4e, 7e); la 3e présente une zone assez large où les noyaux ont tous le spin $3/2$ et où les moments sont compris entre $+1,5$ et $+2,6$ M. N.; la 4e est divisée en 2 groupes:

$$\text{1er: } M = 0 \quad \text{et } I = 1/2$$

$$\text{2e: } M = +5,4 \quad \text{et } I = 9/2$$

L'étude des transitions β a conduit NORDHEIM³⁾ ainsi que FEENBERG et HAMMACK⁸⁾ à attribuer à certains isotopes ayant Z compris entre 41 et 49 les spins $1/2$ ou $9/2$; nous prévoyons pour ces noyaux les moments indiqués plus haut.



Dans les deux dernières zones les spins dominants sont $5/2$ et $7/2$; les moments magnétiques, d'abord très voisins, deviennent moins réguliers, caractère en relation avec de fortes variations du moment électrique quadrupolaire⁹⁾.

Ce dernier diagramme nous précise la largeur des groupements pour lesquels la règle empirique donnée plus haut est valable: elle est fixée par le découpage de ce diagramme par les nombres magiques. Ce découpage nous semble valable pour les noyaux ayant Z pair.

Références et notes.

- ¹⁾ MARIA G. MAYER, Phys. Rev. **74**, 235 (1948).
 - ²⁾ W. GORDY, Phys. Rev. **76**, 139 (1949).
 - ³⁾ L. W. NORDHEIM, Phys. Rev. **75**, 1895 (1949).
 - ⁴⁾ T. SCHMIDT, Zeitschr. für Physik, **106**, 358 (1937).
 - ⁵⁾ R. D. HILL, Phys. Rev. **76**, 333 (1949).
 - ⁶⁾ FOWLES, cité par BOWE, SCHARFF-GOLDBABER, Phys. Rev. **76**, 437 (1949).
 - ⁷⁾ J. S. SMART, Phys. Rev. **76**, 439 (1949).
 - ⁸⁾ FEENBERG et HAMMACK, Phys. Rev. **75**, 1877 (1949).
 - ⁹⁾ BÉNÉ, DENIS et EXTERMANN, Phys. Rev. (in press).
- a) Pour les noyaux de spin entier impair, cette règle s'applique aux rapports gyromagnétiques nous pouvons ainsi prévoir:

$$\text{F}_{9}^{18} \quad I = 1 \quad M = +0,5 \text{ M. N. et } \text{Al}_{13}^{26} \quad I = 5 \text{ et } M = +3,0 \text{ M. N.}$$

FEENBERG et HAMMACK⁸⁾ prévoient pour F 18 le spin $I = 1$.

b) Ayant appris (Phys. Rev. **76**, 149 (1949)) que LIVINGSTON, GILLIAM et GORDY recherchaient le moment M de I 129, nous leur avons envoyé ce résultat et avons été avisés par retour de son bon accord avec leur résultat expérimental $M = +2,74 \text{ M. N.}$ Leur travail a été publié depuis (Phys. Rev. **76**, 443 (1949)).

Détermination du rapport des sections efficaces du Bore et de l'Uranium par la Méthode photographique

par CH. HAENNY, P. LERCH et O. ROCHAT (Lausanne).

Des émulsions Ilford C₂ + B, 100 μ , et Ilford D1 50 μ chargées d'uranium ont été irradiées, avec et sans écran de Cd, dans une cavité creusée à l'intérieur d'un bloc de paraffine au centre duquel se trouvait une source de neutrons Ra-Be de 50 mC.

Du fait de la loi en $1/V$ valable pour les deux corps, le nombre des réactions de capture est proportionnel à la densité de neutrons thermiques et au produit $\sigma \cdot v$ constant.

1. Discrimination α fission.

Les émulsions DI ont une certaine sensibilité aux particules α qui est gênante lorsque les traces de fission sont rares (1 pour 5000 en 24 heures d'irradiation). Nous avons obtenu une amélioration de cette discrimination en développant avec un révélateur de pII 8,7 (formule 1 D 19 dilué 3 fois additionné de 6,5 cm³ d'acide acétique 1% pour 10 cm³ de révélateur). Développement en température, 15 minutes à 0° C et 30 minutes à 25,0 + 0,1° C.

2. Solution d'imprégnation.

Elle est formée de 30,077 g UO₂ (NO₂)₂ 6 H₂O dissous dans 100 cm³ de citrate de Na M/2,5 auxquels sont ajoutés 60 cm³ de soude 1,058 N. Son pII est de 4,9. L'influence de l'acidité de la

solution d'imprégnation sur le révélateur a été signalé par Pricciotto¹⁾. Il existe une autre cause d'affaiblissement, liée à la présence des ions UO_2 dans la plaque.

3. *Fading des traces de fission.*

La variation du nombre de traces comptées en fonction du temps d'irradiation a été étudiée pour 24 heures, 48 heures, 72 heures et 96 heures. Des déviations à la proportionnalité apparaissent pour 72 et 96 heures. L'irradiation de 24 heures a été utilisée pour la comparaison des sections efficaces. Après l'imprégnation, la plaque est séchée dans le vide sur CaCl_2 pendant 2 heures. L'irradiation a lieu à la température ordinaire, avec 65 % humidité relative.

4. *Dosage de l'uranium dans la couche.*

La plaque qui sert à la mesure est placée, avant son irradiation, sous un compteur de GEIGER-MÜLLER à parois de $3,0 \text{ mg/cm}^2$. Son activité est comparée à celle des plaques analysées. Le nitrate d'uranyle est extrait en faisant 10 lavages successifs dans l'eau distillée. Le rendement de l'extraction est déterminé par l'activité qui reste dans la couche après les lavages.

5. *Voile γ dans les plaques au bore.*

L'irradiation est effectuée avec 5 cm de Pb entre la source et les plaques (placées à 9 cm de la source, avec 4 cm de paraffine devant et 25 cm derrière). La dose de rayons γ est d'environ 1 röntgen en 5 heures. Le voile est éliminé en affaiblissant le révélateur par addition d'acide acétique 1 %. 7 cm^3 d'acide acétique ajouté à 10 cm^3 de révélateur 1 D 19 dilué 3 fois donnent un pH de 8,45 qui permet le comptage facile des traces de bore. Les corrections sont calculées pour tenir compte des traces de la réaction $\text{N}^{14}(n, p)\text{C}^{14}$, des traces qui sortent de l'émulsion et des protons de recul.

Résultats.

Plaques	Durée	Surf. expl.	Nomb. de traces comptées	Nombre par cm^2 en 24 h.
1 Uranium sans Cd	24 h.	$0,525 \text{ cm}^2$	221	420 ± 15
2 Uranium sans Cd	24 h.	$0,805 \text{ cm}^2$	431	424 ± 18
3 Uranium avec Cd	24 h.	$1,00 \text{ cm}^2$	6	6
4 Bore sans Cd	6 h.	$0,114 \text{ cm}^2$	10 948	$3,86 \pm 0,04 \cdot 10^5$
5 Bore avec Cd	6 h.	$0,100 \text{ cm}^2$	675	$0,042 \pm 0,001 \cdot 10^5$

En tenant compte des valeurs de $0,23 \pm 0,01$ mg. de bore par cm^2 pour les plaques C_2 de 100 μ (données de Ilford) et de $0,92 \pm 0,08$ mg U/cm^2 pour les plaques D 1, nous obtenons

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_U} = 170 \pm 34.$$

La valeur calculée pour l'isotope 235, en prenant $\sigma_B = 707$ barns pour $v = 2200$ m/sec est alors $\sigma_U = 580 \pm 120$ barns.

La valeur la plus récente publiée est celle de NIER, BOOTH, DUNNING et GROSSE $\sigma_U = 420$ barns.

Les traces de fissions observées avec Cd (1 mm dans toutes les directions) doivent être attribuées aux fissions de U^{238} par les neutrons rapides. Leur abondance est en accord avec le nombre des protons de recul d'énergie supérieure à 1 MeV.

Remarques sur le problème de la discrimination.

Le sous développement favorise la discrimination des particules fortement ionisantes. Cet effet peut être mis en parallèle avec les variations connues des courbes caractéristiques de HURTER et DRIFFIELD. En reportant le nombre de grains par μ en fonction du logarithme de la perte d'énergie cinétique par unité de parcours, on obtient des courbes caractéristiques pour les émulsions nucléaires dont l'allure est semblable à celle des courbes susmentionnées et qui se modifient dans le même sens lorsqu'on affaiblit le développement.

Littérature.

¹⁾ E. PICCIOTTO, Influence du pH dans le traitement des émulsions photographiques pour recherches nucléaires. — Centre de Physique nucléaire, Université Libre de Bruxelles.

Contribution à l'étude de la radioactivité du samarium

par CH. HAENNY, M. NAJAR et M. GAILLOUD (Lausanne).

Divers auteurs ont signalé l'existence d'un groupe de long parcours associé au groupe d' α émis par l'isotope 152 du samarium. Nous avons voulu déterminer l'origine de ce groupe dont le parcours moyen a été identifié avec celui du Po (CURR, LATTES) et attribué à une contamination provenant de l'atmosphère du laboratoire.

Nous avons utilisé pour ce travail les émulsions C 2 de la maison Ilford. Des plaques photographiques ont été imprégnées par immersion prolongée dans des solutions d'acétate de samarium de pH 3,2. La solution 1 contenait 0,4210 g de Sm_2O_3 dans 25 cm^3 de solution et la solution 2 contenait 0,9474 g. de Sm_2O_3 dans 25 cm^3 de solution. Une plaque de contrôle du même lot a été jointe à la

série des plaques imprégnées pour subir les mêmes traitements (à l'exception de l'imprégnation). Les résultats obtenus par l'observation d'une même surface de plaque dans chaque cas (1000 champs microscopiques) sont les suivants:

Particules observées	Nombre		
	Plaque de contrôle	Sol. 1	Sol. 2
Traces non entièrement contenues dans l'émulsion	47	19	57
Traces entièrement contenues dans l'émulsion et comprises entre 15 et 17 microns de long	4	45	162
Protons	3	3	2
Mésons	1 ?	1 ?	0
Etoiles radioactives	1	2	6
Etoiles provenant du verre	12	2	5
Etoiles cosmiques	1	0	1 ?

En comparant les nombres relatifs aux traces α de 15 à 27 microns entièrement comprises dans l'émulsion, on constate qu'ils sont essentiellement liés à la présence du sel de Sm utilisé pour les imprégnations. L'écart à la proportionnalité s'explique par la variation de l'adsorption d'une solution imprégnante à l'autre. Nous avons déterminé l'abondance moyenne \bar{X} des traces de long parcours par rapport aux traces α du groupe principal émis par le Sm. Cette abondance varie suivant l'origine du sel de samarium utilisé

$$\text{Sm (Prof. BARDET, Paris)} \quad \bar{X}_1 = 0,011 \pm 0,001$$

$$\text{Sm (Prof. ROLLA, Gênes)} \quad \bar{X}_2 = 0,022 \pm 0,003$$

La différence entre les 2 valeurs moyennes de l'abondance est significative.

Il apparaît donc établi que les α de long parcours sont liés à une impureté du sel de Sm.

Ainsi que cela a déjà été fait précédemment nous avons mesuré le parcours moyen de ce groupe:

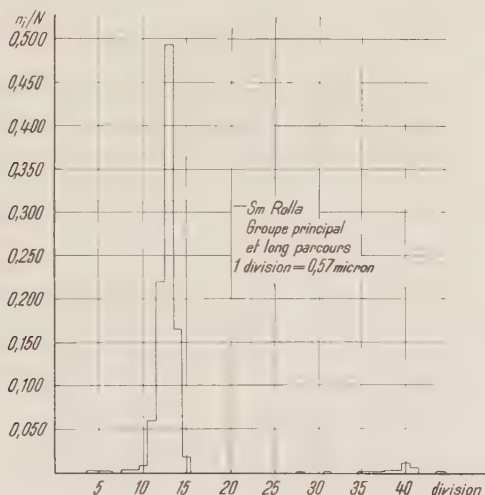
$$\bar{L}_1 = 22,37 \pm 0,08 \text{ microns}$$

$$\bar{L}_2 = 22,30 \pm 0,07 \text{ microns}$$

ces valeurs correspondent à celle obtenu pour le Polonium dans les mêmes conditions.

Pour nous convaincre de la présence du Po, nécessairement liée à l'existence de RaD, dans le sel de samarium, nous avons utilisé les

émulsions Ilford G 5 sensibles aux électrons. Ces émulsions ont tout d'abord été imprégnées de sel de RaD au pH de 5,72 ce qui nous a permis d'observer au bout de 12 jours d'exposition la présence de traces d'électrons accompagnant les traces α du polonium. Ces émulsions sont sensibles au minimum d'ionisation, toutefois, la densité de grain est faible. Les mesures effectuées nous ont donné une densité de grains de 19 grains/100 microns. Ce qui rend difficile l'identification de l'origine de la trace de l'électron dans tous les cas où l'électron est émis à une énergie voisine ou supérieure à 1 Mev.



On devrait s'attendre à observer des traces α accompagnées de 2 traces d'électrons (désintégration β du RaD et RaE) l'énergie extrême de ces spectres β étant respectivement de 0,045 Mev et 1,17 Mev, les électrons émis par le RaD seront seuls à être facilement identifiables. Nous avons observé que le 2% des traces α sont accompagnées par la trace d'un électron, cette fréquence est proche de celle calculée pour nos conditions. On a retrouvé le même résultat en ce qui concerne les traces de long parcours obtenus avec le sel de samarium. La présence des traces d'électrons de désintégration confirme bien le fait que les sels de samarium utilisés contiennent de très petites quantités de RaD.

Les parcours des traces α du samarium ont été déterminés dans les émulsions Ilford C 2

C 2

$$\bar{r} = 7,05 \pm 0,02 \text{ microns}$$

$$\bar{r} = 7,04 \pm 0,02 \text{ microns}$$

$$\bar{r} = 7,08 \pm 0,02 \text{ microns}$$

tandis que PICCIOTTO¹⁾ vient de publier (juillet 1949) la valeur suivante:

$$\bar{r} = 7,04 \pm 0,03 \text{ microns}$$

Il est important de noter l'accord existant entre les travaux effectués indépendamment avec des émulsions du même type (C 2) (et non du même lot) dans des laboratoires différents.

Dans les émulsions G 5 le parcours moyen des Alpha du Sm est de

$$\bar{r} = 7,86 \pm 0,03 \text{ microns}$$

Le parcours moyen du Po dans les émulsions G 5 également est de

$$\bar{r} = 24,1 \pm 0,04 \text{ microns.}$$

On peut calculer le parcours dans l'air des α du samarium en utilisant la courbe énergie - parcours dans l'émulsion en tenant compte du nouveau point obtenu sur celle-ci par MORTIER et VERMAESEN²⁾ pour les α de 6,56 microns provenant de la réaction ${}^6_3\text{Li}(n, \alpha) {}^3_1\text{H}$.

Ce parcours dans l'air est égal à $R = 1,13 \pm 0,04 \text{ cm}$, celui donné par CUER et LATTES est de $1,12 \pm 0,03 \text{ cm}$.

Kernphotoprozesse an leichten Elementen

von H. WÄFFLER und S. YOUNIS (ETH., Zürich).

Bei den leichtesten Atomkernen ($Z \leq 10$) ist die Absorption eines energiereichen Gammaquants ($h\nu \approx 20 \text{ MeV}$) mit der Emission eines Neutrons, eines Protons oder auch eines α -Teilchens verbunden. Im Gegensatz zu den schwereren Isotopen, bei denen der (γ, n) -Prozess bei weitem überwiegt, treten hier alle drei Reaktionstypen mit vergleichbarer Häufigkeit auf. Eine genaue Kenntnis der Wirkungsquerschnitte solcher Kernphotoprozesse, sowie der Winkelverteilung der dabei emittierten Teilchen dürfte sich einer zukünftigen Theorie der leichten Atomkerne als nützlich erweisen. Besonders interessant sind die Fälle, bei denen am gleichen Isotop sowohl der (γ, n) - als auch der (γ, p) - und (γ, α) -Prozess beobachtet werden kann, wie beispielsweise bei O^{16} . Hier lässt sich die relative Austrittswahrscheinlichkeit verschiedener Teilchenarten aus ein- und demselben hochangeregten Kernsystem bestimmen. Die vorläufigen Ergebnisse einiger solcher Messungen, welche mit der Lithiumgammastrahlung ($h\nu = 17,5 \text{ und } 14,8 \text{ MeV}$) durchgeführt wurden, sind nachstehend mitgeteilt.

¹⁾ E. PICCIOTTO, C. R., t. **229**, 117 (1949).

²⁾ MORTIER et VERMAESEN, Centre de physique nucléaire, Université Libre de Bruxelles, Note no 5, 1949.

1. *Deuterium*: $D^2(\gamma, n)p$.

Die bereits früher beschriebenen¹⁾ Ausmessungen der Deuterium-Photoprotonen sind weitergeführt worden. In schwerem Wasser getränkte Platten vom Typ Ilford C₂ (Schichtdicke 200 μ) wurden in nassem Zustand unter Luftabschluss während mehreren Stunden der Lithium-Gammastrahlung exponiert (siehe Fig. 1). Um die in der Emulsion selbst ausgelösten Photoprotonen (welche aus (γ, p) -Prozessen an Ag, Br usw. stammen) in Abzug bringen zu können, wurde gleichzeitig mit der D₂O-Platte eine genau gleich behandelte H₂O-Platte bestrahlt. Von jeder Plattensorte sind gegenwärtig rund 24 cm² vermessen. Im Energiebereich $5,5 \text{ MeV} < E_p < 8,3 \text{ MeV}$, in welchem die Photoprotonen des Deuteriums liegen, entfallen auf die D₂O-Platten 1200, auf die H₂O-Platten dagegen nur 550 Protonenspuren. Die überschüssigen 650 Spuren stammen offenbar aus der Deutonspaltung. Die Winkelverteilung dieser Spuren stimmt innerhalb der Messgenauigkeit gut mit der theoretischen Verteilungskurve, welche die Form $I(\Theta) = I_0(a + \sin^2 \Theta)$ hat, überein (Θ = Winkel zwischen Gammastrahl und Photoproton). Die genaue Bestimmung des winkelunabhängigen Anteils a erfolgt am besten durch Vergleich der Spurenzahl unter 90° bzw. 180°. Bei der vorliegenden Statistik betrug die Zahl der Deuterium-Photoprotonen, welche im *Schwerpunktssystem* a) innerhalb eines Kreiskegels von 48° Öffnungswinkel mit der Achse *senkrecht* zur Richtung des einfallenden Gammastrahls b) innerhalb eines gleichgrossen Kegels mit der Achse *in* Richtung des Gammastrahls lagen, 250 bzw. 20. Damit berechnet sich der winkelunabhängige Anteil zu

$$a = 0,15 \pm 0,15 \text{ (mittlerer statistischer Fehler)}$$

Auf Grund der nunmehr bekannten Winkelverteilung lässt sich aus der Gesamtzahl der gemessenen Spuren und der Menge des in der Emulsion enthaltenen schweren Wassers, die durch Wägung bestimmt wurde, der Wirkungsquerschnitt für die Spaltung des Deutons durch beide Linien der Lithiumgammastrahlung zusammen berechnen. Es ergibt sich

$$\sigma(17,5 + 14,8) = (7,0 \pm 2,5) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2 \text{ (Fehlergrenze)}.$$

Diese experimentellen Werte können mit den theoretischen Rechnungen von RARITA und SCHWINGER²⁾ verglichen werden. Für eine Quantenenergie von 17,5 MeV diskutieren diese Autoren, unter Zugrundelegung eines Kastenpotentials von $2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ Radius

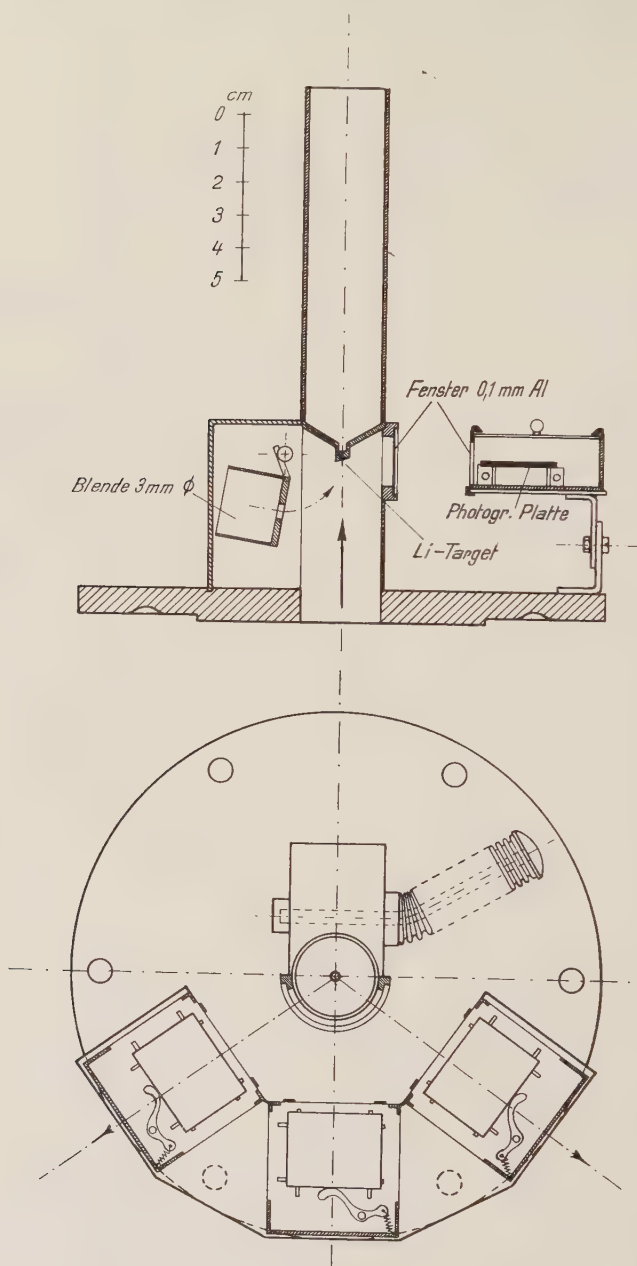


Fig. 1.

Anordnung zur Plattenbestrahlung.

für die Neutron-Proton-Kraft, die drei Fälle der sog. symmetrischen, geladenen und neutralen Mesontheorie:

	$\sigma \times 10^{28} \text{ cm}^2$	a
Symmetrische Theorie . .	7,68	0,015
Geladene Theorie	7,23	0,077
Neutrale Theorie	3,76	0,36

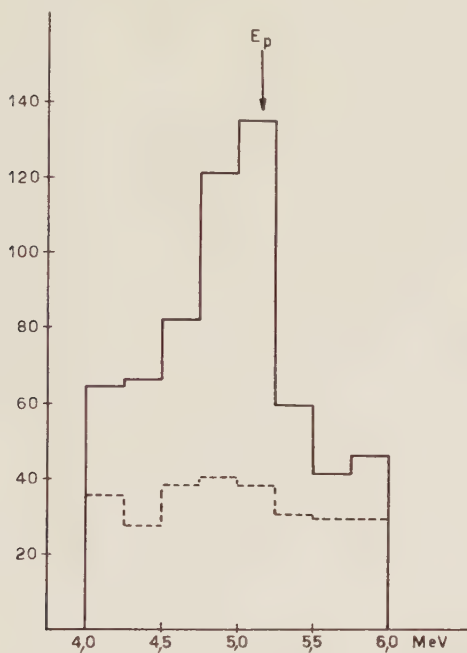


Fig. 2.

Energieverteilung der Photoprotonen aus der Reaktion $\text{O}^{16} (\gamma, p) \text{N}^{15}$.

— nasse Platte (17 cm^2 , 614 Spuren).

..... trockene Platte (17 cm^2 , 266 Spuren).

$$E_p = \frac{15}{16} (h\nu + Q) = \frac{15}{16} (17,6 - 12,1) = 5,15 \text{ MeV}.$$

Man erkennt, dass die vorliegenden Experimente die neutrale Theorie mit grosser Wahrscheinlichkeit ausschliessen, während zwischen der symmetrischen und der geladenen Theorie noch keine Entscheidung getroffen werden kann.

2. Kohlenstoff: $\text{C}^{12} (\gamma, \alpha) 2\alpha$.

Auch in diesem Falle sind die bereits früher¹⁾ beschriebenen Messungen erweitert worden. Auf einer Plattenfläche von insgesamt 40 cm^2 wurden nunmehr 100 Spaltungsprozesse beobachtet. Davon

entfallen 92 auf die 17,5 MeV-Komponente und 8 auf die 14,8 MeV-Komponente der Lithiumgammastrahlung. Aus der bekannten Absolutintensität der Lithiumgammastrahlung ergibt sich für den gesamten Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(17,5 + 14,8) = 0,8 \pm 0,3 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

3. *Sauerstoff*: $\text{O}^{16}(\gamma, n)\text{O}^{15}$; $\text{O}^{16}(\gamma, p)\text{N}^{15}$; $\text{O}^{16}(\gamma, \alpha)\text{C}^{12}$.

An diesem Isotop konnte der Wirkungsquerschnitt sämtlicher drei in Frage kommenden Photoprozesse für die 17,5 MeV-Komponente *allein* bestimmt werden. Der Wirkungsquerschnitt für den (γ, n) -Prozess wurde bereits in einer früheren Mitteilung³⁾ angegeben. Der Nachweis der Reaktionen (γ, p) und (γ, α) erfolgte nach der photographischen Methode. Fig. 2 zeigt beispielsweise die Energieverteilung der Sauerstoffphotoprotonen, und zwar sowohl für eine trockene, als auch für eine wassergetränkte Platte. In Tabelle 1 sind die experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitte sowie die Schwellenenergien der bzw. Reaktionen zusammengestellt.

Tabelle 1.

Reaktion	Schwellenenergie (MeV)	W. Q. in 10^{-28} cm^2
(γ, n)	15,6	$5,4 \pm 1,4$
(γ, p)	12,1	$6,8 \pm 1,7$
(γ, α)	7,2	$1,8 \pm 0,6$

Literatur.

¹⁾ H. WÄFFLER und S. YOUNIS, *Helv. Phys. Acta* (im Druck).

²⁾ W. RARITA und J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* **59**, 556 (1941); siehe auch TSING-MING HU und H. S. MASSEY, *Proc. Roy. Soc.* **196**, 135 (1949).

³⁾ H. WÄFFLER und O. HIRZEL, *Helv. Phys. Acta* **21**, 200 (1948).

Structure géométrique des couches électroniques K et L des atomes légers

par MICHEL A. BESSO (Genève).

Le but de la présente communication est de mettre en évidence quelques côtés de la théorie quantique du nuage électronique des atomes à l'aide de symétries géométriques: celles-ci pouvant être complétées d'une manière simple pour tenir compte de la composante vectorielle des constituants des atomes et en particulier des électrons. Les résultats se rapportent à des cas de métastabilité, à côté des structures atomiques classiques stables dans le cadre de notre chimie actuelle: pouvant éventuellement elles-mêmes constituer les formes stables dans certaines conditions d'espace disponible et de pression (éventuellement des différentes formes de réalisation de la pression) ainsi que de ce qu'on pourrait appeler entropie intérieure ou énergie à 0^0 KELVIN.

Notre point de départ, c'est le néon avec son entourage en nombres atomiques, soit la couche électronique L : les atomes précédents, à couche électronique L déficitaire, tendant à se compléter de manière à donner lieu à des ions électronégatifs; les atomes suivants, à couche L avec électrons surnuméraires, tendant à les lâcher et à donner ainsi lieu à des ions électropositifs et aux propriétés des métaux. Si l'on appelle, avec PAULING, «kernel» le noyau avec sa couche K , la couche L entourant le kernel se présente avec symétrie cubique, les électrons étant placés au sommets du cube. - Il n'est alors que naturel de s'enquérir de symétries précédentes:

D'abord, la symétrie du point, en équilibre électrostatique pour charge nulle. L'équilibre électrostatique à charge 1 peut se présenter en partant du point par adjonction d'un électron: atome d'hydrogène à propriétés métalliques.

Ensuite, la symétrie linéaire, avec un électron de chaque côté du centre, en équilibre électrostatique pour charge $+2$ du centre. L'équilibre à charge 1 du centre peut se présenter aussi en partant de la symétrie linéaire déficitaire: atome d'hydrogène à propriétés d'halogène.

Par la suite, on rencontre les symétries planes polygonales à charge $+n$ du centre, qui intéresseront en vue de structures du genre du graphite.

Les symétries spatiales suivantes seront celles des polyèdres réguliers: Le carbone à symétrie tétraédrique autour du kernel ne se présente pas normalement comme gaz rare à la surface de la terre;

il rappelle toutefois les dits gaz par la stabilité chimique de quelques unes de ses formes, et par le fait que le bore qui le précède, rappelle par quelques côtés les halogènes; l'azote, qui le suit, pouvant former des ions positifs monovalents, N_2O , ainsi que des alliages durs à la surface de quelques métaux. L'atome d'oxygène, l'élément le plus répandu à la surface de la terre, doit aussi présenter, au point de vue des symétries, à côté de sa forme à couche L déficitaire, une forme octaédrique à propriétés de gaz rare.

Mais c'est là qu'intervient le moyen prévu pour tenir compte des propriétés vectorielles des électrons, moyen qui consiste à placer 2 marques différentes aux sommets du corps régulier, de manière qu'elles alternent, si possible, pour chaque arête. Cette possibilité n'existe toutefois que pour un corps dont les faces sont des polygones de nombre pair de côtés; des 5 corps réguliers donc seulement pour le cube. En particulier le tétraèdre et l'octaèdre ne présentent pas ce genre de symétrie — ou «spinosymétrie»: genre de symétrie qui pourra ne pas être indispensable là où chaque atome dispose d'un espace intraatomique considérable, comme cela pourrait être le cas dans la corona. — Tétraèdres et octaèdres «marqués» se présentent, les 2, sous 2 formes symétriques l'une par rapport à l'autre. Ces formes pourront être liées par résonance, donnant ainsi lieu à une sorte très stable de la molécule, l'autre, ordinaire, étant due à l'accolement par faces de 2 cubes. Il y a, dans ce dernier cas aussi, équilibre électrostatique en même temps que ce que nous avons appelé spinosymétrie.

D'autre part, aux pressions élevées d'ordre cosmique, gaz telluriques, éruptions solaires, la symétrie du point pourra primer, dans le nuage électronique, la tendance à la formation de la couche K .

Nous avons ainsi rencontré, dans le nuage électronique aussi, les isoméries, connues aussi bien dans le domaine des noyaux atomiques que dans des domaines moléculaires. Il s'agira d'évaluer les possibilités et les probabilités — sans doute extrêmement faibles, au moins entre 1^0 et 6000^0 Kelvin et pour les espaces et pressions d'ordre de grandeurs terrestres — dans le cube L : $p \sim 25 \frac{e^2}{e^4} \sim 600 \cdot 10^2$ mégabaries — ainsi que les volumes atomiques des différentes formes électriquement neutres, à même noyau, et les énergies de transformation entre ces formes, en tenant compte des effets de résonance.

En dehors des couches à symétrie cubique parfaite, l'on est amené à chercher dans le domaine des corps semiréguliers. L'octaèdre tronqué possède la «spinosymétrie», mais avec 24 sommets, au

lieu de 18 des couches M et N. Il se présente aussi une structure polyédrique à 6 faces quadratiques et 5 faces hexagonales avec 18 sommets, dont 6 d'un genre, un hexagone et deux carrés, et 12 d'un autre, deux hexagones et un carré, qui se trouve d'ailleurs doublée de la triplication «aspinosymétrique» de l'octaèdre.

Dans ce qui précède, l'appel à l'intuition géométrique ne saurait être entendu qu'à titre d'analogie plus ou moins serrée: on s'approche de ce qu'on peut appeler le point triple central de la physique, où se rencontre le domaine de la géométrie euclidienne; celui de la non euclidienne de la relativité générale, euclidienne dans l'infiniment petit; et celui des atomes et des quantas, où l'infiniment petit de la géométrie se dissout.

Construction et étude de compteurs de Geiger-Muller à cathode externe

par M. DÉGALLIER, CH. HAENNY et R. FAVRE (Lausanne).

Sommaire: Divers types de compteurs cylindriques de verre à cathode externe (type Maze), ont été construits en grand nombre et étudiés. Les longueurs de paliers, les pentes de ces paliers ont été déterminés en fonction du taux de comptage, de la température. Les résultats feront l'objet d'un mémoire à paraître prochainement aux *Helv. Phys. Acta*.

Die Messung mechanischer Grössen mit Hilfe elektrostatischer Ladungen

von W. KISTLER (Winterthur).

(Mitteilung aus dem physikalischen Laboratorium der Schweizerischen Lokomotiv- und Maschinenfabrik, Winterthur.)

Die industrielle Messtechnik, die sich heute als besonderer Zweig der allgemeinen physikalischen Messtechnik selbständig entwickelt, befasst sich mit denjenigen Messungen an Maschinen oder Maschinenteilen, die sich nur mit Hilfe umfangreicher elektrischer Apparaturen lösen lassen, also insbesondere mit äusserst genauen Längenmessungen oder mit der oscillographischen Aufnahme von raschverlaufenden Bewegungs-, Kraft-, oder Druckvorgängen. Die hiezu verwendeten Messinstrumente werden durch ihren dreiteiligen Aufbau charakterisiert: Das in die zu untersuchende Maschine eingebaute Aufnahmeanstrument, der *Messfühler* verwandelt die zu messende mechanische Grösse in eine elektrische Übertragungsgrösse, die von einem *Kabel* zum *Wiedergabegerät* (Oscillograph oder Zeigerinstrument) geleitet wird.

Als elektrische Übertragungsgrösse wird in solchen Messinstrumenten heute allgemein eine amplituden- oder frequenzmodulierte Wechselspannung verwendet. Die elektrische Ladung, die für statische Messungen bisher noch kaum verwendet wurde, weist aber speziell im Hinblick auf das technische Messwesen gegenüber der Wechselspannung ganz bedeutende Vorteile auf:

1. Der Messfühler erzeugt die Messladung selbst und ist unabhängig von jeglicher Speisespannung, die notwendigerweise Störungen und Fehler von aussen in den Messvorgang einführt.

2. Der ganze Messvorgang beruht nur auf wenigen übersichtlichen physikalischen Gesetzen.

3. Es wird möglich den Messvorgang ausschliesslich auf lineare Gesetze zu gründen, was bei Verwendung von Wechselspannungen nicht durchführbar ist. In diesem letzteren Falle genügt aber eine kleine unkontrollierbare Verschiebung auf der Arbeitskurve um das Übertragungsverhältnis und damit den Eichwert der Messapparatur zu verändern.

Zur Messung von Kräften und Drücken bedient sich die elektrostatische Messtechnik des piezoelektrischen Effektes. Bei rein statischen Messungen wird das Kompensationsverfahren angewendet: Die Messladung wird in einem hochisolierenden Eichkondensator gebunden und das Röhrenvoltmeter dient als Nullinstrument. Bei richtiger Ausführung des piezoelektrischen Messfühlers sind der Messbereich und die Messgenauigkeit hervorragend.

Zur Wegmessung wird im Prinzip ein Zylinderkondensator verwendet, dessen eine bewegliche Elektrode mit einer konstanten Ladung versehen ist. Die dadurch auf der Gegenelektrode gebundene Ladung verändert sich in linearem Verhältnis mit der Stellung der beweglichen Elektrode gemäss der Beziehung

$$Q = \alpha \cdot s$$

wo Q die vom Messfühler erzeugte Ladung, s sie zu messende Verschiebung und α den konstanten Umsetzungsfaktor bedeuten.

Mit Hilfe der elektrostatischen Methode ist es somit möglich. Kräfte, Verschiebungen und die davon abgeleiteten mechanischen Grössen auf einfache Weise genau und zuverlässig zu messen. Die grosse Schwierigkeit, die der Messung mit elektrischen Ladungen im Wege steht und bisher deren allgemeine Anwendung verunmöglichte, sind die Isolationsverluste. Erst die Fortschritte, die in neu-

ester Zeit auf dem Gebiete der Isolationsmaterialien und der Elektrometerröhren erzielt wurden, haben die Entwicklung einer eigentlichen elektrostatischen Messtechnik ermöglicht, die heute allerdings noch in ihren ersten Anfängen steht.

Zur Messung der von den Messfühlern gelieferten Ladung wurde eine neue Verstärkerschaltung entwickelt. Diese besteht im Prinzip aus einem dreistufigen Gleichspannungsverstärker mit kapazitiver Gegenkopplung. Die etwas ungewohnte Verwendung kapazitiver Kopplung bei einem Gleichspannungsverstärker ist hier natürlich nur dank dem elektrostatischen Eingang möglich. Durch die Gegenkopplung wird nicht nur der Verstärker linearisiert, sondern, was hier noch wichtiger ist, alle Isolationsverluste werden im Verhältnis des Gegenkopplungsfaktors verringert. Der Gegenkopplungskondensator absorbiert praktisch die ganze Messladung und die Spannung am Verstärkerausgang ergibt sich zu:

$$U = \frac{1}{C} \cdot Q$$

wo C die Kapazität des Gegenkopplungskondensators bedeutet. Auch diese Umsetzung ist somit einfach und linear.

Bei angemessener Vorspannung der in der ersten Verstärkerstufe verwendeten Elektrometerröhre lassen sich mit dieser Schaltung Zeitkonstanten von der Grössenordnung von 10^6 sec, d. h. von mehr als 10 Tagen erreichen. Bei statischer Belastung des Messfühlers ist die Wanderung des Zeigers oder des Leuchtpunktes am Registriergerät infolge Ladungsverlusten nicht grösser als die Wanderung an einem stabilisierten Gleichstromverstärker gewöhnlicher Bauart. Rein statische Messung und Eichung sollte somit heute mit einem elektrostatischen Messgerät möglich sein. Eine ausführlichere Beschreibung des elektrostatischen Messverstärkers soll demnächst in den HPA. erscheinen.

Sur la mesure des caractéristiques diélectriques des matières fibreuses

par R. GOLDSCHMIDT (Cossonay-Gare).

Les méthodes pour déterminer constante diélectrique et angle de perte des matières isolantes ayant été soigneusement étudiées et mises au point, nous disposons, aujourd'hui, d'appareils qui permettent de déterminer ces deux facteurs avec une haute précision aussi longtemps qu'il s'agit de corps homogènes, qu'ils soient à

l'état solide, liquide ou gazeux. Mais sitôt qu'on a à faire à des corps hétérogènes et spécialement, si on veut étudier les matières fibreuses, deux difficultés majeures se présentent: l'hétérogénéité et la compressibilité de ces matériaux. Vu l'importance pour la technique des matières fibreuses, spécialement des papiers, nous nous sommes, aux laboratoires des Câbleries de Cossonay, occupés de ce problème et nous avons — en nous basant sur des expériences déjà faites auparavant et ailleurs¹⁾, développé une méthode qui permet d'exécuter ces mesures avec précision et rapidité tout en utilisant seulement de petites quantités de matière.

Je voudrais en quelques mots esquisser cette méthode et montrer comment nous avons tenu compte des deux difficultés inhérentes au problème: hétérogénéité et compressibilité de la matière fibreuse.

Pour déterminer le comportement d'une matière hétérogène, il faut connaître la qualité et la quantité de chaque composant. On doit en outre tenir compte d'un facteur conditionné par la forme et la répartition des particules dans le mélange. Si on se limite à deux composants possédant les caractéristiques ε_1 et ε_2 (il s'agit dans notre cas des constantes diélectriques complexes) et présentant les pourcentages p_1 et p_2 du volume total du mélange, on obtient pour la qualité résultante la formule suivante, si on met encore:

$$p_1 = 1 - p_2 = p; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon$$

$$\varepsilon_r = \frac{1 + (\varepsilon - 1)(f(1-p) + p)}{1 + (\varepsilon - 1)f(1-p)} \cdot \varepsilon_2$$

où:

ε_r = constante diélectrique résultante

f = facteur de forme.

f varie de 0 à 1. Pour $f = 0$ nous avons 2 corps en parallèle, pour $f = 1$ nous avons deux corps en série. Le facteur $f = \frac{1}{2}$ correspond aux particules cylindriques placées obliquement au champ extérieur, le facteur $\frac{1}{3}$ aux particules sphériques.

Une autre formule dite «formule logarithmique des mélanges» a été développée par LICHTENECKER et ROTHE²⁾.

Nous préférons utiliser la première formule. Il y a dans cette formule 4 inconnues. Le but de notre recherche est de déterminer ε .

¹⁾ A. BÜCHNER, Wiss. Ver. aus dem Siemens Konz. H. 2, S. 84 (1939); R. VIEWEG und T. GAST, Z. f. techn. Phys. **24**, 3, 56 (1943).

²⁾ LICHTENECKER, ROTHE, Phys. Zeitschr. **32**, 255 (1931).

J'expliquerai plus loin de quelle manière nous mesurons ε_r . Reste à savoir comment trouver p et f . Pour déterminer f nous utilisons un appareil dit «Volumètre Notari», construit par la maison Utz à Berne¹⁾.

Pour les papiers utilisés pour les câbles ou condensateurs on trouve pour le pourcentage en matière solide, donc essentiellement en fibre de cellulose: $p_{\text{solide}} = 65-75\%$.

Pour déterminer le facteur de forme on procède de la manière suivante: On imprègne le papier avec un liquide approprié, de préférence avec une huile, une cire ou une résine ou un mélange de ces matériaux. En mesurant soit le papier non imprégné soit le papier imprégné et en connaissant et la quantité de masse imprégnante absorbée par le papier et ses caractéristiques on peut déterminer f . Pour des papiers on trouve: $f \sim 0,5$, valeur à laquelle il fallait s'attendre parce que la matière est composée de fibres, donc de petits cylindres.

Ayant ainsi déterminé p et f il nous reste encore à déterminer ε_r , pour que nous puissions calculer ε . Pour ces mesures nous devons tenir compte que la matière est compressible.

Je voudrais énumérer rapidement les différentes méthodes dont on peut se servir pour déterminer ε_r .

Ces méthodes sont:

1. Fabrication d'un condensateur.
2. Fabrication d'un câble.
3. Mesure sous pression des feuilles de papier dans un condensateur plat.
4. Mesure des feuilles de papier dans un condensateur plat à distance fixe entre les électrodes.
5. Mesure des rubans de papier dans un condensateur cylindrique à distance fixe entre les électrodes.

De toute ces méthode la dernière est la plus précise et la plus rapide et c'est celle-là que nous avons choisie. L'appareil utilisé est un condensateur de précision comme on l'utilise pour le contrôle des huiles. La distance entre les deux cylindres est environ de 1,5 mm. On coupe le papier en bande d'une largeur telle (~ 60 mm) qu'elle couvre la partie centrale du cylindre formant l'électrode intérieure et une partie des deux anneaux de garde, qui se trouvent de chaque côté.

¹⁾ H. KELLER, Techn. Mitt. PTT. Berne, **24**, 1, 49 (1946).

En mesurant la capacité et en connaissant l'épaisseur et le nombre de tours qui forment le cylindre en papier on peut à l'aide de formules connues déterminer la constante diélectrique ϵ_r et avec p et f la valeur de ϵ . On trouve ainsi pour ϵ des valeurs d'environ 6.

Il est bien entendu, qu'on doit prendre des précautions nécessaires pour que le papier soit bien séché. Les mesures permettent également de déterminer les pertes. En mesurant en fonction de la température on constate que ϵ augmente pendant que $\text{tg } \delta$ diminue.

Les mesures ainsi normalisées permettent un contrôle régulier d'une fabrication et des études pour améliorer la qualité.

Zur gleichartigen Wirksamkeit der Postulate von Statistik und Relativität in der Quantentheorie

von E. Keberle.

(23. VIII. 1949.)

§ 1. Einleitung.

Die Schwierigkeiten, in welche die Quantentheorie unmittelbar nach ihrer Entdeckung geraten ist, waren Gegenstand verschiedenster Unternehmungen, mit dem Ziele, mittelst mathematischer Ansätze innerhalb der gegebenen physikalischen Schematas ihre Beseitigung zu erreichen. Der gesamthaft ungünstige Verlauf dieser Versuche führte uns zur Arbeitshypothese, dass diese Schwierigkeiten ihren Grund in der *Existenz einer allgemeinen Beziehung unter den Postulaten der Physik* haben. Dabei verstehen wir unter Postulaten die nicht direkt experimentell kontrollierbaren Annahmen der Physik. Es sind dies das Postulat der Statistik (Gleichwahrscheinlichkeit nicht entarteter Quantenzustände bzw. Phasenraumzellen) und das Postulat der Relativität (Gleichberechtigung aller Lorentzsysteme). Beide Postulate erfüllen das Prinzip vom mangelnden Grunde, welches dort zur Anwendung gelangt, wo eine Spekulation auf ein Absolutes sich als Irrtum erwies (thermodynamischer Körper als rein mechanisches System; absoluter Äther).

Gemeinsamkeiten dieser Art (Nichtkontrollierbarkeit; Prinzip vom mangelnden Grunde) unter den Postulaten sind vielleicht kein Zufall und führen zur Vermutung, dass den beiden Postulaten eine physikalische gegenseitige Bedingtheit und Abhängigkeit zugrunde liegt. Obwohl einerseits die Tendenz oft anzutreffen ist, Forderungen an die rationelle und an die statistisch-thermodynamische Theorie als voneinander völlig unabhängige Dinge zu betrachten, kann andererseits die bekannte eigenartige Vereinbarkeit des relativistischen Postulates mit der statistischen Thermodynamik gerade so gut als Stütze unserer Vermutung angesehen werden. Indem wir diese Vermutung, deren Inhalt wir im folgenden als *Postulatenprinzip* bezeichnen, zur Voraussetzung erheben, gewinnen wir die Er-

klärung für allgemeine eigenartige Sachverhalte, wie die Existenz zweier Quantentheorien (Matrix- und Wellenmechanik) und der anfangs genannten Schwierigkeiten, um nur einige bereits hier zu nennen. Die in der Folge diskutierten Sachverhalte lassen sich in zwei Kategorien einteilen. In der einen erfolgt der Gebrauch der Postulate nebeneinander (§ 2, 3, 5), wobei je die gleichen Resultate erhalten werden (Verträglichkeit der Postulate), in der andern dagegen erfolgt der Gebrauch hintereinander oder zugleich an demselben Objekt (§ 4, 6, 7), was infolge der Abhängigkeit der Postulate zu unbefriedigenden Situationen und Schwierigkeiten Anlass gibt.

§ 2. Quantisierung.

Die Begründung der Quantisierung kann theoretisch auf zweierlei Arten erfolgen, welche auf dem statistischen bzw. relativistischen Postulat beruhen.

a) *Statistisch-thermodynamische Begründung.* Sie wird ermöglicht durch den unmittelbaren Zusammenhang der diskreten Quantenzahlen mit den Zellenindexen des statistisch-thermodynamischen Abzählformalismus. Dieser Zusammenhang liefert, falls noch das Postulat der Statistik herbeigezogen wird, bereits die richtige Energiequantisierung des harmonischen Oscillators, wie kurz dargelegt werde (für nichtharmonische Systeme vgl. § 3).

Für Gleichgewicht liefert der genannte Formalismus bekanntlich die Verteilungsfunktion

$$f(a, T) = \sum_l G_l \cdot e^{-\frac{E_l(a)}{kT}}.$$

Einzig eine diskrete Wahl der Gewichte G_l (l = Zellenindex) ist in der Lage, den gegenüber der klassischen Denkweise neuartigen Begriff der endlichen Zelle in dieser Formel auszudrücken. Für die explicite Wahl der diskreten Gewichte besteht nur ein Hinweis, welcher sich aus einem Satz für allerdings kontinuierliche Gewichte ergibt, der sich zudem nur auf unendliche Zeitintervalle bezieht. Für ergodische Systeme gilt nämlich, dass das Gewicht einer Phasenraumzelle proportional ihrem (beliebigen) Volumen ist. Die Einschränkung der Gültigkeit für nur unendliche Zeitintervalle folgt aus der Tatsache, dass der thermodynamische Körper nur durch ergodische Systeme mit einem einzigen beobachtbaren Integral der Bewegung dargestellt werden kann, da sonst kein mechanischer,

adiabatisch invarianter Ausdruck für das totale Entropiedifferential möglich wäre.

In grundsätzlicher Ermangelung von Bestimmungsstücken zur Wahl diskreter G_i führt man das Prinzip vom mangelnden Grunde, im vorliegenden Falle das statistische Postulat ein, welches zwangsläufig die folgende a priori-Festsetzung gibt: „Alle Zellen sind gleich gross, jede Zelle hat gleiches Gewicht, das Gewicht ist dem Rand- oder Mittelwert der Zelle zu geben.“

In Anwendung auf den harmonischen Oscillator liefert dies:

$$G_n = \begin{cases} 1 & \frac{E}{\nu} = \begin{cases} 0, & h, & 2h, \dots & nh. & \text{(Rand)} \\ \frac{1}{2}h, & (1 + \frac{1}{2})h, & (2 + \frac{1}{2})h, \dots & (n + \frac{1}{2})h. & \text{(Mittel)} \\ \text{sonst} \end{cases} \\ 0 \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit der exakten Quantentheorie¹⁾, wobei die Grösse h der Zellen experimentell zu bestimmen bleibt. Mit dem Phasenvolumen $\frac{E}{\nu}$ ist h und die Quantenzahl n samt G_n adiabatisch invariant.

b) *Relativistisch-dualistische Begründung.* Die seit Newton gesuchte Zuordnung zwischen Wellen- und Korpuskeleigenschaften konnte theoretisch erst mit dem relativistischen Postulat begründet werden. Betrachtet man Impuls \vec{p} und Energie E als Funktion des Wellenvektors \vec{k} und der Frequenz ν , so ergibt das relativistische Postulat als einfachste Zuordnung

$$\vec{p} = h\vec{k}; \quad E = h\nu \quad (\text{R})$$

mit dem (experimentell zu bestimmenden) Skalar h als Proportionalitätskonstante, da die Grössen rechter und linker Hand Vierervektoren bilden. Diese Zuordnung liefert, wie DE BROGLIE zeigte, die Gleichheit der Partikelgeschwindigkeit $v_i = \frac{\partial E}{\partial p_i}$ mit der Gruppengeschwindigkeit $\bar{v}_i = \frac{\partial \nu}{\partial k_i}$ der Wellen.

Die Universalität von h ergibt sich aus $E = h\nu$, falls mittelst des relativistischen Postulates, in gleicher Weise wie dies in § 5 näher diskutiert ist, die Forderung gestellt wird, dass die Beträge von E und ν , wenn sie in einem Lorentzsystem vorkommen, auch in be-

liebig anderen Systemen vorkommen müssen. Für ruhendes und bewegtes System beispielsweise führt dies zu den Gleichungen:

$$m_0^{(1)} \cdot c^2 = h \nu \qquad \frac{m_0^{(2)} \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = h \nu$$

woraus gleiches h für verschiedene Ruhemassen $m_0^{(1)}$, $m_0^{(2)}$ folgt.

Aus den Welleneigenschaften der Massenzentren folgt für freie Teilchen in abgeschlossenem Volumen (für beliebige Kraftfelder vgl. § 3 b) in Ermangelung weiterer Anhaltspunkte die Zuordnung einer harmonischen Welle, welche in bekannter Weise die Quantisierung der Energie und die relativistische Invarianz der Quantenzahlen ergibt.

§ 3. Matrix- und Wellenmechanik.

a) *Matrixmechanik*. Beim nichtharmonischen Oscillator führte die Quantisierungsvorschrift von § 2a, im Widerspruch zum Prinzip vom mangelnden Grunde zu Asymmetrien, bestehend in den durch das Korrespondenzprinzip ausgesprochenen Diskrepanzen für niedere Quantenzahlen zwischen den klassischen Bewegungsfrequenzen und den Frequenzen der harmonischen Lichtoscillatoren $\nu_{nm} = (E_n - E_m)/h$ wie sie aus § 2a folgen. Eine Symmetrisierung gelang bekanntlich mittelst einer Durchdringung dieser asymmetrischen Situation durch Beibehaltung der Frequenzen des einmal als symmetrisch erkannten Falls des harmonischen Oscillators und Sinnloserklärung der klassischen Frequenzen. Die hieraus folgende Verselbständigung der Fourierkoeffizienten, lieferte mittelst des Korrespondenzprinzips die Übersetzung der Poissonklammer zum Kommutator. Hieraus folgt die dem Prinzip vom mangelnden Grunde Rechnung tragende Bestimmung der — gleiches statistisch-thermodynamisches Gewicht tragenden — Energieterme als Funktion von n und h (Matrixmechanik), welche für steigende Harmonizität (hohe n) asymptotisch, in die aus der Forderung gleich grosser Zellen erhaltenen Terme, übergeht.

b) *Wellenmechanik*. Der Ersatz der harmonischen Eigenschwingungen (§ 2b) zur Berechnung der Energieterme eines Partikels in einem Kraftfeld gestützt auf die Zuordnung (R), gelang durch Übersetzung der Hamilton'schen Funktion, in Analogie zum Korrespondenzprinzip, zum Hamilton'schen Operator und entsprechender

Bildung einer Eigenwertgleichung (Wellenmechanik). Bei diesem Verfahren bleiben die Ausführungen von § 2b vollständig in Kraft.

Die in § 3a, b nötige Einführung des Korrespondenzprinzips bedeutet, dass man angelehnt an die Idealfälle des § 2, die allgemeinen Fälle des § 3 mittelst des kanonischen Formalismus definiert. Dadurch ist der Anschluss an die klassische Mechanik automatisch gegeben.

* * *

Damit haben wir die eigentümliche Existenz zweier Quantentheorien als Folge des Postulatenprinzips erklärt. Die beiden Quantentheorien lassen sich nur durch formale Einführung singulärer Gebilde auf ein einheitliches Schema zurückführen (Transformationstheorie), da sie in mathematisch legitimer Weise nur *isomorph* zueinander sind (VON NEUMANN), trotzdem sie dieselben Endresultate liefern²⁾. Diese Isomorphie und die Gleichheit der physikalischen Resultate entspricht in schönster Weise dem Postulatenprinzip, indem sich darin widerspiegelt, dass die Postulate von Statistik und Relativität nicht identische Realisierungen des physikalische Bedeutung besitzenden — Prinzipes vom mangelnden Grunde sind. Die formale Einführung singulärer Gebilde entspricht dem Versuch, die beiden Postulate von Statistik und Relativität auf ein einziges Postulat zurückzuführen.

§ 4. Kanonischer Formalismus.

An den beiden Vierervektoren (x, y, z, t) und (p_x, p_y, p_z, E) fällt auf, dass nur je die ersten drei Komponenten ein kanonisch konjugiertes Paar bilden, nicht aber Zeit und Energie⁹⁾. Wie wir zeigen werden, ist es für die Existenz der statistischen Thermodynamik notwendig, dass Zeit und Energie kein kanonisch konjugiertes Paar bilden. Der dadurch erzeugte, im Hinblick auf das relativistische Postulat unbefriedigende Sachverhalt, wird erklärt durch das Postulatenprinzip, da er aus der gleichzeitigen Präsenz der Postulate von Statistik und Relativität an demselben Objekt (den beiden Vierervektoren) resultiert. Die beiden Postulate könnten miteinander nicht in Konflikt geraten, wenn sie völlig unabhängig voneinander wären.

Der Nachweis, dass aus der Existenz einer statistischen Thermodynamik die Notwendigkeit folgt dass Zeit und Energie nicht kanonisch konjugiert sind, wird durch korrespondenzmässigen Umweg, mittelst Gegenannahme, über die Quantentheorie erbracht.

Wären Zeit und Energie kanonisch konjugiert, so müssten infolge des Korrespondenzprinzips die beiden Grössen in der Quantentheorie einen von Null verschiedenen Kommutator besitzen, woraus folgen würde, dass das Energiespektrum immer kontinuierlich wäre^{3a)} und somit nie ein Adiabatensatz bestehen könnte⁴⁾. Durch korrespondenzmässigen Rückgang auf die klassische Theorie würde hieraus folgen, dass die klassischen Systeme keine adiabatischen Invarianten besitzen^{5a)}. Weder mit Quantensystemen mit kontinuierlichem Energiespektrum noch ihrem klassischen Analogon (keine adiabatischen Invarianten) ist jemals statistische Mechanik getrieben worden, da die Entropie in beiden Fällen nicht als adiabatische Invariante dargestellt werden kann (die Gewichtsfunktion G_i in § 2a muss adiabatisch invariant sein⁶⁾).

Eine Konsequenz des (relativistischen Forderungen zuwiderlaufenden) kanonischen Schemas der Quantentheorie ist, dass es nicht erlaubt, eine Unschärfe zwischen Zeit und Energie herzuleiten (infolge Fehlens eines entsprechenden Kommutators), aus welcher Tatsache die Möglichkeit der Existenz stationärer Zustände folgt (vgl. oben). Das Auftreten einer Relation der Form $\Delta t \cdot \Delta E \lesssim h$ ist eine ganz andere Folge der zeitabhängigen Bewegungsgleichung mit (variablem) äusserem Parameter*), wobei die Existenz stationärer Zustände bereits vorausgesetzt ist. Die Relation stellt eine Trennbedingung dar (gebraucht z. B. bei der Molekularstrahlmethode), und erlaubt einen adiabatischen ($>$) von einem nichtadiabatischen ($<$) quantentheoretischen Prozess zu unterscheiden^{5b)}. Diese beiden Prozesse bilden die Grundlage^{3b)} der experimentellen Kontrolle der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsaussage der Quantentheorie, welche sich (im Widerspruch zum relativistischen Postulat) auf einen Zeitpunkt bezieht.

§ 5. Das Wien'sche Verschiebungsgesetz.

Dieses vor der Quantentheorie bestehende, aber durch sie nicht modifizierte Gesetz, kann auf zweierlei Arten hergeleitet werden, da sowohl ein adiabatischer Prozess wie ein Wechsel des Bezugssystems Energie E und Frequenz ν von Strahlung unter Erhaltung der Entropie ($dS=0$) ändern. Da $\frac{\nu}{T}$ und $\frac{u_\nu}{\nu^3}$ sowohl adiabatische wie auch relativistische Invarianten sind, folgt je $u_\nu(T) = \nu^3 \cdot f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Die

*) In einer uns nicht zugänglichen Arbeit von MANDELSTAM-TAMM scheint dies ebenfalls bemerkt worden zu sein⁷⁾.

reale Bedeutung dieser Herleitungen beruht darauf, dass sich Strahlung gegenseitig nicht stösst. Daher sind die beiden Herleitungen eine (nicht auf einer Unordnungshypothese beruhende) thermodynamische Anwendung der Tatsache, dass E/ν sowohl eine adiabatische wie auch eine relativistische Invariante ist. Deshalb können die beiden Herleitungen als Vorläufer der auf dem Postulatenprinzip beruhenden, in § 2 betrachteten Doppelspurigkeit des Beweises von $E/\nu = h$ angesehen werden.

Es sei noch erwähnt, dass bei der relativistischen Herleitung des Verschiebungsgesetzes die Lorentztransformation in ganz anderer Weise als etwa bei der Transformation der Maxwell'schen Gleichungen (Kovarianz) verwendet wird. Durch Lorentztransformation werden z. B. ν und T geändert und hieraus die gewonnene Aussage postulativ für das untransformierte System (aber transformiertes ν und T) als gültig erklärt. Dieser gedankliche Übergang ist experimentell direkt nicht kontrollierbar, da es nicht gelingt, ν und T mittelst Lorentztransformation so zu ändern, dass das Bezugssystem vor und nach der Transformation im gleichen Bewegungszustand ist. Eine ähnliche Verwendung der Lorentztransformation findet sich beim Nachweis der Universalität von h in § 2b.

§ 6. Partikelumwandlungen.

Für den Effekt des Verschwindens und Entstehens von Teilchen, welcher auf dem relativistisch-mechanischen Satz von der Äquivalenz von Masse und Energie beruht, bestehen in der Quantentheorie zwei Formulierungen, welche mit (a) dem Dualismus (Partikel) bzw. (b) der statistischen Thermodynamik (Oscillatoren) in unmittelbarem Zusammenhang stehen und deren zweifaches Auftreten daher auf dem Postulatenprinzip beruht.

a) Eine relativistische Wellengleichung bildet im Gegensatz zu einer nichtrelativistischen kein Einkörperproblem, da sich aus den ihr gehorchenden Wellenfunktionen, keine den relativistischen Invarianzforderungen genügenden Ausdrücke, die als statistisch-räumliche Teilchendichte interpretiert werden können, bilden lassen.

b) Die zweite Formulierung geht aus vom sogenannten quantentheoretischen Mehrkörperproblem freier Partikel mit gegebener Teilchenzahl (Konfigurationsraummethode), welche gestützt auf die Äquivalenz einer Gesamtheit von Bose- (bzw. Fermi)-Teilchen mit einer Gesamtheit von Oscillatoren (bzw. Quasioscillatoren), auf eine von der Teilchenzahl unabhängige Darstellung gebracht werden

kann. Einem Oscillator und seiner Quantenzahl entspricht nach der genannten Äquivalenz ein Teilchenzustand und die darin enthaltene Teilchenanzahl. Die Möglichkeit zu einer von der Teilchenanzahl unabhängigen Darstellung beruht somit auf der statistisch-thermodynamischen Begründung der Oscillatorquantisierung, welche den Teilchenbegriff nicht benützt, und der daraus folgenden Matrixmechanik (§ 2a, 3a). Da diese Begründung nur für einen Oscillator gegebener Frequenz (ein Teilchenzustand) möglich ist, kann die Eigenschaft der Teilchenerhaltung bzw. deren Umwandlung bei der Oscillatormethode nur in der statistisch-thermodynamischen Nebenbedingung $N = \text{const}$ (N : Teilchenanzahl) bzw. deren Weglassung ausgedrückt werden, was für Gleichgewicht zu den entsprechenden mittleren Quantenzahlen führt^{5c}):

$$n_\nu = \frac{1}{e^{a(T) + \frac{h\nu}{kT}} \mp 1} ; \quad n_\nu = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} \mp 1} .$$

Dieses statistisch-thermodynamische Kriterium der Partikelumwandlung kann durch ein rein quantentheoretisches ersetzt werden*) indem die Einbeziehung von allen beteiligten Oscillatoren in einen Formalismus möglich ist, da die Gesamtheit der quantisierten Oscillatoren einem quantisierten Wellenfelde entspricht (Methode der zweiten Quantisierung). In dieser Theorie wird die Anzahl der Teilchen eine Matrix \mathbf{N} und es liegen dann die Effekte des Verschwindens und Entstehens von Teilchen vor, wenn \mathbf{N} mit anderen beobachtbaren Grössen nicht vertauschbar ist.

§ 7. Selbstenergiewichtigkeit des Elektrons.

Den Ausgangspunkt der Methode der zweiten Quantisierung bildet die mechanische Relation zwischen Energie und Impuls, aus welcher zunächst mittelst der aus dem relativistischen Postulat erhaltenen dualistischen Zuordnung nach § 2b, 3b eine Wellengleichung gewonnen und auf diese das auf dem statistischen Postulat beruhende matrizentheoretische Verfahren (§ 6b) angewandt wird.

Da infolge des Postulatenprinzips eine Abhängigkeit unter den beiden Prozessen besteht, muss gefordert werden, dass ihre doppelte, hintereinanderfolgende Anwendung einen nicht beobacht-

*) Vgl. den analogen Sachverhalt bei dem mit dem Partikelbegriff eng zusammenhängenden mittleren Schwankungsquadrat, z. B. in ⁵), S. 218.

baren Effekt in die Theorie einführt (beispielsweise wird die Formulierung des Verschwindens und Entstehens von Teilchen durch die beiden Prozesse zweimal eingeführt). Da andererseits gerade durch die Theorie der zweiten Quantisierung die bekannten Schwierigkeiten auftreten, welche zudem auch in theoretisch erhaltenen, in der Natur aber nicht auffindbaren Effekten (unendliche Selbstenergie, Polarisierung des Vakuums) bestehen, ergibt sich von selbst die Identifizierung der infolge des Postulatenprinzips geforderten und der wirklich bestehenden unbeobachtbaren Effekte.

Da die Schwierigkeiten somit auf Grund des Postulatenprinzips eine Folge der auf den Postulaten von Statistik und Relativität beruhenden Quantentheorie sind, ergibt sich notwendig, dass die Beseitigungsversuche eine Zerstörung mindestens eines der Postulate bzw. des daraus folgenden Schemas ergeben müssen, wodurch die Doppelwirksamkeit aufgehoben wird. In der Tat gerät die Theorie durch das sogenannte Abschneideverfahren ausserhalb des relativistischen Postulates, oder die Bildung nichtlinearer Wellengleichungen unter Wahrung der Lorentzinvarianz verhindert eine Durchführung der Quantisierung. Ein neuerer Vorschlag (S-Matrix-Methode) schaltet, unter Wahrung des relativistischen Postulates, den kanonischen Formalismus aus, muss aber wie aus § 4 folgt, bei der Bestimmung stationärer Zustände in Schwierigkeiten geraten, was in der Tat zutrifft (vgl. die Notwendigkeit des kanonischen Formalismus für die Quantentheorie in § 3).

§ 8. Die Spin-Statistik-Beziehung⁸⁾.

Teilchen mit Bose-Einstein Statistik werden durch Tensor-, solche mit Fermi-Dirac-Statistik durch Spinorfelder (gegenüber Lorentztransformationen) beschrieben. Erstere sind nach dem Plus- und letztere nach dem Minus-Klammersymbol zu quantisieren. Die Existenz der beiden Kriterien zur Angabe der Statistik eines Teilchens beruht auf dem Postulatenprinzip, denn die Angabe des Feldtypus bzw. des Klammersymbols ist von relativistisch-dualistisch bzw. matrizentheoretischer Art.

Herrn Prof. Dr. A. Mercier sei für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, bestens gedankt. Ebenso für seine wohlwollende Hilfe anlässlich der Schwierigkeiten einer Studienreise nach England.

Seminar für theoretische Physik der Universität Bern.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, 2. Ed. (1944), S. 59, 60.
- ²⁾ J. V. NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932, S. 17.
- ³⁾ W. PAULI, Handbuch der Physik, Bd. 24, 1. Teil, 2. Aufl. (1933); a) S. 140 Fussnote; b) S. 164, 165.
- ⁴⁾ H. A. KRAMERS, Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik, Bd. 1, Leipzig 1933, S. 216.
- ⁵⁾ P. JORDAN, Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936; a) S. 90; b) S. 45; c) S. 198.
- ⁶⁾ A. SMEKAL, Handbuch der Physik, Bd. 9, Berlin 1926, S. 198.
- ⁷⁾ MANDELSTAM-TAMM, Acad. Sci., USSR. Journ. Phys., Vol. 9 (1945), S. 249 bis 254. (Referiert in Math. Rev., Vol. 9 (1948), S. 258.)
- ⁸⁾ W. PAULI, Phys. Rev., Bd. 58 (1940), S. 716.
- ⁹⁾ A. MERCIER und E. KEBERLE, Archives des sciences, Vol. 2 (1949), S. 186.

Higher Approximations in the external field for the Problem of Vacuum Polarization

by G. Källén.

Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland*).

(13. VIII. 1949.)

Summary. The convergence and gauge invariance of the integrals appearing in the higher approximations of vacuum polarization are here discussed for the cases of spinor and scalar fields. Only the comparatively simple case of an external electromagnetic field is treated. The more complicated problem of a quantized field is not discussed.

As a direct result of the charge symmetry the vacuum expectation values of the current commutators vanish if an odd number of current operators are commuted. Hence the terms proportional to ϵ^{2n+1} are identically zero, and in this form the statement is true for both the electrons and the bosons. Of the remaining terms it is shown that only the ϵ^2 and ϵ^4 approximations diverge, but that the still higher terms are both convergent and gauge invariant. It further appears that, apart from a numerical factor, which is the same in both approximations (and equal to $-\frac{1}{2}$), the strongest divergences are the same for the spinor and the scalar fields. The ϵ^2 approximation has previously been treated by JOST and RAYSKI, who have shown that the non-gauge invariant (and divergent) terms compensate each other if one uses a suitable mixture of spinor and scalar fields. In this approximation, however, the logarithmically divergent charge renormalisation remains. The conditions of JOST and RAYSKI are

$$N = 2n \quad (I)$$

$$\sum_{i=1}^N M_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n m_i^2 \quad (II)$$

where N and n are the number of scalar and spinor fields respectively and M_i and m_i are the corresponding masses. In the ϵ^4 approximation the condition (I) alone is sufficient to secure a convergent and gauge invariance result.

*) At leave from: Department of Mechanics and Mathematical Physics, University of Lund, Sweden.

Introduction.

The e^2 approximation of the vacuum-polarization has already been treated by several authors¹⁾ with the aid of the explicitly relativistically invariant quantum dynamics developed by SCHWINGER²⁾ and others. It has been shown by WENTZEL¹⁾ that it is possible to obtain different results for the photon self energy (which can be considered as a special case of the more general problem of the vacuum polarization) if one uses different methods of computing the integrals which appear in the formulae for the vacuum polarization. This question of uniqueness has been further discussed by PAULI and VILLARS¹⁾. In their paper the latter authors have given a method of invariant regularization of the different J -functions with the help of auxiliary masses. These masses, however, are only regarded as a mathematical aid for the computation and in the final result they are allowed to tend to infinity. It has been observed independently by RAYSKI and UMEZAWA³⁾ that it is also possible to regard these masses as observable if one assumes that the corresponding particles obey Bose-statistics. Detailed calculations by JOST and RAYSKI¹⁾ in the e^2 approximation have given as a result that the necessary assumptions in these realistic theories show a remarkable analogy with the more formalistical conditions of PAULI and VILLARS. We wish to extend the work of JOST and RAYSKI to the higher approximations in the fine-structure-constant and have as general equations

$$i \frac{\delta \psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = H(x) \psi[\sigma] \quad (1)$$

$$H(x) = H_F(x) + H_B(x) \quad (1a)$$

$$H_F(x) = - \sum j_{\mu_F}(x) A_{\mu}(x) \quad (2)$$

$$j_{\mu_F}(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) - \psi(x) \gamma_{\mu}^T \bar{\psi}(x)] \quad (2a)$$

$$H_B(x) = - \sum t_{\mu}(x) A_{\mu}(x) \quad (3)$$

¹⁾ E. g. J. SCHWINGER, Phys. Rev. **75**, 651 (1949); G. WENTZEL, Phys. Rev. **74**, 1070 (1948); W. PAULI, F. VILLARS, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949); R. JOST, J. RAYSKI, Helv. Phys. Acta **22**, 457 (1949). For earlier work without use of invariant formalism a summary has been given by V. WEISSKOPF, Det. Kgl. Danske Vid. Selskab, XIV 6 (1936).

²⁾ TOMONAGA, Progr. Theor. Phys. **1**, 27 (1946); J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); *ibid.* **75**, 651 (1949); *ibid.* **76**, 790 (1949); F. J. DYSON: Phys. Rev. **75**, 486 (1949).

³⁾ J. RAYSKI, Acta Physica Polonica **9**, 129 (1948); H. UMEZAWA, J. YUKAWA, E. YAMADA, Progr. Theor. Phys. **3**, 317 (1948).

$$t_\mu(x) = i e s_\mu(x) + \xi_{\mu\nu} A_\nu(x) \cdot e^2 \cdot \varphi^*(x) \varphi(x) \quad (3a)$$

$$s_\mu(x) = \frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial x_\mu} \varphi(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu} \varphi^*(x) \quad (3b)$$

$$\xi_{\mu\nu} = \delta_{4\mu} \cdot \delta_{4\nu} - \delta_{\mu\nu} \quad (3c)$$

Here⁴⁾ $\psi(x)$ and $\bar{\psi}(x) = \psi^*(x) \gamma_4$ are the spinor fields and $\varphi(x)$ and $\varphi^*(x)$ the scalar fields⁵⁾. The symbols $t_\mu(x)$, $s_\mu(x)$ and $\xi_{\mu\nu}$ are defined by equations (3a) (3b) and (3c). The current operator for the scalar field is given by⁶⁾

$$j_{\mu B}(x) = i e s_\mu(x) + 2 \xi_{\mu\nu} A_\nu(x) \cdot e^2 \varphi^*(x) \varphi(x) \quad (4)$$

The total current is

$$j_\mu(x) = \sum j_{\mu_F}(x) + \sum j_{\mu_B}(x) \quad (4a)$$

It may be observed that none of the expressions (3a), (3b) or (3c) are tensors and that only the current $j_\mu(x)$ is a vector. The $A_\mu(x)$ are the four-dimensional vector potentials for the external electromagnetic field. They are here considered as given functions of space and time and not as operators. Hence we neglect the modification of the electromagnetic field due to polarization phenomena. The summations in equations (2) (3) and (4a) are to be extended over the spinor and scalar fields present.

The operators $\psi(x)$ and $\varphi(x)$ satisfy the following relations⁴⁾

$$\{\psi_\alpha(x); \bar{\psi}_\beta(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x-x') \quad (5)$$

$$\{\psi_\alpha(x); \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x); \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0 \quad (5a)$$

$$[\varphi^*(x); \varphi(x')] = i \Delta(x-x') \quad (6)$$

$$[\varphi^*(x); \varphi^*(x')] = [\varphi(x); \varphi(x')] = 0 \quad (6a)$$

Different kinds of fields always commute.

⁴⁾ The notations are essentially the same as those used by SCHWINGER but with natural units ($\hbar = c = 1$).

⁵⁾ Computations by FELDMANN have shown that it is not possible to compensate also the divergent charge renormalisation term by including fields with spin 1 (Unpublished letter to professor PAULI). The same result has also been gotten by H. UMEZAWA, R. KAWABE, Prog. Theor. Phys. (in press).

⁶⁾ G. WENTZEL: Quantentheorie der Wellenfelder.

We want to study the modified current operator, the expectation value of which may be written as²⁾

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \int_{-\infty}^{\sigma} dx' \int_{-\infty}^{\sigma'} dx'' \cdots \int_{-\infty}^{\sigma^{(n-1)}} dx^n \times \\ &\times \langle [H(x^n) [\cdots [H(x'); j_\mu(x) | \cdots]]] \rangle_0 \end{aligned} \quad (7)$$

If the expressions (1a)–(4a) are substituted in equation (7) one gets a sum of commutators, some of which contains only one kind of fields (one of the $\psi(x)$ or one of the $\varphi(x)$ fields). The other terms contain at least one commutator between two different fields and are hence zero. This fact makes it possible to carry through the calculation for each field separately and in the end simply add the results together.

The Spinor fields.

We consider now only one of the spinor fields and write the corresponding parts of the current operator and of the hamiltonian as

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x); \gamma_\mu \psi(x)] \quad (8)$$

$$H(x) = -j_\mu(x) A_\mu(x) \quad (9)$$

In this case equation (7) gives

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \int_{-\infty}^{\sigma} dx' \cdots \int_{-\infty}^{\sigma^{(n-1)}} dx^n A_{\nu_1}(x') \cdots A_{\nu_n}(x^n) \times \\ &\times \langle [j_{\nu_n}(x^n) [\cdots [j_{\nu_1}(x'); j_\mu(x) | \cdots]]] \rangle_0 \end{aligned} \quad (10)$$

and our first task is to evaluate the iterated current commutators in this expression. If n is an even integer we have a commutator of an odd number of current operators, that is an expression of the following form

$$\begin{aligned} \left(\frac{ie}{2}\right)^{2n+1} &\langle [\bar{\psi}(x^{2n}); \gamma_{\nu_{2n}} \psi(x^{2n})] [\cdots [\bar{\psi}(x'); \gamma_{\nu_1} \psi(x')]; \\ &[\bar{\psi}(x); \gamma_\mu \psi(x)] \cdots] \rangle_0 \end{aligned} \quad (11)$$

If we use the charge conjugate spinor $\psi'(x)$ equation (8) might as well be written as

$$j_\mu(x) = -\frac{ie}{2} [\bar{\psi}'(x); \gamma_\mu \psi'(x)] \quad (12)$$

and equation (11) as

$$-\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n+1} \langle [\bar{\psi}'(x^{2n}); \gamma_{\nu_{2n}} \psi'(x^{2n})] [\dots [\bar{\psi}'(x'); \gamma_{\nu_1} \psi'(x')]; [\bar{\psi}(x); \gamma_\mu \psi(x)] \dots] \rangle_0 \quad (13)$$

As the two vacuum expectation values in (11) and (13) are equal we conclude that they are both zero and that equation (10) may be simplified to

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n-1} \int_{-\infty}^{\sigma} dx' \dots \int_{-\infty}^{\sigma^{2n}} dx^{2n+1} A_{\nu_1}(x') \dots A_{\nu_{2n+1}}(x^{2n+1}) \times \\ \times \langle [j_{\nu_{2n+1}}(x^{2n+1}) [\dots [j_{\nu_1}(x'); j_\mu(x)] \dots] \rangle_0 \quad (14)$$

If Ω is an arbitrary operator we have

$$[[\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] \bar{\psi}_\alpha(x'')] = (\bar{\psi}(x) \Omega)_\beta \{ \psi_\beta(x'); \bar{\psi}_\alpha(x'') \} + \\ - \{ \bar{\psi}_\alpha(x''); \psi_\beta(x') \} (\Omega^T \bar{\psi}(x))_\beta = -2i (\bar{\psi}(x) \Omega S(x' - x''))_\alpha \quad (15)$$

In a similar way we get

$$[[\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] \psi_\alpha(x'')] = 2i (S(x'' - x) \Omega \psi(x'))_\alpha \quad (16)$$

and hence

$$[[\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] j_\mu(x'')] = \frac{ie}{2} ([\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] \bar{\psi}_\alpha(x'')) (\gamma_\mu \psi(x''))_\alpha + \\ + (\bar{\psi}(x'') \gamma_\mu)_\alpha [[\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] \psi_\alpha(x'')] - [[\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] \psi_\alpha(x'')] \times \\ \times (\gamma_\mu^T \bar{\psi}(x''))_\alpha - (\psi(x'') \gamma_\mu^T)_\alpha [[\bar{\psi}(x); \Omega \psi(x')] \bar{\psi}_\alpha(x'')] = \\ = e ([\bar{\psi}(x); \Omega S(x' - x'') \gamma_\mu \psi(x'')] - \\ - [\bar{\psi}(x''); \gamma_\mu S(x'' - x) \Omega \psi(x')]) \quad (17)$$

From equation (17) it is immediately seen that the commutator

$$[j_{\nu_n}(x^n) [\dots [j_{\nu_1}(x') j_\mu(x)] \dots]]$$

consists of 2^{n+1} terms of the form

$$\pm \frac{ie^{n+1}}{2} [\bar{\psi}(x^i); \gamma_{\nu_i} S(x^i - x^j) \dots \gamma_{\nu_r} S(x^r - x^s) \gamma_{\nu_s} \psi(x^s)] \quad (18)$$

where $i; \dots r; s$ is some permutation of the numbers $0; 1; \dots n$. With the aid of the formula

$$\langle [\bar{\psi}_\alpha(x); \psi_\beta(x')] \rangle_0 = S_{\beta\alpha}^{(1)}(x' - x)$$

the vacuum expectation value of (18) is given by

$$\pm \frac{i e^{n+1}}{2} Sp[S^{(1)}(x^s - x^i) \gamma_{\nu_i} S(x^i - x^j) \dots \gamma_{\nu_s} S(x^r - x^s) \gamma_{\nu_s}] \quad (19)$$

Hence each term in the series (14) may be written as a sum of 2^{2n+2} terms of the form

$$(-1)^n \left(\pm \frac{e^{2n+2}}{2} \right) \int_{-\infty}^{\sigma} dx' \dots \int_{-\infty}^{\sigma^{2n}} dx^{2n+1} Sp[S^{(1)}(x^s - x^i) \gamma A(x^i) S(x^i - x^j) \dots \gamma A(x^r) S(x^r - x^s) \gamma A(x^s)] \quad (20)$$

If we suppose that the external field does not allow any real pairs to be created we can transform the expression (20) into

$$(-1)^n \left(\pm \left(\frac{e}{2} \right)^{2n+2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \dots dx^{2n+1} \varepsilon(01) \varepsilon(12) \dots \dots \varepsilon(2n; 2n+1) Sp[S^{(1)}(si) \gamma A(i) \dots S(rs) \gamma A(s)] \quad (21)$$

After changing the notations and rearranging the terms in the traces it is always possible to write each term in equation (14) as

$$(-1)^n \left(\frac{e}{2} \right)^{2n+2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \dots dx^{2n+1} (Sp[\gamma_{\mu} S^{(1)}(01) \gamma A(1) S(12) \dots \dots S(2n+1, 0)] E_1^{(2n+1)} + Sp[\gamma_{\mu} S(01) \gamma A(1) S^{(1)}(12) \dots \dots S(2n+1, 0)] E_2^{(2n+1)} + \dots + Sp[\gamma_{\mu} S(01) \gamma A(1) S(12) \dots \dots S^{(1)}(2n+1, 0)] E_{2n+2}^{(2n+1)}) \quad (22)$$

where $E_1^{(2n+1)}$; $E_2^{(2n+1)}$; \dots $E_{2n+2}^{(2n+1)}$ are some functions of the $\varepsilon(i, j)$. It will be proven in the appendix that the expression (22) may be written as

$$(-1)^n \frac{e^{2n+2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \dots dx^{2n+1} ((Sp[\gamma_{\mu} S^{(1)}(01) \gamma A(1) S(12) \dots \dots S(2n+1, 0)] + Sp[\gamma_{\mu} \bar{S}(01) \gamma A(1) S^{(1)}(12) \dots \bar{S}(2n+1, 0)] \dots + \dots + Sp[\gamma_{\mu} S(01) \gamma A(1) \bar{S}(12) \dots S^{(1)}(2n+1, 0)]) \quad (23)$$

and hence

$$\langle j_{\mu}(x) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{2n+2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \dots dx^{2n+1} (Sp[\gamma_{\mu} S^{(1)}(01) \times \dots \times \gamma A(1) \dots \bar{S}(2n+1, 0)] + \dots + Sp[\gamma_{\mu} \bar{S}(01) \gamma A(1) \dots S^{(1)}(2n+1, 0)]) \quad (24)$$

In momentum space this formula reads

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{2n+2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{8n+7} \int \cdots \int dp dp' \cdots dp^{2n+1} \times \\ & \times e^{ix(p-p^{2n+1})} Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma A(p' - p) (i\gamma p' - m) \cdots \\ & \cdots \gamma A(p^{2n+1} - p^{2n}) (i\gamma p^{2n+1} - m)] \left(\frac{\delta(p^2 + m^2)}{(p'^2 + m^2) \cdots (p^{2n+1^2} + m^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta(p'^2 + m^2)}{(p^2 + m^2)(p'^2 + m^2) \cdots (p^{2n-1^2} + m^2)} + \cdots + \frac{\delta(p^{2n+1^2} + m^2)}{(p^2 + m^2) \cdots (p^{2n^2} + m^2)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

where

$$Av(p) = \int Av(x) e^{ipx} dx \quad (26)$$

The equations (24) and (25) give a formal expression for the expectation value of the current operator, but the questions of convergence and gauge invariance are still open.

We first want to give a formal proof of the gauge invariance in momentum space. It is true that this proof is only valid if the integrals converge but we will leave this question unsettled for the moment.

For this calculation we need the following formula

$$\begin{aligned} Sp[\Omega(i\gamma a - m) \gamma q (i\gamma(a+q) - m)] = & i[(a+q)^2 + m^2] Sp[\Omega(i\gamma a - m)] - \\ & - i[a^2 + m^2] Sp[\Omega(i\gamma(a+q) - m)] \end{aligned} \quad (27)$$

In equation (27) a and q are two arbitrary fourdimensional vectors, m a number and Ω an arbitrary operator. The formula (27) may be proven by an explicite calculation e. g. in the following way

$$\begin{aligned} Sp[\Omega(i\gamma a - m) \gamma q (i\gamma(a+q) - m)] = & Sp[\Omega \cdot \gamma a \cdot \gamma q \cdot \gamma(a+q)] - \\ & - im(Sp[\Omega \cdot \gamma q \cdot \gamma(a+q)] + Sp[\Omega \cdot \gamma a \cdot \gamma q]) + m^2 Sp[\Omega] \end{aligned} \quad (28)$$

Using the equation

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

we get from (28)

$$\begin{aligned} & -2qa Sp[\Omega \cdot \gamma a] + a^2 Sp[\Omega \cdot \gamma q] - q^2 Sp[\Omega \cdot \gamma a] - \\ & - mi(q^2 + 2aq) Sp[\Omega] + m^2 Sp[\Omega] = i[(a+q)^2 + m^2] \times \\ & \times Sp[\Omega(i\gamma a - m)] - i(a^2 + m^2) Sp[\Omega(i\gamma(a+q) - m)] \end{aligned}$$

which is the right hand side of (27).

One typical term in (25) may be written as

$$\int \dots \int dp dp' \dots dp^n e^{ix(p-p^n)} Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma A(p' - p) \dots \dots (i\gamma p^n - m)] \frac{\delta(p^{i^2} + m^2)}{(p^2 + m^2) \dots (p^{i-1^2} + m^2) (p^{i+1^2} + m^2) \dots (p^{n^2} + m^2)} \quad (29)$$

(In (29) n is supposed to be odd but for our present purpose we do not need this fact.)

If we make an infinitesimal gauge transformation

$$\left. \begin{aligned} A_\nu(x) &\rightarrow A_\nu(x) + \frac{\partial A(x)}{\partial x_\nu} \\ \varepsilon(p) &= \int e^{ixp} A(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

the integral (29) will be changed by the following amount

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i} \int \dots \int dp \dots dp^n e^{ix(p-p^n)} \frac{\delta(p^{i^2} + m^2)}{(p^2 + m^2) \dots (p^{i-1^2} + m^2) (p^{i+1^2} + m^2) \dots (p^{n^2} + m^2)} \times \\ &\times [Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma (p' - p) (i\gamma p' - m) \gamma A(p'' - p') \dots] \times \\ &\times \varepsilon(p' - p) + Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma A(p' - p) (i\gamma p' - m) \times \\ &\times \gamma (p'' - p') \dots] \varepsilon(p'' - p') + \dots] \end{aligned} \quad (31)$$

Inserting equation (27) in formula (31) we get

$$\begin{aligned} &\int \dots \int dp \dots dp^n e^{ix(p-p^n)} \frac{\delta(p^{i^2} + m^2)}{(p^2 + m^2) \dots (p^{i-1^2} + m^2) (p^{i+1^2} + m^2) \dots (p^{n^2} + m^2)} \times \\ &\times [(p'^2 + m^2) Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma A(p'' - p') \dots] \varepsilon(p' - p) - \\ &-(p^2 + m^2) Sp[\gamma_\mu (i\gamma p' - m) \gamma A(p' - p) \dots] \varepsilon(p' - p) + \\ &+(p''^2 + m^2) Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma A(p' - p) \dots] \times \varepsilon(p'' - p') - \\ &-(p'^2 + m^2) Sp[\gamma_\mu (i\gamma p - m) \gamma A(p' - p) \dots] \varepsilon(p'' - p') + \dots] \end{aligned} \quad (32)$$

With the notation

$$\int dp' A_\nu(p' - p) \varepsilon(p' - p'') = \int dq \varepsilon(q) A_\nu(p'' - p - q) = E_\nu(p'' - p) \quad (33)$$

and the formula

$$\int dp \varepsilon(p' - p) e^{ixp} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 A(x) e^{ixp'} \quad (34)$$

the expression (32) may be written (the terms containing $p^{i^2} + m^2$ give zero due to the factor $\delta(p^{i^2} + m^2)$).

$$\begin{aligned} & \int \dots \int d p' \dots d p^n e^{i x(p' - p'')} \frac{\delta(p^{i^2} + m^2)}{(p'^2 + m^2) \dots (p^{i-1^2} + m^2) (p^{i+1^2} + m^2) \dots (p^{n^2} + m^2)} \times \\ & \times [S p [\gamma_\mu (i \gamma p' - m) \gamma E(p'' - p') (i \gamma p'' - m) \dots] - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 A(x) \times \\ & \times S p [\gamma_\mu (i \gamma p' - m) \gamma A(p'' - p') (i \gamma p'' - m) \dots] + \\ & + S p [\gamma_\mu (i \gamma p' - m) \gamma A(p'' - p') (i \gamma p'' - m) \gamma E(p''' - p'') \dots] - \\ & - S p [\gamma_\mu (i \gamma p' - m) \gamma E(p'' - p') (i \gamma p'' - m) \dots] + \dots \\ & \dots + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 A(x) S p [\gamma_\mu (i \gamma p' - m) \gamma A(p'' - p') \dots]] = 0. \quad (35) \end{aligned}$$

From (35) we conclude that each term in (25) if convergent is also gauge invariant.

To discuss the convergence properties of (25) we write the bracket as

$$\begin{aligned} & \frac{\delta(p^2 + m^2)}{(p'^2 - p^2) \dots (p^{n^2} - p^2)} + \frac{\delta(p'^2 + m^2)}{(p^2 - p'^2) (p''^2 - p'^2) \dots (p^{n^2} - p'^2)} + \dots \\ & \dots + \frac{\delta(p^{n^2} + m^2)}{(p^2 - p^{n^2}) \dots (p^{n-1^2} - p^{n^2})} \quad (36) \end{aligned}$$

We now use the formula

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p'^2 - p^2) \dots (p^{n^2} - p^2)} + \frac{1}{(p^2 - p'^2) \dots (p^{n^2} - p'^2)} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{(p^2 - p^{n^2}) \dots (p^{n-1^2} - p^{n^2})} = 0 \quad (37) \end{aligned}$$

to write (36) as

$$\frac{\delta(p'^2 + m^2) - \delta(p^2 + m^2)}{(p^2 - p'^2) (p''^2 - p'^2) \dots (p^{n^2} - p'^2)} + \dots + \frac{\delta(p^{n^2} + m^2) - \delta(p^2 + m^2)}{(p^2 - p^{n^2}) \dots (p^{n-1^2} - p^{n^2})} \quad (38)$$

Following SCHWINGER this can also be written

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} du \left[\frac{\delta' \left(\frac{1}{2} (p^2 + p'^2) + m^2 + \frac{1}{2} u (p^2 - p'^2) \right)}{(p''^2 - p'^2) \dots (p^{n^2} - p'^2)} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{\delta' \left(\frac{1}{2} (p^2 + p^{n^2}) + m^2 + \frac{1}{2} u (p^2 - p^{n^2}) \right)}{(p'^2 - p^{n^2}) \dots (p^{n-1^2} - p^{n^2})} \right] \quad (39) \end{aligned}$$

By repeating this process it is obviously possible to write (36) in the following form

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^{n-1} \int_{-1}^{+1} du_2 (1-u_2)^{n-2} \dots \int_{-1}^{+1} du_n \delta^{(n)}(m^2 + \\ & + \frac{p^2}{2} + \frac{p'^2}{4} \dots + \frac{p^{n-1^2}}{2^n} + \frac{p^{n^2}}{2^n} - u_1 \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{p'^2}{4} + \frac{p''^2}{8} + \dots + \right. \\ & + \left. \frac{p^{n-1^2}}{2^n} + \frac{p^{n^2}}{2^n}\right) - u_2 (1-u_1) \times \left(-\frac{p'^2}{4} + \frac{p''^2}{8} + \dots + \frac{p^{n-1^2}}{2^n} + \frac{p^{n^2}}{2^n}\right) - \\ & - \dots - u_n (1-u_{n-1}) \dots (1-u_1) \left(-\frac{p^{n-1^2}}{2^n} + \frac{p^{n^2}}{2^n}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

It is now convenient to make a translation of the origins and write (25) in the following way

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n+2} (-1)^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{8n+7} \int \dots \int dq' \dots dq^{2n+1} \times \\ & \times e^{-ix(q' + \dots + q^{2n+1})} K_{\mu \nu_1 \dots \nu_{2n+1}}^{(2n+1)}(q' \dots q^{2n+1}) A_{\nu_1}(q') \dots \\ & \dots A_{\nu_{2n+1}}(q^{2n+1}) \end{aligned} \quad (41)$$

where the kernel $K_{\mu \dots \nu_n}^{(n)}$ according to (40) is given by

$$\begin{aligned} K_{\mu \nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(q' \dots q^n) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{-1}^{+1} dp \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^{n-1} \int_{-1}^{+1} du_2 \times \\ & \times (1-u_2)^{n-2} \dots \int_{-1}^{+1} du_n \delta^{(n)}(m^2 + p^2 + 2pQ + Q^2 + \varphi) Sp[\gamma_\mu \times \\ & \times (i\gamma p - m) \gamma_{\nu_1} (i\gamma(p+q') - m) \gamma_{\nu_2} \times (i\gamma(p+q'+q'') - m) \dots \\ & \dots \gamma_{\nu_n} (i\gamma(p+q'+\dots+q^n) - m)] \end{aligned} \quad (42)$$

Here

$$Q = (1-u_1) \frac{q'}{2} + (1-u_1)(1-u_2) \frac{q''}{4} + \dots + (1-u_1) \dots (1-u_n) \frac{q^n}{2^n} \quad (43)$$

and φ is a bilinear expression in $q' \dots q^n$.

Another translation of the origin transforms (42) into

$$\begin{aligned} K_{\mu \nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(q' \dots q^n) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^{n-1} \dots \int_{-1}^{+1} du_n \int dq \times \\ & \times \delta^{(n)}(q^2 + m^2 + \varphi) Sp[\gamma_\mu (i\gamma(q+a_1) - m) \gamma_{\nu_1} (i\gamma(q+a_2) - m) \dots \\ & \dots \gamma_{\nu_n} (i\gamma(q+a_{n+1}) - m)] \end{aligned} \quad (44)$$

where $a_1 \dots a_{n+1}$ are linear combinations of $q' \dots q^n$ with coefficients which depend on $u_1 \dots u_n$.

We now suppose that the potentials $A_\nu(q)$ vanish for large momenta so that the integrations over $q' \dots q^{2n+1}$ in (41) converge and are thus left with only the q integration in (44). The strongest divergence in this integral is of the form

$$\int d q \delta^{(n)}(q^2 + \alpha^2) q_\mu q_{\nu_1} \dots q_{\nu_n} \quad (45)$$

With the well-known representation of the δ -function (45) may be written

$$\frac{1}{2\pi} \cdot i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dx \int d q e^{i x (q^2 + \alpha^2)} q_\mu q_{\nu_1} \dots q_{\nu_n} \quad (46)$$

The q -space integration in (46) can be performed without difficulty and gives some constant factor λ multiplied by $|x| \cdot x^{-\frac{n+1}{2}-3}$. The integral (46) can therefore be written as

$$\frac{\lambda}{2\pi} \cdot i^n \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot x^{\frac{n-7}{2}} e^{i \alpha^2 x} dx \quad (47)$$

The expression (47) and the kernel (44) converge for $n \geq 4$ but diverge for $n \leq 3$. As we are only interested in odd integers n , the only divergent integrals are

$$(n=1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \alpha^2 x}}{x \cdot |x|} dx \quad (48a)$$

and

$$(n=3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \alpha^2 x}}{|x|} dx \quad (48b)$$

The first one appears in the e^2 approximation and as this case has already been treated by several authors we limit ourselves to the e^4 approximation, where the integral (48b) is the only divergent one. The kernel is here

$$\begin{aligned} K_{\mu \nu_1 \nu_2 \nu_3}^{(3)}(q' q'' q''') &= \frac{1}{64} \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^2 \int_{-1}^{+1} du_2 (1-u_2) \int_{-1}^{+1} du_3 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx \int d q e^{i x (q^2 + m^2 + \varphi)} Sp[\gamma_\mu (i \gamma (q + a_1) - m) \dots \\ &\dots \gamma_{\nu_3} (i \gamma (q + a_4) - m)] \end{aligned} \quad (49)$$

and the divergent term

$$64 \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^2 \int_{-1}^{+1} du_2 (1-u_2) \int_{-1}^{+1} du_3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx \int dq e^{i x(q^2+m^2+\varphi)} \times \\ \times Sp[\gamma_\mu \gamma q \gamma v_1 \gamma q \gamma v_2 \gamma q \gamma v_3 \gamma q] \quad (50)$$

The trace in (50) is easily evaluated and is equal to

$$4\{8 q_\mu q_{v_1} q_{v_2} q_{v_3} - 2q^2 (q_\mu q_{v_1} \delta_{v_2 v_3} + q_\mu q_{v_3} \delta_{v_1 v_2} + q_{v_1} q_{v_3} \delta_{\mu v_3} + \\ + q_{v_2} q_{v_3} \delta_{\mu v_1}) + q^4 (\delta_{\mu v_1} \delta_{v_2 v_3} - \delta_{\mu v_2} \delta_{v_1 v_3} + \delta_{\mu v_3} \delta_{v_1 v_2})\}. \quad (51)$$

The scalar fields.

In this case equation (7) reads

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \int_{-\infty}^{\sigma} dx' \int_{-\infty}^{\sigma'} dx'' \cdots \int_{-\infty}^{\sigma^{(n-1)}} dx^n A_{v_1}(x') \cdots A_{v_n}(x^n) \times \\ \times \langle [t_{v_n}(x^n) [\cdots [t_{v_1}(x') j_\mu(x)] \cdots]] \rangle_0. \quad (52)$$

As both $t_v(x)$ and $j_\mu(x)$ here contain two different powers of e , formula (52) is not an expansion in powers of the charge. It is, however, always possible to rearrange the terms so as to get such an expansion. For this purpose we write

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} e^{n+k+1} \langle j_\mu(x) \rangle^{(n)(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n+1} \langle j_\mu(x) \rangle^{(n)} \quad (53)$$

where

$$\langle j_\mu(x) \rangle^{(n)} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} \langle j_\mu(x) \rangle^{(n-k)(k)} \quad (53a)$$

for odd n , and

$$\langle j_\mu(x) \rangle^{(n)} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \langle j_\mu(x) \rangle^{(n-k)(k)} \quad (53b)$$

when n is even. From equations (52) and (53) we also get

$$\langle j_\mu(x) \rangle^{(n)(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n i^{1-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \cdots dx^n \varepsilon(01) \varepsilon(12) \cdots \varepsilon(n-1, n) \times \\ \times A_{v_1}(x') \cdots A_{v_n}(x^n) \{ \langle [\varphi^*(x^n) \varphi(x^n) [\cdots [\varphi^*(x^{n-k+1}) \varphi(x^{n-k+1}) \times \\ \times [s_{v_{n-k}}(x^{n-k}) [\cdots [s_{v_1}(x') s_\mu(x)] \cdots]] \cdots]] \rangle_0 \xi(n-k+1, n+1) \cdots \\ \cdots \xi(n, n+k) A_{v_{n+1}}(x^{n-k+1}) \cdots A_{v_{n+k}}(x^n) + \cdots \} \quad (54)$$

The bracket in (54) contains one term for each way in which it is possible to pick out $n - k + 1$ indices $\nu_{i_1} \dots \nu_{i_{n-k+1}}$ from the series $\mu \nu_1 \dots \nu_n$. If all $\nu_i \neq \mu$ the corresponding term is multiplied by a factor 2.

From the charge symmetry we see here too that the series in (53) will contain only even powers of e and hence that n in equation (53a) is an odd integer.

By an argument analogous to that leading from equation (14) to equation (23) but with differential operators instead of γ -matrices it is seen that (for n odd)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \dots dx^n \varepsilon(01) \dots \varepsilon(n-1, n) A_{\nu_1}(x') \dots A_{\nu_n}(x^n) \\ & \langle [s_{\nu_n}(x^n) [\dots [s_{\nu_1}(x') s_\mu(x)] \dots]] \rangle_0 = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{4n+3} \int \dots \\ & \dots \int dp dp' \dots dp^n e^{ix(p-p^n)} A_{\nu_1}(p'-p) \dots A_{\nu_n}(p^n - p^{n-1}) \times \\ & \times P^{(n)} \times \left\{ \frac{\delta(p^2 + m^2)}{(p'^2 - p^2) \dots (p^{n^2} - p^2)} + \frac{\delta(p'^2 + m^2)}{(p^2 - p'^2) \dots (p^{n^2} - p'^2)} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \frac{\delta(p^{n^2} + m^2)}{(p^2 - p^{n^2}) \dots (p^{n-1^2} - p^{n^2})} \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

where

$$\begin{aligned} P^{(n)} = & \tau^{(n)} \cdot \sum_j \delta_{4\nu_i} \delta_{4\nu_{i-1}} (p^{i-1^2} + m^2) \left[\pi_{i, i-1}^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_j \delta_{4\nu_j} \delta_{4\nu_{j-1}} \times \right. \\ & \left. \times (p^{j-1^2} + m^2) [\pi_{i, i-1, j, j-1}^{(n)} - \dots] \right] \end{aligned} \quad (56)$$

and

$$\pi^{(n)} = (p'_{\nu_1} + p_{\nu_1}) (p''_{\nu_2} + p'_{\nu_2}) \dots (p^n_{\nu_n} + p^{n-1}_{\nu_n}) (p_\mu + p'_\mu) \quad (57)$$

$$\pi_{i, j, \dots}^{(n)} = \frac{\pi^{(n)}}{(p_{\nu_i}^i + p_{\nu_i}^{i-1}) (p_{\nu_j}^j + p_{\nu_j}^{j-1}) \dots} \quad (58)$$

$$\pi_{i, j, \dots}^{(n)} = 0 \text{ if two indices are equal.}$$

We here have also used the following formula given by JOST and RAYSKI

$$\varepsilon(x) \frac{\partial^2 \Delta(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 (\varepsilon(x) \Delta(x))}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - 2 \delta(x) \delta_{4\mu} \delta_{4\nu} \quad (59)$$

The more general commutators in (54) can be evaluated in the same way. Putting

$$\begin{aligned} & A_{\nu_{n+i}}(n-k+i) A_{\nu_{n-k+i}}(n-k+i) = \\ & = \int \delta(n-k+i, n+i) A_{\nu_{n-k+i}}(n-k+i) A_{\nu_{n+i}}(n+i) dx^{n+i} \end{aligned} \quad (60)$$

we get a formula, which is similar to (56) but with $\xi(ij)$ substituted for $\delta_4 v_i \delta_4 v_{i-1}$ in some of the terms. The expression (53a) may now be written

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle^{(2n+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{8n+7} (-1)^n \int \dots \\ &\dots \int dp dp' \dots dp^{2n+1} e^{ix(p-p^{2n+1})} \\ &\times \bar{P}_{\mu v_1 \dots v_n}^{(2n+1)} \left\{ \frac{\delta(p^2+m^2)}{(\mu'^2-p^2) \dots (p^{2n}-p^2)} + \dots + \frac{\delta(p^{2n^2}+m^2)}{(\mu^2-p^{2n^2}) \dots (p^{n-1^2}-p^{2n^2})} \right\} \times \\ &\times A_{v_1}(p'-p) \dots A_{v_n}(p^n-p^{n-1}) \end{aligned} \quad (61)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\mu v_1 \dots v_n}^{(n)} = \pi^{(n)} - \sum_i f_{v_i v_{i-1}}^{(1)} (p^{i-1^2} + m^2) \pi_{i, i-1}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{v_i v_{i-1} v_j v_{j-1}}^{(2)} \times \\ \times (p^{i-1^2} + m^2) (p^{j-1^2} + m^2) \pi_{i, i-1, j, j-1}^{(n)} - \frac{1}{6} \sum \dots \end{aligned} \quad (62)$$

and $f_{v_i v_{i-1} v_j v_{j-1}}^{(k)}$... is some function of the $\delta_4 v_i$ and $\delta_{v_i v_{i-1}}$. As will be shown in the appendix, f is actually a tensor and equal to

$$f_{v_i v_{i-1} v_j v_{j-1}}^{(k)} = \delta_{v_i v_{i-1}} \delta_{v_j v_{j-1}} \dots \quad (63)$$

The formulae (62) and (63) express the lorentz invariance of equation (61).

To prove the gauge invariance (supposing the integrals in (61) to converge) we need an identity of the same type as equation (27). We have

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\mu v_1 \dots v_n}^{(n)} (pp' \dots p^n) (p'_{v_1} - p_{v_1}) &= (p'^2 - p^2) \times \\ &\times [\pi_1^{(n)} - \sum_i \delta_{v_i v_{i-1}} (p^{i-1^2} + m^2) \pi_{1, i, i-1}^{(n)} + \dots] - (p^2 + m^2) \times \\ &\times (p'_\mu - p_\mu) [\pi_{1,0}^{(n)} - \sum_i \delta_{v_i v_{i-1}} (p^{i-1^2} + m^2) \pi_{1,0, i, i-1}^{(n)} + \dots] - \\ &- (p'^2 + m^2) (p'_{v_2} - p_{v_2}) [\pi_{1,2}^{(n)} - \sum_i \delta_{v_i v_{i-1}} (p^{i-1^2} + m^2) \times \\ &\times \pi_{1,2, i, i-1}^{(n)} + \dots] = (p'^2 + m^2) \bar{P}_{\mu v_2 \dots v_n}^{(n-1)} (p p'' \dots p^n) - \\ &- (p^2 + m^2) \bar{P}_{\mu v_2 \dots v_n}^{(n-1)} (p' p'' \dots p^n). \end{aligned} \quad (64)$$

We can now repeat the calculation from equation (29) to equation (35) but start from (61) instead of (25) and use (64) instead of (27). The result is obviously that, from this formal point of view, (61) is gauge invariant.

Writing (61) as (n odd)

$$\langle j_\mu(x)^{(n)} \rangle = \frac{1}{2} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{4n+3} \int \cdots \int dq' \cdots dq^n e^{-ix(q' + \cdots + q^n)} \times \\ \times \bar{K}_{\mu\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(q' \cdots q^n) A_{\nu_1}(q) \cdots A_{\nu_n}(q^n) \quad (65)$$

we have

$$\bar{K}_{\mu\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(q' \cdots q^n) = \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^{n-1} \cdots \int_{-1}^{+1} du_n \times \\ \times \int dq \delta^{(n)}(q^2 + m^2 + \varphi) \bar{P}_{\mu\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(q + a_1, q + a_2, \dots) \quad (66)$$

(compare equation (44)).

Formula (66) converges or diverges as

$$\int dq \delta^{(n)}(q^2 + \alpha^2) q_\mu q_{\nu_1} \cdots q_{\nu_n} \quad (67)$$

which is the same equation as (45). We thus get exactly the same convergent cases as for the spinor field.

The divergent term of (66) in the case $n = 3$ may according to (62) and (46) be written

$$\frac{1}{64} \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^2 \int_{-1}^{+1} du_2 (1-u_2) \int_{-1}^{+1} du_3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx \int dq e^{ix(q^2 + m^2 + \varphi)} \times \\ \times \{ 16 q_\mu q_{\nu_1} q_{\nu_2} q_{\nu_3} - 4 q^2 (\delta_{\mu\nu_3} q_{\nu_1} q_{\nu_2} + \delta_{\nu_1\mu} q_{\nu_2} q_{\nu_3} + \delta_{\nu_2\nu_1} q_{\nu_3} q_\mu + \\ + \delta_{\nu_3\nu_2} q_{\nu_1} q_\mu) + q^4 (\delta_{\mu\nu_3} \delta_{\nu_1\nu_2} + \delta_{\nu_3\nu_2} \delta_{\mu\nu_1}) \}. \quad (68)$$

Let us now consider a mixture of N scalar fields with masses M_i and n spinor fields with masses m_i . From equations (50), (51) and (68) we get the divergent term in the kernel of the e^4 approximation (after a suitable symmetrization of (51))

$$\frac{1}{64} \int_{-1}^{+1} du_1 (1-u_1)^2 \int_{-1}^{+1} du_2 (1-u_2) \int_{-1}^{+1} du_3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx \left[\left\{ 2 \sum_{i=1}^n e^{ixm_i^2} - \sum_{i=1}^N e^{ixM_i^2} \right\} \times \right. \\ \times \int dq e^{ixq^2} \{ 16 q_\mu q_{\nu_1} q_{\nu_2} q_{\nu_3} - 4 q^2 (\delta_{\mu\nu_3} q_{\nu_1} q_{\nu_2} + \delta_{\nu_1\mu} q_{\nu_2} q_{\nu_3} + \\ + \delta_{\nu_2\nu_1} q_\mu q_{\nu_3} + \delta_{\nu_3\nu_2} q_{\nu_1} q_\mu) + q^4 (\delta_{\mu\nu_3} \delta_{\nu_1\nu_2} + \delta_{\nu_3\nu_2} \delta_{\mu\nu_1}) \} + \\ + (e^{ix\varphi} - 1) \times \left[\sum_{i=1}^n e^{ixm_i^2} Sp[\gamma_\mu \gamma q \gamma_{\nu_1} \gamma q \gamma_{\nu_2} \gamma q \gamma_{\nu_3} \gamma q] - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N e^{ixM_i^2} (\pi^{(3)}(qqqq) - q^2 \sum_i \delta_{\nu_i\nu_{i-1}} \times \right. \\ \left. \left. \times \pi_{i,i-1}^{(3)}(qq) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \delta_{\nu_i\nu_{i-1}} \delta_{\nu_j\nu_{j-1}}) \right] \right] \quad (69)$$

The last term in (69) is convergent as $e^{i\varphi x} - 1$ vanishes linear at the origin. The first term can be made convergent too by the aid of the assumption that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[2 \sum_{i=1}^n e^{ixM_i^2} - \sum_{i=1}^N e^{ixM_i^2} \right] \quad (70)$$

is finite. This is the case if

$$2n = N \quad (71)$$

which is one of the conditions of JOST and RAYSKI. Their other condition

$$2 \sum_{i=1}^n m_i^2 = \sum_{i=1}^N M_i^2 \quad (72)$$

makes (70) vanish, but this assumption is not needed to make (69) converge.

The symmetrisation of (51) that is necessary to get (69) is certainly allowed. In fact, the expressions given by (7) can always be made symmetric in the variables and the whole calculation can be carried through in this way. We have purposely destroyed this symmetry (equations (22) and (55)) to get formulae, which are more easy to handle.

All the integrals appearing in the kernel of the e^4 approximation are now convergent and hence our formal proof of the gauge-invariance may be applied in this case too. The only remaining divergent (but actually gauge invariant) expression in the phenomena is the charge renormalisation term in the e^2 approximation.

I want to express my respectful gratitude to professor W. PAULI, Zürich, who has suggested this investigation to me, and to thank him and Dr. R. JOST and Dr. J. LUTTINGER for many helpful discussions. I am further indebted to professor T. GUSTAFSON, LUND, who has arranged my stay at the Swiss Federal Institute of Technology, and to the Swedish Atomic Committee for financial support.

Appendix.

Proof of equation (23).

From the formulae (17), (20) and (21) the symbols $E_k^{(n)}$ in (22) may be computed. The result is (for n an odd number)

$$\begin{aligned} E_{(n+1-k)}^{(n)} = & (-1)^k [\varepsilon(0n) \varepsilon(n, n-1) \dots \varepsilon(n-k, 1) \varepsilon(12) \varepsilon(23) \dots \\ & \dots \varepsilon(n-k-2, n-k-1) + \varepsilon(0n) \varepsilon(n, n-1) \dots \\ & \dots \varepsilon(n-k+1, 1) \varepsilon(1, n-k) \varepsilon(n-k, 2) \varepsilon(23) \dots \\ & \dots \varepsilon(n-k-2, n-k-1) + \dots] \end{aligned} \quad (73)$$

Denoting

$$(-1)^k [E_{(n+1-k)}^{(n)} - \varepsilon(01) \varepsilon(12) \dots \varepsilon(n-k-1, n-k) \varepsilon(n-k+1, n-k+2) \dots \dots \varepsilon(n-1, n) \varepsilon(n0)]$$

with

$$S^{(n)(k)}(01 \dots n-k-1; n-k \dots n)$$

we get from formula (73) the following recursion formulae

$$\begin{aligned} (k \neq 0) S^{(n)(k)}(01 \dots n-k-1; n-k \dots n) = & \varepsilon(0n) S^{(n-1)(k-1)}(n12 \dots \\ & \dots n-k-1; n-k \dots n-1) + \varepsilon(01) \varepsilon(1n) S^{(n-2)(k-1)}(n23 \dots \\ & \dots n-k-1; n-k \dots n-1) + \dots + \varepsilon(01) \varepsilon(12) \dots \\ & \dots \varepsilon(n-k-2, n) S^{(k+1)(k-1)}(nn-k-1; n-k \dots n-1) + \\ & + (-1)^k \varepsilon(n-k, n-k+1) \dots \varepsilon(n-1, n) \times \\ & \times S^{(n-k)(0)}(012 \dots n-k-1; n) \end{aligned} \quad (74)$$

and

$$\begin{aligned} S^{(n)(0)}(01 \dots n-1, n) = & \varepsilon(01) S^{(n-1)(0)}(12 \dots n-1; n) + \varepsilon(12) \dots \\ & \dots \varepsilon(n-2, n-1) S^{(n-k)(0)}(012 \dots n-k-1; n) \end{aligned} \quad (75)$$

From the identity

$$S^{(2)(0)}(01; 2) = \varepsilon(02) \varepsilon(21) + \varepsilon(01) \varepsilon(12) + \varepsilon(01) \varepsilon(20) = -1 \quad (76)$$

and equation (75) it is immediately seen, that $S^{(n)(0)}$ can be expressed as a sum of terms, each of which do not contain more than $n-2$ factors ε . From (74) the same statement is seen to be true also for the general expression $S^{(n)(k)}$. Using the property that no real pairs can be created, we now get (23) from (22).

Proof of equation (63).

The symbol $\bar{P}_{\mu\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}$ of equation (62) can be computed from equations (54)–(60). The result is (for n odd)

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\mu\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)} = & \pi_{\mu}^{(n)} - \sum_i \delta_{\mu} \nu_i \delta_{\nu_{i-1}} (p^{i-1^2} + m^2) \left[\pi_{i, i-1}^{(n)} - \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_j \delta_{\mu} \nu_j \delta_{\nu_{j-1}} (p^{j-1^2} + m^2) \left[\pi_{i, i-1, j, j-1}^{(n)} - \frac{1}{3} \sum [\dots] \right] + \\ & + \sum_i \xi(i, i-1) (p^{i-1^2} + m^2) \left[\pi_{i, i-1}^{(n)} - \sum_j \delta_{\mu} \nu_j \delta_{\nu_{j-1}} (p^{j-1^2} + m^2) \times \right. \\ & \times \left. \left[\pi_{i, i-1, j, j-1}^{(n)} - \frac{1}{2} \sum [\dots] \right] \right] + \frac{1}{2!} \sum_{i, j} \xi(i, i-1) \xi(j, j-1) \times \\ & \times (p^{i-1^2} + m^2) (p^{j-1^2} + m^2) \left[\pi_{i, i-1, j, j-1}^{(n)} - \sum [\dots] \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \sum [\dots] + \dots \end{aligned} \quad (77)$$

We here use the definition (3c) of $\xi(ij)$ and write down the coefficient for a term consisting of $2l$ factors $\delta_{\mu} \nu_i \delta_{\nu_{i-1}}$ and λ factors $\delta_{\nu_i} \nu_{i-1}$. This coefficient is

$$\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \sum_{s=0}^l \frac{(-1)^s}{s! (l-s)!} = \begin{cases} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} - \frac{(1-1)^l}{l!} = 0 & l \neq 0 \\ \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} & l = 0 \end{cases} \quad (78)$$

The only non-vanishing terms in (77) thus consist only of factors $\delta_{\nu_i} \nu_{i-1}$ with coefficients given by (78). This is formula (63).

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XXII

AUTORENREGISTER -- TABLE DES AUTEURS

	Seite
ACKERET, J.: Elementare Betrachtungen über die Stabilität der Langgeschosse	127
ALDER, F. und HUBER, P.: Eine Methode zur Bestimmung der absoluten Intensität einer Ra-Be-Neutronenquelle	368
BALDINGER, E. und HUBER, P.: Bestimmung der α -Energie von U^{235} und der Halbwertszeit von U^{234}	365
BALDINGER, R.: s. Zbinden, Baldinger und Ganz	411
BALDINGER, E.: s. Meyer, Baldinger, Hahn und Huber	420
BANDERET, E.: Un cas particulier d'inhibition de fluorescence	593
BAUMGARTNER, H.: Feldabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_c bei KH_2PO_4	400
BENE, G.: s. Extermann, Denis et Béné	388
BENE, G. J., DENIS, P. M. et EXTERMANN, R. C.: Spins, moments magnétiques et structure nucléaire	606
Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft .	361
BESSO, MICHEL A.: Structure géométrique des couches électroniques K et L des atomes légers	619
BICHSEL, H.: s. Stebler, Huber und Bichsel	362
BLASER, J. P.: s. Marmier, Blaser, Preiswerk und Scherrer	155
BLASER, J. P., BOEHM, F., MARMIER, P., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.: Fonction d'excitation de la réaction $O^{18}(p, n)F^{16}$	598
BLATTNER, H., KÄNZIG, W. und MERZ, W.: Herstellung und Untersuchung von $BaTiO_3$ Einkristallen	35
BOEHM, F., HUBER, O., MARMIER, P., PREISWERK, P. und STEFFEN, R.: Die Konversion der Gammastrahlen des In^{111}	69
BOEHM, F. und PREISWERK, P.: Dualer Zerfall von In^{111}	331
BOEHM, F. und WALTER, M.: Richtungsverteilung der $\gamma\gamma$ -Koinzidenzen beim In^{111}	378
BORGNIS, F.: Messungen bei höheren Temperaturen an dielektrischen Substanzen im cm-Wellenbereich	149
BORGNIS, F.: Zur paraxialen elektronenoptischen Abbildung.	261
BORGNIS, F.: Zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstandes elektromagnetischer Hohlräume	555
CHARBONNIER, G., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Wirkungsquerschnitt für den Spaltungsprozess an U^{238} mit der Lithium-Gammastrahlung ($h\nu = 17,5$ MeV)	385
CHRÉTIEN, M. und MIESCHER, E.: Bandenspektren von Borfluorid (BF) im Schumanngebiet	588

	Seite
CLUSIUS, KLAUS: Der Diffusionsthermoeffekt als Vorlesungsversuch . . .	135
CLUSIUS, KLAUS: Das Trennrohr VII. Anreicherung der schweren Xenoniso- tope. Bemerkung zur Trennung von mehrkomponentigen Gemischen . .	473
DÉGAILLIER, M., HAENNY, CH. et FAVRE, R.: Construction et étude de comp- teurs de Geiger-Müller à cathode externe	621
DE MANDROT, R.: Les variations thermiques de la biréfringence du quartz dans la région de passage; le cristal élémentaire de silice	579
DENIS, P.: s. Extermann, Denis et Béné	388
DENIS, P. M.: s. Béné, Denis et Extermann	606
ELBRUS, DILSCHAD T. und ZUBER, K.: Die Verteilung der thermischen Neu- tronen in der Umgebung der Kante eines Cadmium-Blechtes	600
EXTERMANN, C. R., DENIS, P. et BÉNÉ: Induction nucléaire, phénomènes de battements	388
EXTERMANN, R. C.: s. Béné, Denis et Extermann	606
FAVRE, R.: s. Dégaillier, Haenny et Favre	621
FIERZ, M.: Zur Theorie der Multipolstrahlung	489
GAILLOUD, M.: s. Haenny, Najar et Gailloud	611
GANZ, E.: s. Zbinden, Baldinger und Ganz	411
GERLACH, WALTER: Über den Erschütterungseinfluss auf die Magnetisierung und seine Temperaturabhängigkeit	142
GILBERT, JACQUES: Sur un phasemètre à tubes électroniques	409
GOLDSCHMIDT, R.: Sur la mesure des caractéristiques diélectriques des ma- tières fibreuses	623
GRAFFUNDER, W.: Die Entwicklung des linearen Accelerators	233
GRÄNICHER, H.: Die Curiekonstante von BaTiO ₃ -Einkristallen	395
HAENNY, CH., LERCH, P. et ROCHAT, O.: Détermination du rapport des sections efficaces du Bore et de l'Uranium par la Méthode photographique . . .	609
HAENNY, CH., NAJAR, M. et GAILLOUD, M.: Contribution à l'étude de la radio- activité du samarium	611
HAENNY, CH.: s. Dégaillier, Haenny et Favre	621
HAHN, B.: s. Meyer, Baldinger, Hahn und Huber	420
HEILPERN, WALTER: Die Absorption des Lichtes durch Sauerstoff bei der Wellenlänge — 2144 ÅE als Funktion des Druckes im Intervall von 0,2 bis 130 kg/cm ²	105
HERZOG, A. und WIELAND, K.: Zur temperaturbedingten Änderung eines Ab- sorptionsspektrums	552
HOURIET, A. et KIND, A.: Classification invariante des termes de la matrice S HUBER, O.: s. Boehm, Huber, Marmier, Preiswerk und Steffen	319
HUBER, O.: s. Steffen, Huber und Humbel	69
HUBER, O.: s. Steffen, Huber und Humbel	167
HUBER, O., RÜETSCHI, R. und SCHERRER, P.: K-Einfang und Positronen- emission von Cu ⁶¹ und Cu ⁶⁴	375
HUBER, O., HUMBEL, F., SCHNEIDER, H. und STEFFEN, R.: Verwendung von Anthracenkristallen in Scintillationszählern	418
HUBER, P.: s. Stebler, Huber und Bichsel	362
HUBER, P.: s. Baldinger und Huber	365
HUBER, P.: s. Meyer, Baldinger, Hahn und Huber	420
HUMBEL, F.: s. Steffen, Huber und Humbel	167
HUMBEL, F.: s. Huber, Humbel, Schneider und Steffen	418
JACOBI, E.: Eine trägerlose Trennung des radioaktiven Indiums von Cadmium JAN, J. P.: Nouvelle représentation de l'effet Hall spontané	66
JONA, F.: Elastische Messungen an piezoelektrischen Kristallen mit der Me- thode von Schäfer und Bergmann	581
	397

JOST, RES und LUTTINGER, J.M.: Strahlungstheoretische Korrekturen zur Paarerzeugung und zur Bremsstrahlung	391
JOST, RES und RAYSKI, JERZY: Remarks on the problem of the vacuum polarization and the photon-self-energy	457
KÄLLÉN, G.: Higher Approximations in the external field for the problem of Vacuum Polarization.	637
KÄNZIG, W.: s. Blattner, Känzig und Merz	35
KÄNZIG, W. und MEIER, R.: Über die Umwandlung unverzwillingter BaTiO ₂ -Kristalle von der kubischen in die tetragonale Phase	585
KEBERLE, E.: Zur gleichartigen Wirksamkeit der Postulate von Statistik und Relativität in der Quantentheorie	627
KELLER, R.: Etude d'une source d'ions du type Penning	78
KELLER, R.: Spectre de masses obtenu par mesure du temps de vol	386
KIND, A.: s. Houriet et Kind	319
KISTLER, W.: Die Messung mechanischer Grössen mit Hilfe elektrostatischer Ladungen	621
LERCH, P.: s. Haenny, Lerch et Rochat.	609
LIEPMANN, H.W.: Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen Stochastischer Funktionen auf Turbulenzmessungen	119
LUTTINGER, J.M.: s. Jost und Luttinger	391
MAEDER, D.: s. Medicus, Maeder und Schneider	603
MARMIER, P.: s. Boehm, Huber, Marmier, Preiswerk und Steffen	69
MARMIER, P., BLASER, J. P., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.: Mesures spectroscopiques des radiations X de radioéléments	155
MEDICUS, H., MAEDER, D. und SCHNEIDER, H.: Das Isomer des Technetiums	99
MEIER, R.: s. Känzig und Meyer	685
MERCIER, R.: Les ondes mécaniques dans les milieux élastiques, visqueux et plastiques et dans les milieux piézoélectriques	405
MERZ, W.: s. Blattner, Känzig und Merz	35
MEYER, K. P., BALDINGER, E., HAHN, B. und HUBER, P.: Koinzidenzanordnung für Scintillationszähler	420
MIESCHER, E.: s. Chrétien und Miescher	588
NAJAR, M.: s. Haenny, Najar et Gailloud	611
NEWBURGH, R.: s. Wieland und Newburgh	590
NIKITINE, S.: Sur le calcul du dichroïsme moléculaire	595
PERRIER, ALBERT: Interprétation thermoélectrique du magnétogalvanisme.	583
PIRENNE, JEAN: Sur la théorie des diélectriques d'Onsager et la polarisation spontanée des cristaux	479
POPPELBAUM, W.: Redresseur stabilisé à potentiomètre électronique	407
PREISWERK, P.: s. Boehm, Huber, Marmier, Preiswerk und Steffen	69
PREISWERK, P.: s. Marmier, Blaser, Preiswerk und Scherrer	155
PREISWERK, P.: s. Boehm und Preiswerk	331
PREISWERK, PETER: Über die tiefsten Anregungszustände der Atomkerne	372
RAYSKI, JERZY: s. Jost und Rayski	457
RIVIER, D.: Une méthode d'élimination des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron	265
ROCHAT, O.: s. Haenny, Lerch et Rochat	609
RÜETSCHI, R.: s. Huber, Rüetschi und Scherrer	375
RYTZ, ALBRECHT: Zur Kenntnis des Funkenzählers	3
SAUER, R.: Stosswellen in der eindimensionalen nichtstationären Gasströmung	467
SCHAEETI, N.: Eine Bildzerlegerröhre ohne Speicherung nach Farnsworth	225

SCHAFROTH, R.: Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel	392
SCHAFROTH, M. R.: Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel	501
SCHERRER, W.: Gravitationstheorie und Elektrodynamik	89
SCHERRER, W.: Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld	537
SCHERRER, P.: s. Marmier, Blaser, Preiswerk und Scherrer	155
SCHERRER, P.: s. Huber, Rüetschi und Scherrer	375
SCHERRER, P.: s. Charbonnier, Scherrer und Wäffler	385
SCHNEIDER, H.: s. Huber, Humbel, Schneider und Steffen	418
SCHNEIDER, H.: s. Medicus, Maeder und Schneider	603
STEBLER, A., HUBER, P. und BICHSEL, H.: $B^{10}(n, \alpha) Li^7$ -Reaktion mit langsamen Neutronen	362
STEFFEN, R.: s. Boehm, Huber, Marmier, Preiswerk und Steffen	69
STEFFEN, R. M., HUBER, O. und HUMBEL, F.: Innere Konversion der γ -Strahlung und Röntgenstrahlung beim K-Einfang schwerer Atomkerne	167
STEFFEN, R.: s. Huber, Humbel, Schneider und Steffen	418
SULZER, P. und WIELAND, K.: Temperaturabhängigkeit der Gesamtabsorption von Joddampf (J_2)	591
TELEGDI, V. L. und VERDE, M.: (γ, α) -Reaktion des C^{12} und das Alphateilchen-Modell leichter Kerne	380
VERDE, MARIO: On the elastic scattering of neutrons by deuterons	339
VERDE, M.: s. Telegdi und Verde	380
VON ARX, A.: Eine verallgemeinerte Theorie der Seignette-Elektrizität	403
WÄFFLER, H.: s. Charbonnier, Scherrer und Wäffler	385
WÄFFLER, H. und YOUNIS, S.: Untersuchung von Kernphotoprozessen an leichten Elementen nach der photographischen Methode	414
WÄFFLER, H. und YOUNIS, S.: Kernphotoprozesse an leichten Elementen	614
WALTER, M.: s. Boehm und Walter	378
WEALE, ROBERT A.: Über die temperaturbedingte Änderung des Absorptionsspektrums des Sehpurpurs	164
WEBER, MAX: Beitrag zur Messung von Erschütterungen	425
WENTZEL, GREGOR: Zur Frage des Spins der π -Mesonen	101
WIELAND, K.: s. Herzog und Wieland	552
WIELAND, K. und NEWBURGH, R.: Neue Bandenspektren der zweiatomigen Bleihalogenide	590
WIELAND, K.: s. Sulzer und Wieland	591
YOUNIS, S.: s. Wäffler und Younis	414
YOUNIS, S.: s. Wäffler und Younis	614
ZBINDEN, R., BALDINGER, E. und GANZ, E.: Messanordnung zur Registrierung von Ultrarotspektren	411
ZUBER, K.: Die Empfindlichkeit bei der quantitativen Autoradiographie	112
ZUBER, K.: s. Elbrus und Zuber	600

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XXII

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES

Fasciculus I

Seite

15. II. 1949

ALBRECHT RYTZ: Zur Kenntnis des Funkenzählers	3
H. BLATNER, W. KÄNZIG und W. MERZ: Herstellung und Untersuchung von BaTiO ₃ Einkristallen.	35
E. JACOBI: Eine trägerlose Trennung des radioaktiven Indiums von Cadmium	66
F. BOEHM, O. HUBER, P. MARMIER, P. PREISWERK und R. STEFFEN: Die Konversion der Gammastrahlen des In ¹¹¹	69
R. KELLER: Etude d'une source d'ions du type Penning	78
W. SCHERRER: Gravitationstheorie und Elektrodynamik	89

Fasciculus II

20. IV. 1949

GREGOR WENTZEL: Zur Frage des Spins der Mesonen.	101
WALTER HEILPERN: Die Absorption des Lichtes durch Sauerstoff bei der Wellenlänge — 2144 ÅE. als Funktion des Druckes im Intervall von 0,2 bis 130 kg/cm	105
K. ZUBER: Die Empfindlichkeit bei der quantitativen Autoradiographie	112
H. W. LIEPMANN: Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen Stochastischer Funktionen auf Turbulenzmessungen	119
J. ACKERET: Elementare Betrachtungen über die Stabilität der Langgeschosse	127
KLAUS CLUSIUS: Der Diffusionsthermoeffekt als Vorlesungsversuch	135
WALTHER GERLACH: Über den Erschütterungseinfluss auf die Magnetisierung und seine Temperaturabhängigkeit	142
F. BORGNIS: Messungen bei höheren Temperaturen an dielektrischen Substanzen in cm-Wellenbereich	149
P. MARMIER, J.-P. BLASER, P. PREISWERK et P. SCHERRER: Mesures spectroscopiques des radiations X de radioéléments	155
ROBERT A. WEALE: Über die temperaturbedingte Änderung des Absorptionsspektrums des Sehpurpurs	164
R. M. STEFFEN, O. HUBER und F. HUMBEL: Innere Konversion der Strahlung und Röntgenstrahlung beim K-Einfang schwerer Atomkerne	167
N. SCHÄETTL: Eine Bildzerlegrohre ohne Speicherung nach Farnsworth.	225

Fasciculus III

30. VI. 1949

W. GRAFFUNDER: Die Entwicklung des linearen Accelerators	233
F. BORGNIS: Zur paraxialen elektronenoptischen Abbildung	261
D. RIVIER: Une méthode d'élimination des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron	265
A. HOURIET et A. KIND: Classification invariante des termes de la matrice S	319
F. BOEHM und P. PREISWERK: Dualer Zerfall von In^{114}	331
MARIO VERDE: On the elastic scattering of neutrons by deuterons	339

Fasciculus IV

15. VIII. 1949

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft	361
A. STEBLER, P. HUBER und H. BICHSEL (Basel): $\text{B}^{10}(\text{n}, \alpha)\text{Li}^7$ -Reaktion mit langsamen Neutronen	362
E. BALDINGER und P. HUBER (Basel): Bestimmung der α -Energie von U^{235} und der Halbwertszeit von U^{234}	365
F. ALDER und P. HUBER (Basel): Eine Methode zur Bestimmung der ab- soluten Intensität einer Ra-Be-Neutronenquelle	368
PETER PREISWERK (ETH. Zürich): Über die tiefsten Anregungszustände der Atomkerne	372
O. HUBER, R. RÜETSCHI und P. SCHERRER (ETH. Zürich): K-Einfang und Positronenmission von Cu^{61} und Cu^{64}	375
F. BOEHM und M. WALTER (ETH. Zürich): Richtungsverteilung der Koinzidenzen beim In^{111}	378
V. L. TELEGI und M. VERDE (ETH. Zürich): (γ, α) -Reaktion des C^{12} und das Alphateilchenmodell leichter Kerne	380
G. CHARBONNIER, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (ETH. Zürich): Wir- kungsquerschnitt für den Spaltungsprozess an U^{238} mit der Lithium- Gammastrahlung ($\hbar\nu \equiv 17,5$ MeV)	385
R. KELLER (Genève): Spectre de masses obtenu par mesure du temps de vol	386
C. R. EXTERMANN, P. DENIS et G. BÉNÉ (Genève): Induction nucléaire, phénomènes de battements	388
RES JOST und J. M. LUTTINGER (Phys. Inst. ETH. Zürich): Strahlungs- theoretische Korrekturen zur Paarerzeugung und zur Bremsstrahlung	391
R. SCHAFROTH (ETH. Zürich): Höhere strahlungstheoretische Nähe- rungen zur Klein-Nishina-Formel	392
H. GRÄNICH (ETH. Zürich): Die Curiekonstante von BaTiO_3 -Ein- kristallen	395
F. JONA (ETH. Zürich): Elastische Messungen an piezoelektrischen Kri- stallen mit der Methode von Schäfer und Bergmann	397
H. BAUMGARTNER (ETH. Zürich): Feldabhängigkeit der Dielektrizitäts- konstanten ϵ_c bei KH_4PO_4	400
A. VON ARX (ETH. Zürich): Eine verallgemeinerte Theorie der Seignette- Elektrizität	403
R. MERCIER (Ecole polytechnique, Lausanne): Les ondes mécaniques dans les milieux élastique, visqueux et plastiques et dans les milieux piézo- électriques	405
W. POPPELBAUM (Lausanne): Redresseur stabilisé à potentiomètre électro- nique	407

	Seite
JACAUES GILBERT (Zürich): Sur un phasemètre à tubes électroniques . . .	409
R. ZBINDEN, E. BALDINGER und E. GANZ (Basel): Messanordnung zur Registrierung von Ultrarotspektren	411
H. WÄFFLER und S. YOUNIS (ETH. Zürich): Untersuchung von Kernphoto- prozessen an leichten Elementen nach der photographischen Methode	414
O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und R. STEFFEN (ETH. Zürich): Verwendung von Anthracen-Kristallen in Scintillationszählern . . .	418
K. P. MEYER, E. BALDINGER, B. HAHN und P. HUBER (Universität Basel): Koinzidenzanordnung für Scintillationszähler	420
MAX WEBER: Beitrag zur Messung von Erschütterungen	425
RES JOST and JERZY RAYSKI: Remarks on the problem of the vacuum polariz- ation and the photonself-energy	457
R. SAUER: Stosswellen in der eindimensionalen nichtstationären Gasströmung	467
KLAUS CLUSIUS: Das Trennrohr VII. Anreicherung der schweren Xenonisotope, Bemerkung zur Trennung von mehrkomponentigen Gemischen	473
JEAN PIRENNE (Université de Liège et Ecole Polytechnique Fédérale, Zürich): Sur la théorie des diélectriques d'Onsager et la polarisation spontanée des cristaux	479
M. FIERZ, Basel: Zur Theorie der Multipolstrahlung	489

Fasciculus V

15. X. 1949

MAX ROBERT SCHAFROTH: Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel	501
W. SCHERRER: Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Ma- teriefeld	537
A. HERZOG und K. WIELAND: Zur temperaturbedingten Änderung eines Ab- sorptionsspektrums	552
F. BORGNIS: Zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstandes elektromagnetischer Hohlräume	555

Fasciculus VI

1. XII. 1949

Compte rendu de la réunion de la Société Suisse de Physique	579
R. DE MANDROT (Lausanne): Les variations thermiques de la biréfringence du quartz dans la région de passage α/β ; le cristal élémentaire de silice	579
J.-P. JAN (Lausanne): Nouvelle représentation de l'effet Hall spontané	581
ALBERT PERRIER (Lausanne): Interprétation thermoélectrique du magné- togalvanisme	583
W. KÄNZIG und R. MEIER (ETH. Zürich): Über die Umwandlung unver- zwilligter BaTiO ₃ -Kristalle von der kubischen in die tetragonale Phase	585
M. CHRÉTIEN und E. MIESCHER (Basel): Bandenspektren von Borfluorid (BF) im Schumanngebiet	588
K. WIELAND und R. NEWBURGH (Zürich): Neue Bandenspektren der zwei- atomigen Bleihalogenide	590
P. SULZER und K. WIELAND (Zürich): Temperaturabhängigkeit der Ge- samtabsorption von Joddampf (J ₂)	591
E. BANDERET (Mulhouse): Un cas particulier d'inhibition de fluorescence	593
S. NIKITINE (Alexandrie et Zurich): Sur le calcul du dichroïsme molé- culaire	595

	Seite
J.-P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER, P. PREISWERK et P. SCHERRER (E.P.F. Zurich): Fonction d'excitation de la réaction $O^{18}(p,n)F^{18}$. . .	598
DILSCHAD T. ELBRUS und K. ZUBER (Istanbul): Die Verteilung der ther- mischen Neutronen in der Umgebung der Kante eines Cadmium-Blechtes . . .	600
H. MEDICUS, D. MAEDER und H. SCHNEIDER (ETH. Zürich): Das Isomer des Technetiums 99	603
G. J. BÉNÉ, P.-M. DENIS, R.-C. EXTERMANN (Université de Genève): Spins, moments magnétiques et structure nucléaire	606
CH. HAENNY, P. LERCH et O. ROCHAT: Détermination du rapport des sections efficaces du Bore et de l'Uranium par la Méthode photogra- phique	609
CH. HAENNY, M. NAJAR et M. GAILLOUD: Contribution à l'étude de la radio- activité du samarium	611
H. WÄFFLER und S. YOUNIS (ETH. Zürich): Kernphotoprozesse an leich- ten Elementen	614
MICHEL A. BESSO (Genève): Structure géométrique des couches électro- niques K et L des atomes légers	619
M. DÉGALLIER, CH. HAENNY et R. FAVRE: Construction et étude de comp- teurs de Geiger-Muller à cathode externe	621
W. KISTLER (Winterthur): Die Messung mechanischer Grössen mit Hilfe elektrostatischer Ladungen	621
R. GOLDSCHMIDT (Cossonay-Gare): Sur la mesure des caractéristiques di- électriques des matières fibreuses	623
E. KEBERLE: Zur gleichartigen Wirksamkeit der Postulate von Statistik und Relativität in der Quantentheorie	627
G. KÄLLÉN: Higher Approximations in the external field for the problem of Vacuum Polarization	637
AUTORENREGISTER.	655
INHALTSVERZEICHNIS	659

Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel

von **Max Robert Schafroth** (ETH. Zürich).

(2. VII. 1949)

Zusammenfassung: Die von der neuen Quantenelektrodynamik entwickelten Methoden zur Subtraktion, resp. „Deutung“, der auftretenden Divergenzen werden, parallel im Impulsraum- und Ortsraumformalismus, auf die e^6 -Näherung zum Comptonquerschnitt angewendet und eine konvergente, lorentz- und eich-invariante Formel (52) für das zuständige Matrixelement gegeben. Der Wirkungsquerschnitt wird explizit nur für den Fall kleiner Energien berechnet. Die Zusatz-hypothesen, die für die Rechnung mit divergenten Ausdrücken notwendig sind, werden ausführlich diskutiert. Besonderes Augenmerk gilt der Ultrarotkatastrophe, die sich in richtiger Weise gegen die des Doppelcomptoneffektes kompensiert.

§ 1. Einleitung.

In den letzten zwei Jahren wurde erkannt, dass die Quantenelektrodynamik trotz der ihr innewohnenden Schwierigkeiten wohl instande ist, bestimmte quantitative Aussagen über höhere strahlungstheoretische Näherungen zu gewissen Problemen zu machen^{1) 3)}. Nachdem Phänomene zweiter Ordnung, wie die Feinstruktur des Wasserstoffspektrums und das magnetische Moment des Elektrons derart behandelt worden waren und die Resultate in schönster Übereinstimmung mit dem Experiment lagen, erhob sich die Frage, ob auch für Probleme 4. Ordnung dieses Verfahren brauchbar bliebe. Insbesondere könnten die Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel interessieren, da dieselben wenigstens in bezug auf Winkelverteilung mit den heutigen experimentellen Möglichkeiten durchaus prüfbar sein dürften. Eine Arbeit von CORINALDESI und JOST²⁾, in der das analoge Problem der Streuung von Licht an skalaren Boseteilchen behandelt worden war, zeigte, dass offenbar auch in 4. Ordnung die Divergenzschwierigkeiten umgangen werden können. Indessen litt diese Arbeit — abgesehen von der Tatsache, dass nur der Fall von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ experimentell interessant ist — an einem fundamentalen Mangel an Lorentzinvarianz. So stellte sich die Aufgabe, dasselbe Problem für Diracelektronen und auf lorentzinvariante Weise in Angriff zu nehmen. Von SCHWINGER³⁾ ist eine lorentzinvariante Formulierung der gesamten Quantenelektrodynamik im Ortsraum angegeben worden, die für Fragen dieser Art besonders angepasst erscheint. Es dürfte indessen nicht

allgemein bekannt sein, dass der übliche Formalismus der Störungsrechnung im Impulsraum dazu vollständig äquivalent ist⁴⁾, und es mag deshalb ein gewisses Interesse haben, die Rechnungen parallel in beiden Formalismen durchzuführen, wie wir das im folgenden tun werden.

Die Idee, welche der erwähnten neuen Entwicklung der Quantenelektrodynamik zugrunde liegt, ist im wesentlichen folgende³⁾:

Die jetzige Theorie ist als eine erste Approximation an eine „richtige Theorie“ aufzufassen, welche bei hohen Energien wesentliche Veränderungen bringen wird. Bei strahlungstheoretischen Problemen der Art, wie sie uns hier interessieren, treten solche hohen Energien nur in virtuellen Zwischenzuständen auf und bewirken das Divergieren gewisser Integrale über diese Zwischenzustände. Man wird erwarten, dass die wesentlichen Abänderungen der künftigen Theorie darin bestehen werden, diese Integrale irgendwie durch konvergente zu ersetzen. Die Tatsache aber, dass sie in der heutigen Fassung der Theorie divergieren, deutet darauf hin, dass ihr Wert sehr stark von dem Verhalten der Theorie bei hohen Energien abhängt. Andererseits sollten die uns interessierenden Phänomene wohl davon weitgehend unabhängig sein. Dies führt zur Vermutung, dass sich diese divergenten resp. „theorieempfindlichen“ Ausdrücke daraus überhaupt wegschaffen lassen sollten. In der Tat zeigt es sich bei allen bisher behandelten Problemen dieser Art, dass sie sich als Korrekturen zu den Ausdrücken einer niedrigeren strahlungstheoretischen Näherung deuten lassen, welche durch Zusätze δm , δe zu der Masse und der Ladung der auftretenden Elementarteilchen hervorgerufen werden. Nun lassen sich aber solche Zusätze experimentell nie von den „wahren“ Grössen trennen, d. h. man hat $m + \delta m$, $e + \delta e$ mit den experimentell gemessenen Werten zu identifizieren („Renormalisation von Masse und Ladung“).

§ 2. Prinzip der Rechnung.

Die mathematische Durchführung der oben dargelegten Ideen verläuft folgendermassen: Wir gehen aus von der Schrödingergleichung des Systems

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = (H_0 + H') \Psi'. \quad (1)$$

Dabei bedeutet: $H_0 = H_0^{\text{Materie}} + H_0^{\text{Strahlung}}$ die Hamiltonfunktion der ungestörten Felder,

H' die Wechselwirkungsenergie.

Im Ortsraum ist es vorteilhaft, in Anlehnung an SCHWINGER³⁾, zu einer anderen Darstellung, der „interaction representation“, überzugehen, indem man die ungestörte Zeitabhängigkeit auf die Observablen überwälzt. Im Sinne einer Massenrenormalisation haben wir dabei die Selbstenergie als untrennbar mit der Masse verknüpft zu betrachten und also mit in die Zeitabhängigkeit zu nehmen; d. h. wir haben für diese anzusetzen:

$$\Psi' = e^{-i \cdot (H_0 + E_s) t} \Psi. \quad (2)$$

Dabei bedeutet E_s die Selbstenergie, deren Form wir noch zu diskutieren haben werden. Die Schrödingergleichung wird damit:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - (H' - E_s) \Psi. \quad (3)$$

Im Impulsraum gehen wir aus vom Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H' - E_s. \quad (1')$$

Die Selbstenergie ist in Analogie zum Ortsraumformalismus zwecks Renormalisation der Masse hinzugefügt worden.

Ausgehend von dieser Grundlage haben wir, im Sinne einer Entwicklung nach Potenzen der Elektronladung e , Störungstheorie zu treiben. (In natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$, wie wir sie hier durchgehend verwenden, zusammen mit dem Heavisideschen Maßsystem ist $e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}$.)

Dabei ist es noch wesentlich, zu bemerken, dass die Theorie in ihrer jetzigen Fassung den Begriff des freien Teilchens gar nicht kennt. Wie man leicht sieht, ist nämlich der Zustand, in welchem nur ein Teilchen vorhanden ist, gar keine Lösung der Schrödingergleichung. Um dem abzuhelpen, gehen wir durch eine kanonische Transformation zu neuen Feldgrößen über, die wir dann mit den physikalischen identifizieren. Auf diese Weise entkoppeln wir die Felder gerade so, dass ein Zustand mit nur einem freien Teilchen Lösung der Schrödingergleichung wird und so jener Begriff in der Theorie einen Platz bekommt. Diese Transformation werden wir natürlich im Sinne unserer Entwicklung nach Potenzen von e ebenfalls nur störungsmässig durchführen.

Schreiben wir

$$\left. \begin{aligned} H' &= e H_1 + e^2 H_2 \\ E_s &= e^2 W + e^4 W' + \dots \\ H'_2 - W &= H_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

so wird, zunächst im Impulsraum, (1') zu

$$H = H_0 + e H_1 + e^2 H_2 - e^4 W' + \dots \quad (1'')$$

Führen wir die erwähnte kanonische Transformation zunächst in erster Näherung durch:

$$H \rightarrow e^{-eS} H e^{+eS} *$$

und verlangen wir im Sinne der Forderung nach Entkoppelung der Felder, dass im neuen Hamiltonoperator die Terme proportional e verschwinden, so kommt

$$H_1 + [H_0, S] = 0$$

und hiermit:

$$H = H_0 + e^2 \mathfrak{H}_2 + e^3 \mathfrak{H}_3' + e^4 \mathfrak{H}_4' - e^4 W' + \dots \quad (5)$$

wo

$$\mathfrak{H}_2 = H_2 + \frac{1}{2} [H_1, S]$$

$$\mathfrak{H}_3' = [H_2, S] + \frac{1}{3} [[H_1, S], S]$$

$$\mathfrak{H}_4' = \frac{1}{2} [[H_2, S], S] + \frac{1}{8} [[[H_1, S], S], S].$$

Bei der Transformation zweiter Ordnung

$$H \rightarrow e^{-e^2 T} H e^{+e^2 T}$$

besteht insofern ein Unterschied gegen vorhin, als \mathfrak{H}_2 im Gegensatz zu H_1 Elemente auf der Energieschale besitzt, die wir mit regulärem T nicht wegtransformieren können. Wir beschränken uns deshalb auf

$$\mathfrak{H}_2 - \underline{\mathfrak{H}}_2 + [H_0, T] = 0$$

und erhalten

$$H = H_0 + e^2 \underline{\mathfrak{H}}_2 + e^3 \mathfrak{H}_3' + e^4 \mathfrak{H}_4' - e^4 W' + \dots \quad (6)$$

wo

$$\mathfrak{H}_4 = \mathfrak{H}_4' + \frac{1}{2} [\mathfrak{H}_2 - \underline{\mathfrak{H}}_2, T].$$

(Unterstreichen eines Operators bedeutet hier und im folgenden stets den Energieschalenanteil desselben.)

$$(k | \underline{O} | l) = \begin{cases} (k | O | l) & (E_k = E_l) \\ 0 & (E_k \neq E_l). \end{cases} \quad (7)$$

*) Es ist hier wohl keine Verwechslung zu befürchten zwischen der Basis der natürlichen Logarithmen und der Elektronladung.

An (6) ist zu erkennen, dass die Entkoppelung im oben definierten Sinne nur dann (bis zur zweiten Ordnung) möglich ist, wenn $\underline{\mathfrak{H}}_2$ keine Diagonalelemente besitzt. Gerade dies wird durch die Massenrenormalisation bewirkt, die also mit der Umdefinition der Felder zusammen nötig ist, um das obige Programm durchzuführen.

Die e^3 -Transformation trägt zu unserem Problem nichts mehr bei. Der Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung wird uns gegeben durch $\|e^2 \underline{\mathfrak{H}}_2 + e^4 \underline{\mathfrak{H}}_4\|^2$, die gesuchten e^6 -Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel also durch $e^6 \{ \underline{\mathfrak{H}}_2^* \underline{\mathfrak{H}}_4 + \underline{\mathfrak{H}}_4^* \underline{\mathfrak{H}}_2 \}$. Unsere Aufgabe besteht somit darin, $\underline{\mathfrak{H}}_4$ zu diskutieren.

Im Ortsraum gehen wir ganz analog von

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (e H_1 + e^2 H_2 - e^4 W') \Psi \quad (4')$$

mit $\Psi = e^{eS} \Psi'$ wo $\frac{\partial S}{\partial t} = -i H_1$ über zu

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = (e^2 \underline{\mathfrak{H}}_2 + e^3 \underline{\mathfrak{H}}_3' + e^4 \underline{\mathfrak{H}}_4' - e^4 W') \Psi' \quad (5')$$

mit denselben Bezeichnungen wie oben.

Die Transformation 2. Ordnung ist hier insofern einfacher als im Impulsraum, als wir die Elemente auf der Energieschale in $\underline{\mathfrak{H}}_2$ auch wegschaffen können. Wir nützen diese Möglichkeit aus und fordern also:

$$\Psi'' = e^{e^2 T} \Psi'''; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -i \underline{\mathfrak{H}}_2.$$

Damit erhalten wir

$$i \frac{\partial \Psi''}{\partial t} = (e^3 \underline{\mathfrak{H}}_3' + e^4 \underline{\mathfrak{H}}_4' - e^4 W') \Psi''. \quad (6')$$

Wegen $T(\infty) - T(-\infty) = -2\pi i \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_2 \neq 0$ enthält diese Transformation dabei zusätzlich zur Umdefinition der Felder noch eine echte Streuung, als Ersatz für den verlorengegangenen Term $\underline{\mathfrak{H}}_2$ in (6).

Das uns interessierende $\underline{\mathfrak{H}}_4$ ist hier gegeben durch

$$2\pi \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot \underline{\mathfrak{H}}_4$$

wobei $\hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4$ mit $\underline{\mathfrak{H}}_4$ zusammenhängt durch

$$(k | \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4 | l) = (k | \underline{\mathfrak{H}}_4 | l) \delta(E_k - E_l).$$

§ 3. Eichinvarianz.

Ein wesentlich nicht-lorentzinvarianter Zug kommt in die Theorie herein durch die Elimination der longitudinalen Komponenten des Strahlungsfeldes mit Hilfe der Nebenbedingung zur Erhaltung der Eichinvarianz. Die Wechselwirkung lautet dann:

$$e H_1 + e^2 H_2 = - \int d^3 x j_\mu(x) \mathfrak{A}_\mu(x) + \frac{1}{8\pi} \int d^3 x \int d^3 x' \frac{\varrho(x) \varrho(x')}{|x - x'|} \quad (8)$$

wo $\mathfrak{A}_\mu(x)$ das transversale Viererpotential:

$$\mathfrak{A}_4 = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

$j_\mu(x)$ der Strom des Elektronenfeldes ($\varrho = -ij_4$) bedeuten. Das Vakuum bezüglich der Photonen ist definiert durch $\mathfrak{A}_\mu^{(+)} \cdot \Psi_{\text{vac}} = 0$ wo $\mathfrak{A}_\mu^{(+)}$ den Anteil von \mathfrak{A}_μ mit positiven Frequenzen bedeutet.

Wir wollen nun zeigen, dass wir für unser Problem die richtigen Resultate erhalten, wenn wir die longitudinalen Photonen nicht eliminieren, die Nebenbedingung vernachlässigen und das Vakuum als den Zustand definieren, in welchem weder transversale noch longitudinale Photonen vorhanden sind; d. h. wenn wir als Wechselwirkung ansetzen:

$$e \tilde{H}_1 = - \int d^3 x j_\mu(x) A_\mu(x); \quad e^2 \tilde{H}_2 = 0 \quad (9)$$

wo nun $A_\mu(x)$ das vollständige Viererpotential bedeutet und das Vakuum definiert ist durch $A_\mu^{(+)} \cdot \Psi_{\text{vac}} = 0$.

Zu beweisen ist also, dass, wenn wir die im Strahlungsfeld bilinearen Terme in $\hat{\mathfrak{S}}_4$ — die allein zum Comptoneffekt beitragen — mit $\hat{\mathfrak{S}}_4^C$ bezeichnen, und falls aus (8) folgt

$$2\pi \hat{\mathfrak{S}}_4^C = \int d^4 x \int d^4 x' J_{\mu\nu}(x, x') \{ \mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x') \}; \quad (10)$$

wo

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

und aus (9)

$$2\pi \hat{\mathfrak{S}}_4^C = \int d^4 x \int d^4 x' \tilde{J}_{\mu\nu}(x, x') \{ A_\mu(x), A_\nu(x') \} \quad (11)$$

gilt:

$$J_{\mu\nu}(x, x') = \tilde{J}_{\mu\nu}(x, x'). \quad (12)$$

Das bedeutet gleichzeitig die Invarianz unseres Resultates gegenüber Umeichung des realen Strahlungsfeldes, da die Eichung von A_μ freibleibt.

Der Beweis verläuft im wesentlichen folgendermassen: Die Vertauschungsrelationen der Potentiale sind:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i \delta_{\mu\nu} D(x-x') \quad (13)$$

$$[\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')] = i \delta_{\mu\nu} D(x-x') + 2i \frac{\partial D_\mu(x-x')}{\partial x_{\nu'}}. \quad (14)$$

Die Vakuumerwartungswerte der symmetrisierten Produkte:

$$\langle \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \rangle_{\text{vac}} = \delta_{\mu\nu} D^1(x-x') \quad (15)$$

$$\langle \{ \mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x') \} \rangle_{\text{vac}} = \delta_{\mu\nu} D^1(x-x') + 2 \frac{\partial D_\mu^1(x-x')}{\partial x_{\nu'}}, \quad (16)$$

D , D^1 sind die invarianten D -Funktionen zur Masse Null in der Bezeichnung von SCHWINGER³⁾, während D_μ und D_μ^1 folgendermassen definiert sind:

$$\begin{aligned} D_\mu(x) &= + \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \frac{d^3 \kappa}{2 |\vec{\kappa}|} \frac{\kappa_\mu}{|\vec{\kappa}|^2} \cos(\kappa x); \quad (\kappa x) = \vec{\kappa} \vec{x} - |\vec{\kappa}| x_0 \\ D_\mu^1(x) &= + \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \frac{d^3 \kappa}{2 |\vec{\kappa}|} \frac{\kappa_\mu}{|\vec{\kappa}|^2} \sin(\kappa x). \end{aligned} \quad (17)$$

Die einzigen im Folgenden verwendeten Eigenschaften derselben sind:

$$\begin{aligned} D_\mu(x) &= D_\mu(-x) \\ D_\mu^1(x) &= -D_\mu^1(-x) \end{aligned} \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} D_4(x) &= \begin{cases} \frac{i}{8\pi |\vec{x}|} & \text{ausserhalb des Lichtkegels} \\ 0 & \text{innerhalb des Lichtkegels} \end{cases} \\ D_k(x) &= \begin{cases} \frac{x_0}{8\pi} \frac{x_k}{|\vec{x}|^3} & \text{ausserhalb des Lichtkegels} \\ 0 & \text{innerhalb des Lichtkegels} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Damit wird zunächst

$$\mathfrak{H}_2 = H_2 + \frac{1}{2i} \int d x'_0 \Theta(x-x') [H_1(x_0), H_1(x'_0)]$$

wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & (x_0 > 0) \\ 1 & (x_0 < 0) \end{cases};$$

$$S = \frac{1}{i} \int d x'_0 \Theta(x-x') H_1(x'_0): \quad S(-\infty) = 0.$$

Setzen wir hierin ein

$$\begin{aligned} & [j_\mu(x) \mathfrak{A}_\mu(x), j_\nu(x') \mathfrak{A}_\nu(x')] = \\ & - \frac{1}{2} \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} \left(i \partial_{\mu\nu} D(x-x') + 2i \frac{\partial D_\mu(x-x')}{\partial x_\nu} \right) \\ & + \frac{1}{2} [j_\mu(x), j_\nu(x')] \{ \mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x') \} \end{aligned}$$

so können wir durch partielle Integration die Ableitung von D_μ auf Θ abwälzen:

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^4x' \Theta(x-x') \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} \frac{\partial D_\mu(x-x')}{\partial x_\nu} \\ & \quad \left(\text{wegen } \frac{\partial j_\nu(x')}{\partial x_\nu} = 0 \right) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^4x' \delta(x_0-x'_0) \{j_\mu(x), \varrho(x')\} D_\mu(x-x') \\ & - \frac{1}{8\pi} \int d^3x \int d^3x' \frac{\varrho(x) \varrho(x')}{|x-x'|}. \end{aligned}$$

Dieser Term kompensiert genau die Coulomb-Wechselwirkung und wir verbleiben mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_2 = & + \frac{1}{4} \int d^3x \int d^4x' \Theta(x-x') \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} D(x-x') \\ & + \frac{1}{4} i \int d^3x \int d^4x' \Theta(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')] \{ \mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x') \} \quad (20) \end{aligned}$$

während man aus (9) erhält:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{H}}_2 = & + \frac{1}{4} \int d^3x \int d^4x' \Theta(x-x') \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} D(x-x') \\ & + \frac{1}{4} i \int d^3x \int d^4x' \Theta(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')] \{ A_\mu(x), A_\nu(x') \}. \quad (20') \end{aligned}$$

Rechnen wir unter Verwendung dessen nun $J_{\mu\nu} - \tilde{J}_{\mu\nu}$ aus, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form

$$\int d^4x'' \int d^4x''' S_{\sigma\varrho\nu\mu} \frac{\partial D_\sigma(x''-x''')}{\partial x_\varrho} + \int d^4x'' \int d^4x''' S'_{\sigma\varrho\nu\mu} \frac{\partial D_\sigma^1(x''-x''')}{\partial x_\varrho}.$$

Dabei sind $S_{\sigma\varrho\nu\mu}$, $S'_{\sigma\varrho\nu\mu}$ Summen von Termen von folgendem Bau: ein Produkt dreier Θ mal einem aus $j_\mu(x)$, $j_\nu(x')$, $j_\varrho(x'')$, $j_\sigma(x''')$ gebildeten Kommutator. Diese Ausdrücke lassen sich zunächst in x, x' symmetrisieren; ferner, wegen der Symmetrieeigenschaften von D_μ und D_μ^1 , kann man bezüglich x'' und x''' im ersten Integral antisymmetrisieren, im zweiten symmetrisieren. Wir dürfen also $S_{\sigma\varrho\nu\mu}$ ersetzen durch $S_{[\sigma\varrho](\nu\mu)}$, $S'_{\sigma\varrho\nu\mu}$ durch $S'_{(\sigma\varrho)(\nu\mu)}$, wobei runde Klammern Symmetrisierung, eckige Antisymmetrisierung an-

deuten. Schliesslich lassen sich solche Produkte dreier Θ — die eine Grössenbeziehung zwischen den x^i festlegen — linear aus vierundzwanzig Basisgrössen $\Theta(iklm)$ aufbauen, wo $\Theta(iklm) = 1$, wenn $x^i < x^k < x^l < x^m$, sonst = 0 ist. Zum Beispiel ist

$$\Theta(x-x')\Theta(x-x'')\Theta(x-x''') = \Theta(0123) + \Theta(0213) + \Theta(0231).$$

Führen wir diese Zerlegung nach der Basis durch, so erhalten wir vierundzwanzig Terme von der Form

$$\int d^4 x'' \int d^4 x''' \Theta(iklm) S_{[\sigma\varrho](\nu\mu)}^{(iklm)} \frac{\partial D_\sigma(x''-x''')}{\partial x_\varrho''} + \int d^4 x'' \int d^4 x''' \Theta(iklm) S'_{(\sigma\varrho)(\nu\mu)}^{(iklm)} \frac{\partial D_\sigma^1(x''-x''')}{\partial x_\varrho''}.$$

Nun können wir partiell integrieren; infolge der Kontinuitätsgleichung für die Ströme wälzt sich dabei die Differentiation nur auf Θ ab. Das liefert z. B.

$$\frac{\partial \Theta(3012)}{\partial x_\varrho''} = + \delta_{\varrho 4} \Theta(301) \delta(x'_0 - x''_0). \quad (21)$$

Fasst man jetzt alle Terme, die zu einer bestimmten Permutation von (301) — z. B. (301) — gehören, zusammen, so findet man, dass sich alle auftretenden Kommutatoren mit Hilfe der Jacobischen Identität derart zusammenfassen lassen, dass $[j_\nu(x'), j_\nu(x'')]$ als Faktor erscheint. Wegen des Faktors $\delta_{\varrho 4} \delta(x'_0 - x''_0)$ in (21) ergibt das $[j_\nu(\tilde{x}', x'_0), j_4(\tilde{x}'', x'_0)]$. Für diesen Kommutator, der auch im Problem der Vakuumpolarisation auftritt, findet man leicht

$$[j_\nu(x'), j_\varrho(x'')] \delta_{\varrho 4} \delta(x'_0 - x''_0) = (\bar{\psi}(x') \gamma^\nu \psi(x'') - \psi(x'') \gamma^\nu \bar{\psi}(x')) \delta^4(x' - x'').$$

Davon verschwindet der „Einteilchenterm“⁽³⁾, da der Einteilchenterm von $\bar{\psi}_\alpha(x') \psi_\beta(x'')$ bei $x' = x''$ regulär ist. Der Vakuum-erwartungswert hingegen ist zunächst unbestimmt

$$\left(\text{nämlich formal} = \frac{\partial \Delta^1(x' - x'')}{\partial x_{\nu'}} \delta^4(x' - x'') \right),$$

muss aber aus physikalischen Gründen zu Null limitiert werden (vgl. 7)). In diesem Sinne dürfen wir also setzen

$$[j_\nu(\tilde{x}', x'_0), j_4(\tilde{x}'', x'_0)] \rightarrow 0.$$

Damit verschwindet unser Integral. Dasselbe gilt für den zweiten Term und ebenso für jede beliebige Permutation von (301). Damit ist (12) bewiesen.

§ 4. Rechnung im Impulsraum.

Nach dem in § 2 angegebenen Schema führen wir zunächst die Rechnung im Impulsraum durch. Auf Grund der Resultate des § 3 brauchen wir dabei keine Coulomb-Wechselwirkung einzuführen, so dass $H_2 = -W$ wird. Einfachheitshalber verwenden wir den Formalismus der Störungstheorie im diskreten Spektrum (indem wir etwa unser System in einen grossen Kasten eingeschlossen denken) und führen später den Grenzübergang zum kontinuierlichen Spektrum aus. Die Zustände numerieren wir symbolisch durch einfache Indizes k, l, m, \dots

In der speziellen Darstellung, in welcher H_0 diagonal ist:

$$(k | H_0 | l) = E_k \cdot (k | 1 | l)$$

wird

$$(k | S | l) = \frac{(k | H_1 | l)}{E_l - E_k}$$

$$(k | T | l) = \frac{(k | S_2 | l)}{E_l - E_k} (E_l \mp E_k); = 0 \quad (E_l = E_k).$$

Rechnen wir damit das \mathfrak{H}_4 aus, so erhalten wir nach einfacher Zusammenfassung der Energienenner:

$$\begin{aligned} (k | \mathfrak{H}_4 | l) = & + \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ E_{n_2} \neq E_k \\ n_1 \neq n_3}} \frac{(k | H_1 | n_1) (n_1 | H_1 | n_2) (n_2 | H_1 | n_3) (n_3 | H_1 | l)}{(E_k - E_{n_1}) (E_k - E_{n_2}) (E_k - E_{n_3})} \quad (a) \\ & - \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ E_{n_2} \neq E_k}} \left\{ \frac{(k | W | n_2) (n_2 | H_1 | n_3) (n_3 | H_1 | l)}{(E_k - E_{n_2}) (E_k - E_{n_3})} + \frac{(k | H_1 | n_1) (n_1 | H_1 | n_2) (n_2 | W | l)}{(E_k - E_{n_1}) (E_k - E_{n_2})} \right\} \quad (b) \\ & - \sum_{n_1 \neq n_3} \frac{(k | H_1 | n_1) (n_1 | W | n_3) (n_3 | H_1 | l)}{(E_k - E_{n_1}) (E_k - E_{n_3})} \quad (b') \\ & - \sum_m \frac{(k | H_1 | m) (m | H_1 | l)}{(E_k - E_m)^2} \{ (k | \mathfrak{H}_2 | k) + (l | \mathfrak{H}_2 | l) - 2(m | \mathfrak{H}_2 | m) \} \quad (c) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{m, p} \frac{(k | H_1 | m) (m | H_1 | l)}{E_k - E_m} \left\{ \left| \frac{(k | H_1 | p)}{E_k - E_p} \right|^2 + \left| \frac{(l | H_1 | p)}{E_l - E_p} \right|^2 \right\} \quad (d) \\ & - \sum_{\substack{m, n \\ E_k \neq E_k}} \frac{(k | H_1 | m) (m | H_1 | n) (n | H_1 | m) (m | H_1 | l)}{(E_k - E_m) (E_k - E_n) (E_m - E_n)} \quad (e) \quad (22) \end{aligned}$$

Dabei sind Summationsbeschränkungen der Art $E_n \neq E_k$ beim Übergang zum kontinuierlichen Spektrum so zu interpretieren, dass über den betreffenden Pol des Integranden der Hauptwert genommen werden soll.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die Terme zu diskutieren, die zu selbstenergieartigen Divergenzen Anlass geben, das sie

kompensierende W aufzusuchen und zu zeigen, dass sich dieses tatsächlich als reine Massenrenormalisation darstellt. Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die oben nur symbolisch dargestellten Matrixelemente aufzuschreiben. Machen wir in gewohnter Weise eine Fourierzerlegung der Felder:

$$\text{Spinorfeld: } \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\sigma=1}^4 \int d^3p a_{\sigma}(\vec{p}) u_{\sigma}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\vec{x} - E_{\sigma}t)} \quad (23)$$

wo

$$E_{\sigma} = \pm \omega(\vec{p}); \omega(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + p^2}$$

$$\sum_{\sigma=1}^4 = \text{Summation über Spin und Energievorzeichen,}$$

$$u_{\sigma}(\vec{p}) = \text{normierte Spinoren}$$

$$a_{\sigma}(\vec{p}) = \text{Absorptionsoperatoren:}$$

$$\{a_{\sigma'}(\vec{p}'), a_{\sigma}(\vec{p})\} = 0$$

$$\{a_{\sigma'}(\vec{p}'), a_{\sigma}(\vec{p}')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\begin{aligned} \text{Strahlungsfeld: } A_{\mu}(\vec{x}, t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\sigma=1}^4 \int \frac{d^3\kappa}{\sqrt{2\kappa}} \{A_s(\vec{\kappa}) e_{\mu}^s e^{i(\vec{\kappa}\vec{x} - \kappa t)} \\ &\quad + A_s^*(-\vec{\kappa}) e_{\mu}^s e^{-i(\vec{\kappa}\vec{x} - \kappa t)}\} \end{aligned} \quad (24)$$

wo

$$\kappa = |\vec{\kappa}|$$

$$\sum_s = \text{Summation über die Polarisationsrichtungen,}$$

$$e_{\mu}^s(\vec{\kappa}) = e_{\mu}^s(-\vec{\kappa}) = \text{Polarisationsvektoren:}$$

$$\sum_{\mu} e_{\mu}^s(\vec{\kappa}) e_{\mu}^{s'}(\vec{\kappa}) = g^{ss'} = \begin{cases} 0 & (s \neq s') \\ +1 & (s = s' = 1, 2, 3) \\ -1 & (s = s' = 0) \end{cases}$$

$$A_s(\vec{\kappa}) = \text{Absorptionsoperatoren:}$$

$$[A_s(\vec{\kappa}), A_{s'}(\vec{\kappa}')] = 0$$

$$[A_s^*(\vec{\kappa}), A_{s'}(\vec{\kappa}')] = -\delta_{ss'} \delta(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}')$$

$$\text{so erhalten wir leicht aus } eH_1 = - \int d^3x j_{\mu} A_{\mu} \text{ mit } j_{\mu} = e(\psi^* \alpha_{\mu} \psi)$$

und unter Weglassen der Zeitfaktoren:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3,2} \sum_{\sigma'\sigma} \sum_{\mu=1}^4 \int \frac{d^3\kappa}{\sqrt{2\kappa}} \int d^3p \int d^3p' \\ &\quad \{ \delta(\vec{p} - \vec{p}' - \vec{\kappa}) (u_{\sigma}^*(\vec{p}) \alpha_{\mu} e_{\mu}^s(\vec{\kappa}) u_{\sigma'}(\vec{p}')) a_{\sigma}^*(\vec{p}) a_{\sigma'}(\vec{p}') A_s(\vec{\kappa}) \\ &\quad + \delta(\vec{p} - \vec{p}' + \vec{\kappa}) (u_{\sigma}^*(\vec{p}) \alpha_{\mu} e_{\mu}^s(\vec{\kappa}) u_{\sigma'}(\vec{p}')) a_{\sigma}^*(\vec{p}) a_{\sigma'}(\vec{p}') A_s^*(\vec{\kappa}) \}. \end{aligned} \quad (25)$$

Das Vakuum ist zu definieren als:

$$\begin{aligned} A_s(\vec{\kappa}) \cdot \Psi_{\text{vac}} &= 0 \text{ bezüglich des Strahlungsfeldes} \\ a_\sigma(\vec{p}) \cdot \Psi_{\text{vac}} &= 0 (E_\sigma > 0) \quad \Bigg| \text{ für das Spinorfeld im Sinne} \\ a_\sigma^*(\vec{p}) \cdot \Psi_{\text{vac}} &= 0 (E_\sigma < 0) \quad \Bigg| \text{ der Löchertheorie.} \end{aligned}$$

Nun zur Diskussion der selbstenergieartigen Divergenzen. Es treten dabei folgende Termtypen auf:

1. Terme mit einer Integration über zwei unabhängige virtuelle Zwischenzustände. Es sind dies Terme in (a) und (e), bei welchen neben der gewünschten Comptonstreuung virtuell ein Elektron-Positron-Paar und ein Photon erzeugt und wieder vernichtet werden. Diese Terme kompensieren sich bis auf gewisse konvergente Restterme, die von der Modifikation des Vakuums durch die bei der Comptonstreuung reell und virtuell vorhandenen Teilchen herrühren.

2. Terme, in denen ein (reelles oder virtuelles) Elektron ein Photon emittiert und später wieder absorbiert: sie kompensieren sich exakt in (a) und (b).

3. Die Terme (c).

4. Paarterme, d. h. Terme, in denen das Vakuum in einem zweistufigen Übergang virtuell ein Paar mit verschwindendem Gesamtimpuls erzeugt: solche treten nur in (a) auf.

5. Die Terme (b) + (b').

Man sieht zunächst ohne weiteres, dass die Terme (c) wegfallen, wenn die Diagonalterme von W genau die Selbstenergie von Elektronen und Photonen im betreffenden Zustand darstellen. Von der Photonselbstenergie weiss man zwar aus Gründen der Eichinvarianz, dass sie verschwinden muss, und dies liefert ja gerade eines der Hauptkriterien für ein sinnvolles Limitierungsverfahren (vgl. 7) und § 8). Um uns aber mit solchen tieferliegenden Fragen hier nicht zu belasten, werden wir in W auch die Photonselbstenergie mitbegreifen, ohne damit etwas Neues einzuführen, da sie, wenn nicht formal im Impulsraum, so doch physikalisch verschwindet.

Für den Selbstenergieoperator setzen wir also an:

$$W = W_e + W_\pi \quad (26)$$

wo W_π eine Photonselbstenergie ist: $W_\pi = \text{const.} \int d^3x \cdot A_\mu(x) A_\mu(x)$, auf die wir nicht näher einzugehen brauchen, und

$$W_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3p \int \frac{d^3\kappa}{2\kappa} \times (u_\sigma^*(\vec{p}) A u_{\sigma'}(\vec{p}')) a_\sigma^*(\vec{p}) a_{\sigma'}(\vec{p}') + \text{conj.} \quad (27)$$

$$A \equiv \sum_{\lambda=1}^4 \left\{ \frac{\alpha_\lambda \frac{\vec{\alpha}(\vec{p}-\vec{\kappa}) + \beta m + \omega(\vec{p}-\vec{\kappa})}{2\omega(\vec{p}-\vec{\kappa})} \alpha_\lambda}{E_\sigma(\vec{p}) - \omega(p-\vec{\kappa}) - |\vec{\kappa}|} + \frac{\alpha_\lambda \frac{\vec{\alpha}(\vec{p}-\vec{\kappa}) + \beta m - \omega(\vec{p}-\vec{\kappa})}{-2\omega(\vec{p}-\vec{\kappa})} \alpha_\lambda}{E_\sigma(\vec{p}) + \omega(p-\vec{\kappa}) + |\vec{\kappa}|} \right\}$$

der von WEISSKOPF und FRENCH⁴⁾ eingeführte Selbstenergieoperator des Elektrons ist. Mit dieser Wahl verschwinden die Diagonalelemente von \mathfrak{H}_2 , d. h. die Terme (c), und die Paartermine in (a) kompensieren sich gegen den divergenten Anteil von (b) + (b').

Der Operator (27) hat zwar nicht die Form einer reinen Massennormalisation, die lauten würde:

$$W_e = \text{const.} \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3p (u_\sigma^*(\vec{p}) \beta u_{\sigma'}(\vec{p}')) a_\sigma^*(\vec{p}) a_{\sigma'}(\vec{p}') \quad (28)$$

und man sieht auch leicht, dass ein Ansatz der Form (28) nicht imstande ist, sämtliche Divergenzen zu kompensieren. Es wäre indessen falsch, zu verlangen, dass die Selbstenergie in unserem unrelativistischen Formalismus die Form (28) haben müsse. Das Einzige, was wir fordern dürfen, ist, dass sie durch konsistente Limitierung in die Form (28) gebracht werden kann, was für (27) zutrifft. (Vgl. ⁴⁾ und § 5). Ausserdem ist es nur konsequent, den Selbstenergieoperator so zu übernehmen, wie er sich im Sinne der verwendeten Störungstheorie ergibt, d. h. eben in der Form (27).

Nachdem auf diese Weise die selbstenergieartigen Divergenzen eliminiert sind, besteht unsere nächste Aufgabe darin, sämtliche verbleibenden Terme durch Aufsuchen aller möglichen Zwischenzustände aufzuschreiben und zusammenzufassen. Das Resultat dieser sehr langwierigen Rechnung ist eine Formel, die immer noch mehrere Druckseiten füllt und deshalb hier nicht wiedergegeben werden kann. Untersucht man die noch darin steckenden Divergenzen bei hohen Impulsen, so findet man, dass sie alle die Form haben: $C \cdot \mathfrak{H}_2$, wo C ein von den Impulsen der Teilchen unabhängiges divergentes Integral darstellt. Man kann sie also als Renormalisation der Ladung interpretieren und subtrahieren; die exakte Determinierung des zu subtrahierenden Ausdrucks werden wir unten vornehmen¹¹⁾.

Ausser den bisher allein erwähnten Divergenzen bei hohen Impulsen enthält unser Ausdruck noch einen nicht-integrablen Pol im Integranden, d. h. eine Ultrarotkatastrophe. Dass dieselbe keine Schwierigkeit darstellt, ist wohlbekannt⁵⁾⁶⁾. Der Grund ist folgender: Bei jedem Streuprozess werden in Wirklichkeit ausser dem gestreuten Photon noch unendlich viele Lichtquanten beliebig kleiner Energie emittiert, so dass die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass genau nur das gestreute Photon emittiert wird, physikalisch keinen Sinn hat. Einzig sinnvoll ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass das gestreute Quant in einem bestimmten Raumwinkелеlement $d\Omega$ liegt und ausser ihm kein anderes von einer Energie $> \mu$ emittiert wird, wo μ eine Grenzenergie darstellt, für die $e^2 \log(\kappa_1/\mu) \ll 1$ gelten muss. ($\vec{\kappa}_1$ = Impuls des Streuphotons). (Vgl. dazu § 9 und 6.) Zu unserer e^6 -Näherung für den Compton-Querschnitt haben wir also noch den Wirkungsquerschnitt für den Doppelcomptoneffekt zu addieren, bei dem das zweite emittierte Photon $< \mu$ ist: dieser ist nämlich ebenfalls $\sim e^6$. Er beträgt für $\mu \ll \kappa_1$:

$$d\sigma''(\mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\lambda=1}^4 \int_{|\vec{\kappa}| < \mu} \frac{d^3\kappa}{|\vec{\kappa}|} \left\{ \frac{p_0^{\lambda}}{(p_0\kappa)} - \frac{p_1^{\lambda}}{(p_1\kappa)} \right\}^2 \cdot d\sigma_4 \quad (29)$$

wo $d\sigma_4$ der Klein-Nishina-Querschnitt, $(p\kappa) = \vec{p}\vec{\kappa} - \omega(\vec{p})|\vec{\kappa}|$ ist. Dies kompensiert, wie man leicht nachrechnet, genau die durch \mathfrak{H}_4 in die e^6 -Korrektur zum Compton-Querschnitt hereingebrachte Divergenz beim Pol des Integranden. Formal kann man die Addition von $d\sigma''(\mu)$ zum Compton-Wirkungsquerschnitt so durchführen dass man den Pol im Integranden von \mathfrak{H}_4 dadurch wegschafft, dass man dem virtuellen Photon die Masse μ erteilt, d. h. einfach $|\kappa|$ durch $\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}$ ersetzt, mit der Abmachung, alle Terme $\leq 0(\mu)$ zu vernachlässigen. Das so erhaltene $\mathfrak{H}_4(\mu)$ bestimmt dann direkt $d\sigma_6 + d\sigma''(\mu) \equiv d\sigma_6(\mu)$. Diese Bemerkung wird uns später noch von Nutzen sein.

Nachdem so die Ultrarotschwierigkeiten eliminiert sind, können wir die genaue Form der Ladungsrenormalisation festlegen durch die von CORINALDESI und JOST²⁾ aufgestellte Forderung, dass im unrelativistischen Grenzfall die Korrekturen verschwinden sollen. Dies bedeutet physikalisch, dass wir die Thomsonformel als Definition der Elementarladung ansehen.

Wir subtrahieren also von $d\sigma_6(\mu)$ ein solches Vielfaches von $d\sigma_4$,

dass nachher $d\sigma_6(\mu) \rightarrow 0$ für $\vec{\kappa}_0 \rightarrow \vec{p}_0$. Damit erhalten wir für unser definitives Matricelement im Impulsraum:

$$\underline{\mathfrak{H}}_4(\mu; \vec{p}_0, \vec{\kappa}_0; \vec{p}_1, \vec{\kappa}_1) - \underline{\mathfrak{H}}_4(\mu; \vec{p}_0, \vec{p}_0; \vec{p}_0, \vec{p}_0) \quad (30)$$

wobei: \vec{p}_0 = Impuls des Anfangselektrons

\vec{p}_1 = „ „ Endelektrons

$\vec{\kappa}_0$ = „ „ Anfangsphotons

$\vec{\kappa}_1$ = „ „ Endphotons

§ 5. Übergang zum Ortsraum, Lorentzinvarianz.

Die mit der in § 4 skizzierten Methode gefundene Formel für $\mathfrak{H}_4(\mu)$ zeichnet ein Bezugssystem aus, und es erwächst uns die Aufgabe, dieselbe in lorentzinvariante Form umzuschreiben. Vorteilhafterweise gehen wir hierzu wieder auf das \mathfrak{H}_4 zurück, in welchem Ladungsrenormalisation und Ultrarotkatastrophe noch enthalten sind, und diskutieren dann dieselben am Schluss analog zu oben.

Wir werden in diesem Paragraphen \mathfrak{H}_4 in den Ortsraum transformieren, wo die Lorentzinvarianz beinahe evident ist. Gleichzeitig erreichen wir damit den Anschluss an den Schwingerschen Formalismus. Zu dieser Transformation benötigen wir die in § 4 angegebenen Fourierdarstellungen der Felder und jene der invarianten D - und S -Funktionen³⁾; des weiteren die Gleichung

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} e^{-i\omega t} = -i\pi \frac{t}{|t|} \equiv -i\pi \varepsilon(t) \quad (31)$$

zur Transformation der Energienenner. P vor dem Integral bedeutet, dass man über den Pol bei $\omega = 0$ den Hauptwert zu nehmen hat, was genau der Summationsbeschränkung in (21) entspricht. Ausserdem ist zu beachten:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} [F(\vec{p}, +\omega(\vec{p})) + F(\vec{p}, -\omega(\vec{p}))] \\ = \int d^4 p \delta(p_\nu p^\nu + m^2) F(\vec{p}, p_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Um ein Beispiel für diese Art von Rechnung zu geben, führen

wir die Transformation des Selbstenergieoperators W_e in (27) durch: Wir schreiben ihn zunächst

$$W_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\mu=1}^4 \int d^3 p \int d^3 p'' \int \frac{d^3 p'}{2\omega(p')} \int \frac{d^3 \kappa}{2\kappa} \delta^3(\vec{p}'' - \vec{p}) \\ \times \delta^3(\vec{p}'' - \vec{\kappa} - \vec{p}') a_{\sigma}^*(\vec{p}) a_{\sigma'}(\vec{p}'') \\ \times \left(u_{\sigma}^*(\vec{p}) \alpha_{\mu} \left[\frac{\vec{\alpha} \vec{p}' + \beta m + \omega(p')}{p_0'' - \omega(p') - \kappa} - \frac{\vec{\alpha} \vec{p}' + \beta m - \omega(p')}{p_0'' + \omega(p') + \kappa} \right] \alpha_{\mu} u_{\sigma'}(\vec{p}'') \right) + \text{conj.}$$

Geht man von den α -Matrizen zu den γ über mit

$$u^* = \bar{u} \gamma^4; \quad \beta = \gamma^4, \quad \alpha_{\mu} = i \gamma^4 \gamma^{\mu}$$

so kann man W_e offenbar schreiben:

$$W_e = + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\mu=1}^4 \int d^3 p \int d^3 p'' \int d^4 p' \int d^4 \kappa \delta(\kappa_0 \kappa^0) \delta(p'_r p'^r - m^2) \\ \times \frac{\delta^3(\vec{p}'' - \vec{p}' - \vec{\kappa})}{p_0'' - p_0' - \kappa_0} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'') \times \frac{1}{2} [\varepsilon(\kappa_0) + \varepsilon(p'_0)] (\bar{u}_{\sigma}(p) \gamma^{\mu} (\gamma^{\lambda} p'_{\lambda} + i m) \\ \times \gamma^{\mu} u_{\sigma'}(p'')) a_{\sigma}^*(p) a_{\sigma'}(p'') + \text{conj.}$$

Durch Fourieranalyse der beiden dreidimensionalen δ -Funktionen und des Energienenners nach (31) wird dies

$$W_e = - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^9 \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\mu=1}^4 \int d^3 \xi \int d^4 \eta \int d^3 p \int d^3 p'' \int d^4 p' \int d^4 \kappa \delta(\kappa_0 \kappa^0) \\ \times \delta(p'_r p'^r + m^2) [\varepsilon(\kappa_0) + \varepsilon(p'_0)] (\bar{u}_{\sigma}(p) \gamma^{\mu} (\gamma^{\lambda} p'_{\lambda} + i m) \gamma^{\mu} u_{\sigma'}(p'')) \\ \times a_{\sigma}^*(p) a_{\sigma'}(p'') \varepsilon(\eta_0) e^{i(\kappa + p' - p'') \cdot \alpha} \eta^{\alpha} e^{i(p - p'') \cdot \beta} \xi^{\beta} + \text{conj.}$$

wobei wir noch die Zeitabhängigkeit beigefügt haben, im Sinne des Übergangs zur interaction representation. Dies ist unter Beachtung der Definition der D - und S -Funktionen und von (23):

$$W_e = - \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^4 \int d^3 x \int d^4 x' (\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} [D_1(x-x') \bar{S}(x-x') \\ + \bar{D}(x-x') S_1(x-x')] \gamma^{\mu} \psi(x')) + \text{conj.} \quad (33)$$

womit die Transformation geleistet ist.

(33) ist genau der Einteilchenterm von $\hat{\mathfrak{H}}_2$, von dem SCHWINGER³⁾ gezeigt hat, dass er durch formale Umformungen, deren Berechtigung man durch konsistente Limitierung etwa nach PAULI und VILLARS⁷⁾ nachweisen kann (vgl. auch § 8), auf die Form einer reinen Massenrenormalisation $\delta m \int \psi(x) \psi(x) d^3 x$ gebracht werden

kann, was die Wahl von (27) nach einer Bemerkung daselbst rechtfertigt.

Transformiert man analog zum Obigen unser $\underline{\mathfrak{H}}_4$, so erhält man, mit den Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &\equiv F(0), F(x') \equiv F(1), F(x'') \equiv F(2), F(x''') \equiv F(3) \\ F(x-x') &\equiv F(01), \dots; \quad \varepsilon(x_0-x'_0) = \frac{x_0-x'_0}{|x_0-x'_0|} \equiv \varepsilon(01) \\ \text{Spur } A &\equiv \langle A \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$2\pi \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4 =$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{4} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \left\{ \begin{aligned} &D_1(03) (\bar{\psi}(0) \gamma^\sigma S(01) \gamma^\mu A_\mu(1) S(12) \gamma^\nu A_\nu(2) S(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \\ &+ \bar{D}(03) (\bar{\psi}(0) \gamma^\sigma S_1(01) \gamma^\mu A_\mu(1) \bar{S}(12) \gamma^\nu A_\nu(2) S(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \\ &+ \bar{D}(03) (\bar{\psi}(0) \gamma^\sigma S(01) \gamma^\mu A_\mu(1) S_1(12) \gamma^\nu A_\nu(2) S(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \\ &+ \bar{D}(03) (\bar{\psi}(0) \gamma^\sigma \bar{S}(01) \gamma^\mu A_\mu(1) \bar{S}(12) \gamma^\nu A_\nu(2) S_1(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \end{aligned} \right\} \quad \text{I.} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \left\{ \begin{aligned} &D_1(13) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) S(01) \gamma^\sigma S(12) \gamma^\nu A_\nu(2) S(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \\ &+ \bar{D}(13) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) \bar{S}(01) \gamma^\sigma S_1(12) \gamma^\nu A_\nu(2) \bar{S}(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \\ &+ \bar{D}(13) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) \bar{S}(01) \gamma^\sigma S(12) \gamma^\nu A_\nu(2) S_1(23) \gamma^\sigma \psi(3)) \end{aligned} \right\} \quad \text{II.} \\ &- \frac{1}{8} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \varepsilon(13) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) S(01) \gamma^\sigma \\ &\times [D_1(12) S(12) + D(12) S_1(12)] \gamma^\sigma \bar{S}(23) \gamma^\nu A_\nu(3) \psi(3)) \quad \text{III.} \\ &- \frac{1}{8} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \varepsilon(13) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) \bar{S}(01) \gamma^\nu A_\nu(1) \\ &\times \bar{S}(12) [D_1(23) S(23) + D(23) S_1(23)] \gamma^\sigma \psi(3)) \quad \text{IV.} \\ &- \frac{1}{4} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \varepsilon(13) D(12) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) \bar{S}(01) \\ &\times \gamma^\sigma \psi(1)) \langle \gamma^\sigma S(23) \gamma^\nu A_\nu(3) S_1(32) \rangle \quad \text{V.} \\ &+ \text{hermitisch konjugiert.} \end{aligned} \quad (34)$$

Dabei haben wir bereits einen Term weggelassen, nämlich:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' (\bar{\psi}(0) \gamma^\sigma \psi(0)) D(03) \langle S(21) \gamma^\mu A_\mu(1) \\ &S(13) \gamma^\sigma S_1(32) \gamma^\nu A_\nu(2) + S_1(21) \gamma^\mu A_\mu(1) \bar{S}(13) \gamma^\sigma S(32) \gamma^\nu A_\nu(2) \\ &+ \bar{S}(21) \gamma^\mu A_\mu(1) S_1(13) \gamma^\sigma \bar{S}(32) \gamma^\nu A_\nu(2) \rangle. \end{aligned}$$

Diesem sieht man im Impulsraum nicht ohne weiteres an, dass er verschwindet, während diese Eigenschaft im Ortsraum sofort evident ist: Man braucht nur bezüglich $(\mu, 1)$ und $(\nu, 2)$ zu symmetrisieren, worauf man sieht, dass die Spur gegenüber simultaner Umkehrung aller dreier Argumente der S -Funktionen schief ist und sich demgemäss ihre Terme gegenseitig kompensieren.

Was nun die Lorentzinvarianz des Ausdruckes (34) betrifft, so ist dieselbe für die Terme I und II ohne weiteres klar, da sie nur invariante Funktionen enthalten; bei den übrigen Termen zeichnet jedoch das freie ε noch ein Bezugssystem aus. Solche Integrale mit einem freien ε , von der Form

$$\int d^4 \xi \varepsilon(\xi) F(\xi)$$

sind dann invariant, wenn $F(\xi)$ ausserhalb des Lichtkegels verschwindet. (Es ist zu beachten, dass wir unter Lorentzinvarianz stets nur Invarianz gegenüber der eingeschränkten Gruppe ohne Zeitumkehr verstehen.) Wir brauchen also nur zu beweisen, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int d^4 \eta \bar{S}(\xi - \eta) \gamma^\sigma [D_1(\eta) S(\eta) + D(\eta) S_1(\eta)] \\ &= \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - m \right) \gamma^\sigma \Phi(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{wo} \quad \Phi(\xi) \equiv \int d^4 \eta \bar{\Delta}(\xi - \eta) [D_1(\eta) S(\eta) + D(\eta) S_1(\eta)] \quad (\text{für III, IV})$$

$$\text{und} \quad F'(\xi) = \int d^4 \eta \bar{D}(\xi - \eta) \langle \gamma^\sigma S(\eta) \gamma^\nu S_1(-\eta) \rangle \quad (\text{für V})$$

ausserhalb des Lichtkegels verschwinden. Nun gilt: Eine invariante Funktion $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$, die ungerade ist: $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = -F(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$, verschwindet ausserhalb des Lichtkegels. Wir brauchen uns also nur um den geraden Teil der obigen Funktionen zu kümmern. Derjenige von Φ z. B. lässt sich schreiben

$$\frac{1}{2} [\Phi(\xi) + \Phi(-\xi)] = \gamma^e \int d^4 \eta \bar{\Delta}(\xi - \eta) [D_1(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_e} \Delta(\eta) + D(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_e} \Delta_1(\eta)]$$

und dies muss aus Invarianzgründen die Form haben

$$\frac{1}{2} [\Phi(\xi) + \Phi(-\xi)] = \gamma^e \frac{\partial}{\partial \xi_e} \psi(\xi)$$

wo nun $\psi(\xi)$ invariant und ungerade ist, und also ausserhalb des Lichtkegels verschwindet. Damit ist die Behauptung für $\Phi(\xi)$ erwiesen, also auch für F . Für F' geht der Beweis analog.

Nachdem so die Lorentzinvarianz von (34) festgestellt ist, könnte man leicht auch die Eichinvarianz verifizieren, d. h. die Invarianz gegenüber einer Ersetzung von A_μ durch $A_\mu + \frac{\partial A}{\partial x_\mu}$. Da wir diese Eigenschaft über schon in § 3 bewiesen haben, gehen wir hierauf nicht näher ein.

Bevor wir zur Diskussion von (34) schreiten, skizzieren wir noch die direkte Herleitung im Ortsraum.

§ 6. Rechnung im Ortsraum.

Wir gehen mit dem in § 3 begründeten Ansatz für die Wechselwirkung

$$e H_1 \equiv e \int d^3 x h(x) = - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3 x \quad (35)$$

wo

$$j_\mu(x) = i e (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x))$$

in das Schema von § 2 ein. Für die Selbstenergie setzen wir ein

$$e^2 W = e^2 \int d^3 x w(x) \quad (33')$$

$$\text{mit } w(x) = -\frac{1}{4} \int d^4 x' (\bar{\psi}(0) \gamma^\sigma [\bar{S}(01) D_1(01) + S_1(01) \bar{D}(01)] \gamma^\sigma \psi(1)) \\ + \text{conj.}$$

NB. Auch hier gerät man in Schwierigkeiten, wenn man statt (33') direkt eine formale Massenrenormalisation

$$w'(x) = \delta m (\bar{\psi}(x) \psi(x))$$

mit divergentem δm ansetzt. Vgl. dazu ⁸⁾.

Für die Felder gelten die Vertauschungsrelationen

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i \delta_{\mu\nu} D(x-x') \quad (36)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = -i S(x-x'); \quad \{\psi, \psi'\} = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}'\} = 0 \quad (36')$$

Dabei bedeutet, wie früher, $[A, B]$ den Kommutator, $\{A, B\}$ den Antikommutator. Ausserdem brauchen wir die Vakuumerwartungswerte:

$$(\{A_\mu(x), A_\nu(x')\})_{\text{vac}} = \delta_{\mu\nu} D_1(x-x') \quad (37)$$

$$([\psi(x), \bar{\psi}(x')])_{\text{vac}} = -S_1(x-x') \quad (37')$$

Aus $\dot{S} = -i H_1$ folgt

$$S = -\frac{i}{2} \int d^4 x' \varepsilon(01) h(1)$$

wobei wir die Integrationskonstante anders gewählt haben als in § 3, was für diesen Zweck günstiger ist. Damit:

$$\mathfrak{H}_2 = - \int d^3 x w(x) - \frac{i}{4} \int d^3 x \int d^4 x' \varepsilon(01) [h(0), h(1)]$$

Für T gilt: $\dot{T} = -i\mathfrak{H}_2$. Wir zerlegen es in zwei Anteile, wovon der eine nur $w(x)$, der andere nur $h(x)$ enthält:

$$\dot{T}_1 = -\frac{i}{2} [H_1, S]: T_1 = -\frac{1}{8} \int d^4 x' \int d^4 x'' \varepsilon(01) \varepsilon(12) [h(1), h(2)]$$

$$\dot{T}_2 = +iW: T_2 = +\frac{i}{2} \int d^4 x' \varepsilon(01) w(1).$$

\mathfrak{H}_4 zerfällt dadurch ebenfalls in zwei Teile:

$$\text{a) Terme ohne } w: \mathfrak{H}'_4 = \frac{1}{8} [[H_1, S], S], S] + \frac{1}{4} [[H_1, S], T_1]$$

$$\text{b) Terme mit } w: \mathfrak{H}''_4 = -\frac{1}{4} [[W, S], S] - \frac{1}{2} [W, T_1] + \frac{1}{4} [[H_1, S], T_2]$$

Dabei ist ein Term $[W, T_2]$ weggelassen, da er nur eine Selbstenergie 4. Ordnung darstellt und zu unserem Problem keinen Beitrag liefert.

$\hat{\mathfrak{H}}'_4, \hat{\mathfrak{H}}''_4$ können durch Anwendung der Jacobischen Identität, Umnummerierung der Variablen und Zusammenfassung der auftretenden Produkte dreier ε geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi \hat{\mathfrak{H}}'_4 &= \frac{i}{32} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' [[h(0), h(1)], h(2)], h(3)] \\ &\quad \times \varepsilon(01) \varepsilon(02) \varepsilon(23) \\ 2\pi \hat{\mathfrak{H}}''_4 &= -\frac{1}{4} \int d^4 x \int d^4 x'' \int d^4 x''' [[w(0), h(2)], h(3)] \varepsilon(02) \varepsilon(23) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

NB. Die Zusammenfassung der Produkte dreier ε ist wegen (31) materiell identisch mit der Zusammenfassung von Energienennern an entsprechender Stelle im Impulsraumformalismus; ausserdem ist sie jedoch auch formal analog. Dies beruht auf Folgendem. Die exakte Identität

$$(a) \quad \varepsilon(ik) \varepsilon(il) \equiv 1 + \varepsilon(ik) \varepsilon(kl) - \varepsilon(il) \varepsilon(kl)$$

reduziert sich stets auf

$$(b) \quad \varepsilon(ik) \varepsilon(il) \longrightarrow \varepsilon(ik) \varepsilon(kl) - \varepsilon(il) \varepsilon(kl)$$

da die Eins im Integral wegen $\int d^4x \cdot h(x) = 2\pi \hat{\mathfrak{H}}_1 = 0$ keinen Beitrag gibt. (b) ist aber identisch mit der Energienennerzusammenfassung

$$\frac{1}{E_i - E_k} \frac{1}{E_i - E_l} = \frac{1}{E_i - E_k} \frac{1}{E_k - E_l} - \frac{1}{E_i - E_l} \frac{1}{E_k - E_l}$$

In die Formel (38) haben wir die Ausdrücke (35), (33') einzusetzen und mit Hilfe von

$$[j_\mu A_\mu, j'_\nu A'_\nu] = \frac{1}{2} \{j_\mu, j'_\nu\} [A_\mu, A'_\nu] + \frac{1}{2} [j_\mu, j'_\nu] \{A_\mu, A'_\nu\} \quad (39)$$

und den Gleichungen (36) die Kommutatoren auszuführen, und schliesslich vom Ganzen die „Einteilchenterme“ zu bilden, unter Verwendung von (37). Diese Operationen entsprechen genau dem Aufsuchen aller Zwischenzustände im Impulsraum, sind aber bedeutend kürzer als jenes. Hierin liegt — neben der evidenten Lorentzinvarianz — der Hauptvorteil des Ortsraumformalismus gegenüber demjenigen im Impulsraum.

Anschliessend kann durch erneutes Umnummerieren der Variablen und Zusammenfassung von ε -Produkten die Formel, wieder analog dem entsprechenden Schritt im Impulsraum, weiter vereinfacht werden. Zum Schlusse erhalten wir so eine Formel, die sich von (34) nur um Terme unterscheidet, welche die Photonselbstenergie enthalten, die wir ja hier im Gegensatz zu § 4 nicht subtrahiert haben. Da diese aber, wie bereits erwähnt, aus Gründen der Eichinvarianz verschwinden resp. zu Null limitiert werden muss, was das in § 8 zugrunde gelegte Regularisierungsverfahren auch erreicht, so ist dieser Unterschied ohne Bedeutung.

§ 7. Auswertung der Formel (34).

Die Formel (34) enthält, so wie sie da steht, noch Unbestimmtheiten, da die Ausdrücke im Integranden singulär sind und je nach Art der Zusammenfassung der Terme sich ein anderes Resultat ergeben kann. In diesem Paragraphen werden wir die Auswertung formal nach einem bestimmten Verfahren durchführen, und erst in § 8 uns mit der Frage nach Rechtfertigung dieser Rechnung befassen.

Zunächst kann man zeigen, dass der Term (V) in (34) verschwindet. Unter Beachtung der Relation

$$-\varepsilon(13) \bar{D}(12) S(23) = \varepsilon(13) D(12) \bar{S}(23) + 2 D(12) \bar{S}(23)$$

kann man ihn nämlich schreiben

$$+ \frac{1}{4} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \{ \varepsilon(13) D(12) + 2 \bar{D}(12) \} \\ \times (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) \bar{S}(01) \gamma^\sigma \psi(1)) < \gamma^\sigma \bar{S}(23) \gamma^\nu S_1(32) > A_\nu(3). \quad (40)$$

Nun ist — vgl. ³⁾ und ⁷⁾ —

$$\delta j_\mu(x) = \int d^4 x' < \gamma^\mu \bar{S}(01) \gamma^\nu S_1(10) > A_\nu(1)$$

der durch das Feld $A_\nu(x)$ induzierte Vakuumpolarisationsstrom, und dieser verschwindet in Anwendung auf die Schrödingerfunktion, falls $\square A_\nu = 0$, was im wesentlichen identisch ist mit dem Verschwinden der Photonselbstenergie. (40) wird also:

$$+ \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \bar{D}(12) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) \bar{S}(01) \gamma^\sigma \psi(1)) \delta j_\sigma(2) \\ + \frac{1}{4} \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x''' \varepsilon(13) (\bar{\psi}(0) \gamma^\mu A_\mu(0) S(01) \gamma^\sigma \psi(1)) A_\nu(3) \delta j'_{\sigma\nu}(3) \quad (41)$$

$$\text{wo} \quad \delta j_\sigma(2) = \int d^4 x''' < \gamma^\sigma \bar{S}(23) \gamma^\nu S_1(32) > A_\nu(3)$$

$$\delta j'_{\sigma\nu}(3) = \int d^4 x'' < \gamma^\sigma \bar{S}(23) \gamma^\nu S_1(32) > D(12)$$

resp. den vom realen und virtuellen Photonfeld induzierten Vakuumpolarisationsstrom darstellen; da beide keine Quellen haben: $\square A_\mu = 0$, $\square D = 0$, verschwinden δj_σ , $\delta j'_{\sigma\nu}$ in Anwendung auf die Schrödingerfunktion, und damit fällt (V) weg.

Zur Diskussion der übrigen Terme in (34) schreiben wir alle in die Form:

$$2\pi \hat{\underline{S}}_4 = \int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' (\bar{\psi}(0) A_\mu(1) K_{\mu\nu}(0123) A_\nu(2) \psi(3)) \quad (42)$$

wo

$$K_{\mu\nu}(0123) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{12} \int d^4 q \int d^4 \kappa \int d^4 \kappa' \int d^4 q' k_{\mu\nu}(q, \kappa, \kappa', q') \\ \times \delta^4(q + \kappa - \kappa' - q') e^{i x q} e^{i x' \kappa} e^{-i x'' \kappa'} e^{-i x''' q'} \quad (43)$$

Das Matricelement von $\hat{\underline{S}}_4$ für den Comptoneffekt wird damit:

$$(p_0, \kappa_0 | \hat{\underline{S}}_4 | p_1, \kappa_1) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \frac{1}{2 \sqrt{|\vec{\kappa}_0| |\vec{\kappa}_1|}} (\bar{u}(\vec{p}_1) [e_1^\mu k_{\mu\nu}(p_0, -\kappa_1, -\kappa_0, p_1) e_0^\nu \\ + e_0^\mu k_{\mu\nu}(p_0, \kappa_0, \kappa_1, p_1) e_1^\nu] u(\vec{p}_0)) \delta^4(p_0 + \kappa_0 - p_1 - \kappa_1) \quad (44)$$

wobei: p_0, p_1 die Viererimpulse von Anfangs- resp. Endelektron
 κ_0, κ_1 die Viererimpulse von Anfangs- resp. Endphoton
 e_0, e_1 deren Polarisations(vierer-)vektoren bedeuten.

NB. Wegen der Eichinvarianz der Formel brauchen die Polarisations-

vektoren e_i nicht transversal zu sein; sie müssen nur die Gleichungen erfüllen: $(e_i e_i) = 1$, $(e_i \kappa_i) = 0$. Sie sind also um ein Multiplum von κ_i unbestimmt, entsprechend der Unbestimmtheit der Eichung der Potentiale.

Die Bestimmung von $k_{\mu\nu}$ verläuft etwas verschieden bei den „regulären“ Termen I und II einerseits und bei den „ ε -behafteten“ Termen III und IV andererseits.

a) *Reguläre Terme*: Für I erhält man sofort:

$$k_{\mu\nu}^I = + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma} \int d^4 k \gamma^{\sigma} [i \gamma (q - k) - m] \gamma^{\mu} [i \gamma (q + \kappa - k) - m] \gamma^{\nu} \\ \times [i \gamma (q' - k) - m] \gamma^{\sigma} \\ \times \left\{ \frac{\delta(k^2)}{[(q-k)^2 + m^2][(q+\kappa-k)^2 + m^2][(q'-k)^2 + m^2]} + \frac{\delta((q-k)^2 + m^2)}{k^2[(q+\kappa-k)^2 + m^2][(q'-k)^2 + m^2]} \right. \\ \left. + \frac{\delta((q+\kappa-k)^2 + m^2)}{k^2[(q-k)^2 + m^2][(q'-k)^2 + m^2]} + \frac{\delta((q'-k)^2 + m^2)}{k^2[(q-k)^2 + m^2][(q+\kappa-k)^2 + m^2]} \right\}. \quad (45)$$

(Skalarprodukte von Vierervektoren schreiben wir hier als gewöhnliche Produkte: $a^{\nu} b_{\nu} \equiv ab$; insbesondere $a_{\nu} a^{\nu} \equiv a^2$).

Der Ausdruck in geschweifter Klammer kann auf folgende Weise zusammengefasst werden³⁾:

$$k_{\mu\nu}^I = - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma} \int d^4 k \gamma^{\sigma} [i \gamma (q - k) - m] \gamma^{\mu} [i \gamma (q + \kappa - k) - m] \gamma^{\nu} \\ \times [i \gamma (q' - k) - m] \gamma^{\sigma} \int_0^1 du \cdot u^2 \int_0^1 dv \cdot v \int_0^1 dw \delta''(k^2 - 2[qk + \kappa k - q\kappa]u \\ + 2[\kappa k - \kappa q]uv + 2[q'k - qk]uvw). \quad (46)$$

Ganz ähnlich findet man für II:

$$k_{\mu\nu}^{II} = + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma} \int d^4 k \gamma^{\mu} [i \gamma (q + \kappa) - m] \gamma^{\sigma} [i \gamma (q + \kappa - k) - m] \gamma^{\nu} \\ \times [i \gamma (q' - k) - m] \gamma^{\sigma} \frac{1}{(q + \kappa)^2 + m^2} \\ \times \left\{ \frac{\delta(k^2)}{[(q-k)^2 + m^2][(q'-k)^2 + m^2]} + \frac{\delta((q-k)^2 + m^2)}{k^2[(q'-k)^2 + m^2]} + \frac{\delta((q'-k)^2 + m^2)}{k^2[(q-k)^2 + m^2]} \right\} \quad (45)$$

und daraus

$$k_{\mu\nu}^{II} = - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{\sigma} \int d^4 k \gamma^{\mu} [i \gamma (q + \kappa) - m] \gamma^{\sigma} [i \gamma (q + \kappa - k) - m] \gamma^{\nu} \\ \times [i \gamma (q' - k) - m] \gamma^{\sigma} \frac{1}{2(q\kappa)} \int_0^1 du \cdot u \int_0^1 dv \delta''(k^2 - 2kq'u \\ + 2[q\kappa - k\kappa']uv). \quad (46')$$

Durch eine Verschiebung des Ursprungs im k -Raum bewirken wir die quadratische Ergänzung des Ausdrucks im Argument der δ''' - resp. δ'' -Funktion:

$$\text{in (46): (47) } k' = k - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvv$$

$$\text{in (46'): (47') } k' = k - q'u - \kappa'uv$$

worauf wir die Integration über k' ausführen können, indem wir für die δ -Funktion ihre Fourierdarstellung einsetzen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega; \quad \delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{i\omega x} d\omega;$$

$$\delta''(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{i\omega x} d\omega; \text{ usw.}$$

Daraus erhält man unter Verwendung der Fresnelschen Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{\pm i\omega x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2|\omega|}} \left(1 \pm i \frac{\omega}{|\omega|} \right)$$

leicht die Formeln

$$\int d^4 k \delta''(k^2 + A) = +\frac{\pi}{A}; \quad \int d^4 k \delta'''(k^2 + A) = -\frac{\pi}{A^2} \quad (48)$$

und durch partielle Integration nach ω :

$$\left. \begin{aligned} \int d^4 k k_\mu k_\nu \delta''(k^2 + A) &= -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ \int d^4 k \delta'(k^2 + A) + \pi \right\} \\ \int d^4 k k_\mu k_\nu \delta'''(k^2 + A) &= -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \int d^4 k \delta''(k^2 + A) \end{aligned} \right\} \quad (48')$$

während Integrale mit einer ungeraden Anzahl k_μ im Integranden aus Symmetriegründen verschwinden.

b) *Die ε -behafteten Terme:* Um sie in ähnlicher Form wie die regulären zusammenfassen zu können, benötigen wir eine Umformung des in allen vorkommenden Operators

$$A(02) \equiv -\frac{1}{8} \int d^4 x' \bar{S}(01) \gamma^\sigma [D_1(12) S(12) + D(12) S_1(12)] \gamma^\sigma \cdot \varepsilon(02) \quad (49)$$

Dieser kann zunächst auf die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} A(02) &= +\frac{1}{4} \int d^4 x' \bar{S}(01) \gamma^\sigma [D_1(12) \bar{S}(12) + \bar{D}(12) S_1(12)] \gamma^\sigma + \\ &+ \frac{1}{8} \int d^4 x' S(01) \gamma^\sigma [D_1(12) \bar{S}(12) + \bar{D}(12) S_1(12)] \gamma^\sigma \cdot \varepsilon(02) \end{aligned}$$

Durch Fourieranalyse und analoge Zusammenfassung wie unter a) erhält man dafür leicht:

$$A(02) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^7 \int d^4 k' \int d^4 p \int_0^1 du [2(p^2 + m^2)(1-u) - 2m(1+u) \times (i\gamma p - m)] \left[\frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \varepsilon(02) \varepsilon(p) \delta(p^2 + m^2) \right] \times \delta'(k'^2 + m^2 u^2 + (p^2 + m^2)(u - u^2)) e^{ip(x-x'')}$$

Wenn man darin im Term mit $\delta(p^2 + m^2)$ überall $p^2 + m^2 \rightarrow 0$ ersetzt, so kann man in ihm die p -Integration durchführen und erhält

$$-\frac{1}{2} \varepsilon(02) S(02) = \bar{S}(02),$$

was wir nun mit seiner Integraldarstellung wieder zurücktransformieren. Das ergibt schliesslich:

$$A(02) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^7 \int d^4 k' \int d^4 p \int_0^1 du (1-u) \delta'(k'^2 + m^2 u^2 + (p^2 + m^2)(u - u^2)) e^{ip(x-x'')} + \frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^7} \int d^4 k' \int d^4 p \int_0^1 du (1-u^2) u \int_0^1 dv (i\gamma p - m) \times \delta''(k'^2 + m^2 u^2 + (p^2 + m^2)(u - u^2)) e^{ip(x-x'')} \quad (50)$$

Mit (50) ist noch ein zweiter Beweis für die Lorentzinvarianz der ε -behafteten Terme gebracht, und ferner können wir nun sofort deren $k_{\mu\nu}$ analog zu dem der regulären Terme aufschreiben. Dabei erkennt man, dass sich die divergenten Terme, d. h. diejenigen, welche δ' enthalten, in regulären und ε -behafteten Termen gegenseitig wegheben. Dies beruht wesentlich auf folgende Identität, die man leicht durch partielle Integration gewinnt:

$$\int_0^1 du (1-u) \delta'(k^2 + A) = \int_0^1 du \cdot u \delta'(k^2 + A) - \int_0^1 du \cdot u (1-u) \frac{dA}{du} \delta''(k^2 + A). \quad (51)$$

Die einzigen Divergenzen, welche unsere Formel für $k_{\mu\nu}$ noch enthält, rühren von Polen im Integranden der u, v, w -Integration her. Diese stammen von der Ultrarotkatastrophe; dies sieht man am

einfachsten daran, dass sie verschwinden, wenn man entsprechend einer Bemerkung in § 4 dem Photon formal eine kleine Masse μ erteilt, d. h. den Wirkungsquerschnitt $d\sigma''(\mu)$ des Doppelcompton-effektes addiert.

Unter Berücksichtigung dessen erhält man aus den Formeln (46) bis (50) den vollständigen Ausdruck für den Kern $k_{\mu\nu}$ von $\hat{\mathcal{S}}_4(\mu)$ unter Einschluss des Doppelcomptoneffektes für ein Zusatzphoton mit Energie $< \mu$:

$$\begin{aligned}
 & k_{\mu\nu}(q, \kappa, \kappa', q'; \mu) = \\
 \text{I.} & \left\{ \begin{aligned} & + \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_0^1 du \cdot u^2 \int_0^1 dv \cdot v \\ & \int_0^1 dw \cdot \left(\frac{1}{m^2 u^2 + \mu^2 + 2q\kappa u(1-u)(1-v) - 2\kappa\kappa' u^2 v^2 w(1-w)} \right)^2 \\ & \times \gamma^\sigma [i\gamma(q - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvw) - m] \gamma^\mu \\ & \times [i\gamma(q + \kappa - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvw) - m] \gamma^\nu \\ & \times [i\gamma(q' - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvw) - m] \gamma^\sigma \end{aligned} \right. \\
 \text{I'} & \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_0^1 du \cdot u^2 \int_0^1 dv \cdot v \\ & \int_0^1 dw \frac{1}{m^2 u^2 + 2q\kappa u(1-u)(1-v) - 2\kappa\kappa' u^2 v^2 w(1-w)} \\ & \times \{ \gamma^\sigma \gamma^e \gamma^\mu \gamma^e \gamma^\nu [i\gamma(q' - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvw) - m] \gamma^\sigma + \\ & + \gamma^\sigma \gamma^e \gamma^\mu [i\gamma(q + \kappa - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvw) - m] \gamma^\nu \gamma^e \gamma^\sigma + \\ & + \gamma^\sigma [i\gamma(q - (q + \kappa)u + \kappa uv + (q - q')uvw) - m] \gamma^\mu \gamma^e \gamma^\nu \gamma^e \gamma^\sigma \} \end{aligned} \right. \\
 \text{II.} & \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_0^1 du \cdot u \int_0^1 dv \frac{1}{m^2 u^2 + 2q\kappa(u - u^2)v} \gamma^\mu \frac{i\gamma(q + \kappa) - m}{-2q\kappa} \gamma^\sigma \\ & \times [i\gamma(q + \kappa - (q + \kappa)u + \kappa' u(1-v)) - m] \gamma^\nu \\ & \times [i\gamma(q - q u - \kappa' u v) - m] \gamma^\sigma \end{aligned} \right. \\
 \text{III.} & - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_0^1 du \cdot u(1-u^2) \int_0^1 dv \frac{m}{m^2 u^2 + 2q\kappa(u - u^2)v} \gamma^\mu \gamma^\nu
 \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \left\{ \begin{aligned} & + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \gamma^\mu \frac{i \gamma (q + \kappa) - m}{-2 q \kappa} \gamma^\nu \left\{ -1 + \int_0^1 d u \cdot u (1-u) \frac{2 m^2}{m^2 u^2 + \mu^2} \right. \\ & + \int_0^1 d u \cdot u (1-u) \frac{2 m^2}{m^2 u^2 + 2 q \kappa (u - u^2)} \\ & - \int_0^1 d u \cdot u (1-u)^2 \frac{2 q \kappa}{m^2 u^2 + 2 q \kappa (u - u^2)} \\ & + \int_0^1 d u \cdot u^2 (1-u) (1-u^2) \int_0^1 d v \cdot v \frac{4 m^2 (q \kappa)}{[m^2 u^2 + 2 q \kappa (u - u^2) v]^2} \\ & - \int_0^1 d u \cdot u^3 (1-u^2) \int_0^1 d v \cdot v \frac{4 (q \kappa)^2}{[m^2 u^2 + 2 q \kappa (u - u^2) v]^2} \\ & \left. + \int_0^1 d u \cdot u^2 (1-u) \int_0^1 d v \cdot v \frac{4 (q \kappa)}{m^2 u^2 + 2 q \kappa (u - u^2) v} \right\} \quad (52) \end{aligned} \right.$$

+ das hermitisch Konjugierte, in welchem die Substitution $q \longleftrightarrow q'$, $\kappa \longleftrightarrow \kappa'$ gemacht wird.

Die Terme I und I' stammen aus I von (34), II aus II, III und IV aus III, IV, V und den Termen mit $k'_\mu k'_\nu \delta''(k'^2 + A)$ aus II.

Die Tatsache, dass hier im Gegensatz zur Impulsraumrechnung in § 4 nach Renormalisation der Masse keine Divergenzen mehr auftreten, rührt daher, dass wir die Vakuumpolarisationsterme (34, V) unter Berufung auf die Eichinvarianz resp. eine geeignete Limitierungsvorschrift (§ 8) weggelassen haben. Eine formale Rechnung hätte uns statt dessen wie in § 4 eine unendliche Ladungsrenormalisation geliefert. Wenn die Theorie nun überhaupt vernünftig ist, müssen wir erwarten, dass ausser der von der Vakuumpolarisation herrührenden (unendlichen) keine weiteren (endlichen) Ladungsrenormalisationen auftreten, d. h. dass unser Matrixelement (52) im extrem unrelativistischen Grenzfall verschwindet. Eine nicht schwierige Rechnung zeigt, dass dies in der Tat erfüllt ist.

NB. Dabei ist der Zusatzterm $+\pi$ in (48') wesentlich. Seine wahre Begründung erhält dieser jedoch erst in § 8 vom Standpunkt der Regularisierung.

§ 8. Regularisierung.

Die einzelnen Glieder jeden Terms von (34) divergieren i. A. quadratisch, und erst die Zusammenfassung derselben mit den Parametern u, v, w , verbunden mit der speziellen Variablentransformation (47) reduziert die Divergenzen jeden Terms auf bloss logarithmische (charakterisiert durch das Auftreten der Funktion δ'). Diese heben sich dann, wie gezeigt, aus den einzelnen Termen gegenseitig weg. Führt man die Zusammenfassung anders durch, insbesondere mit einer von (47) verschiedenen Schiebung der einzelnen Glieder gegeneinander, so treten (divergente oder konvergente) Zusatzterme auf, die unser Resultat (52) wesentlich ändern. Es ist also nötig, für unser spezielles Vorgehen bei der Auswertung von (34) eine Begründung zu geben. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Erstens wäre denkbar, einfach zu postulieren, dass alle quantenelektrodynamischen Formeln analog zu unserem Vorgehen mit den u, v, w -Parametern zusammenzufassen seien. In der Tat führt dieses Verfahren in allen bisher behandelten Fällen zu sinnvollen Resultaten (vgl. ³). Indessen ist diese Vorschrift doch ziemlich undurchsichtig, und es ist auch nicht sicher, dass sie für Probleme höherer Ordnung immer noch durchführbar bleibt.

2. Zweitens kann man eine in sich konsistente Limitierungsvorschrift rein mathematischer Natur erlassen, die unter Wahrung von Eich- und Lorentzinvarianz den auftretenden unbestimmten Symbolen einen eindeutigen Sinn beilegt, wie das RIVIER und STÜCKELBERG⁹⁾ und PAULI und VILLARS⁷⁾ tun. So erfolgreich diese Verfahren sind — besonders ⁷⁾, wo die speziellen Eigenschaften der Limitierung wieder herausfallen —, so haftet ihnen doch ein sehr unbefriedigender ad hoc-Charakter an, so dass sie immer nur für einen beschränkten Problemkreis formuliert werden können und für neue Aufgaben erweitert werden müssen. Insbesondere führt das Pauli-Villars-Verfahren in unserem Falle nur bei Hinzunahme von Zusatzvorschriften darüber, welche Funktionen zu regularisieren seien und welche nicht, zum Ziel.

3. Das befriedigendste Verfahren scheint uns deshalb zu sein, dass man ausser den reell vorhandenen Teilchen noch andere, schwere Teilchen ankoppelt, wobei besondere Relationen zwischen den Kopplungskonstanten das Konvergieren der auftretenden Ausdrücke garantieren, und am Schlusse die Massen M_i der Hilfsfelder als gross gegen die der realen Felder betrachtet und der Grenzübergang $M_i \rightarrow \infty$ durchgeführt wird¹⁰⁾. Dabei sind uns diese Hilfsfelder hier nicht physikalische Realität, sondern bloss Mittel

zur Formulierung einer Limitierungsvorschrift, die, im Gegensatz zu 1. und 2. für jedes Problem ohne neue Zusatzvorschriften definiert ist.

Diese Auffassung der Sachlage erlaubt uns, einfach neben den Elektronen noch schwere geladene Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen, neben den Photonen schwere Vektormesonen anzukoppeln und die Bedingungen zu formulieren, welche die Konvergenz erzwingen, ohne uns darum zu kümmern, dass diese vielleicht mit reellen Kopplungskonstanten bei diesen Feldtypen gar nicht erfüllbar sind.

Koppeln wir zunächst N schwere Elektronfelder an, so haben wir zu ersetzen

$$j_\mu(x; m) \rightarrow \sum_{i=0}^N c_i j_\mu^{(i)}(x; M_i) \quad \text{wo } c_0 = 1, M_0 = m \text{ ist.}$$

Man rechnet leicht nach, dass die einzigen Modifikationen, die in (34) dadurch erwachsen, die Vakuumpolarisationsterme (V) betreffen, die dadurch gerade die regularisierte Form, die ihnen in 7) gegeben wurde, erhalten. Dort wird gezeigt, dass durch geeignete Bedingungen zwischen den c_i und den M_i die Vakuumpolarisation formal eichinvariant wird und also für eine Lichtwelle verschwindet. Dies rechtfertigt also das Weglassen dieser Terme in § 3 und § 7 auch formal.

Koppeln wir hingegen N schwere Vektormesonfelder neben dem Photonfeld an, so ergibt eine einfache Rechnung nach dem Verfahren von § 6 ein Resultat, das aus (34) dadurch hervorgeht, dass man überall statt D_1 resp. D schreibt:

$$\tilde{D}_1(x) \equiv \sum_{i=0}^N c_i A_1(x; M_i) \text{ resp. } \tilde{D} \equiv \sum_{i=0}^N c_i \bar{A}(x; M_i) \quad \text{wo } c_0 = 1, M_0 = 0.$$

Man rechnet nun leicht nach, dass die Bedingungen

$$(A) \quad \sum_{i=0}^N c_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N c_i M_i^2 = 0, \quad \sum_{i=0}^N c_i M_i^4 = 0$$

genügen, um zu garantieren, dass jedes Glied von (34) einzeln konvergiert; die schwächeren Bedingungen

$$(B) \quad \sum_{i=0}^N c_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N c_i M_i^2 = 0$$

garantieren nur, dass höchstens logarithmisch divergente Integrale auftreten. Dies genügt indessen für unsere Zwecke vollauf; denn eine konvergente Differenz zweier nur logarithmisch divergenter Integrale ist invariant gegenüber Schiebungen der Integrations-

variablen, so dass die oben durchgeführte spezielle Zusammenfassung der Glieder jeden Terms mit der speziellen Schiebung (47), falls sie sich mit den abgeänderten D -Funktionen noch durchführen lässt, genau so gerechtfertigt ist wie jede andere. Sie ist hingegen dadurch ausgezeichnet, dass nach Durchführung des Grenzüberganges $M_i \rightarrow \infty$ ($i \neq 0$) in der Schlussformel keine Zusatzterme auftreten.

Um das zu zeigen, versuchen wir, alle Umformungen von § 7 neu durchzuführen, wenn D durch \tilde{D} ersetzt ist. Man erkennt sofort, dass dies in der Tat möglich ist und dass dadurch einfach jede der auftretenden Funktionen

$$\delta'(k^2 + A); \quad \delta''(k^2 + A); \quad \delta'''(k^2 + A)$$

ersetzt wird durch resp.

$$\sum_{i=0}^N c_i \delta'(k^2 + A + M_i^2(1-u)); \quad \sum_{i=0}^N c_i \delta''(k^2 + A + M_i^2(1-u)); \\ \sum_{i=0}^N c_i \delta'''(k^2 + A + M_i^2(1-u))$$

Alle übrigen Schlüsse bleiben unverändert, mit zwei Ausnahmen:

a) In der zweiten Formel (48') fällt der Zusatzterm $+\pi$ wegen

$$\sum_{i=0}^N c_i = 0 \text{ weg:}$$

$$\sum_{i=0}^N c_i \int d^4 k k_\mu k_\nu \delta''(k^2 + A + M_i^2(1-u)) = \\ = -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{i=0}^N c_i \int d^4 k \delta'(k^2 + A + M_i^2(1-u)). \quad (48'')$$

b) In (51) tritt ein neuer Zusatzterm auf:

$$\sum_{i=0}^N c_i \int_0^1 du (1-u) \delta'(k^2 + A + M_i^2(1-u)) \\ = \sum_{i=0}^N c_i \int_0^1 du \cdot u \delta'(k^2 + A + M_i^2(1-u)) \\ - \sum_{i=0}^N c_i \int_0^1 du \cdot u (1-u) \left[\frac{dA}{du} - M_i^2 \right] \delta''(k^2 + A + M_i^2(1-u)). \quad (51')$$

Der Zusatzterm

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=0}^N c_i M_i^2 \int_0^1 d^4 k \int_0^1 du \cdot u (1-u) \delta''(k^2 + A + M_i^2(1-u)) \\
 = -\pi \sum_{i=0}^N c_i \int_0^1 du \cdot u (1-u) \frac{M_i^2}{A + M_i^2(1-u)}
 \end{aligned}$$

liefert in der Grenze $M_i \rightarrow \infty$ ($i \neq 0$):

$$-\pi \sum_{i=1}^N c_i \int_0^1 du \cdot u = + \frac{\pi}{2}$$

und da (34) III und (34) IV je einen solchen liefern, so kommt im Ganzen wieder der Zusatzterm $+\pi$, wie ohne Regularisierung, nun aber besser begründet.

Wir verbleiben also mit einer zu (52) analogen Formel in der jedoch die Brüche $\frac{1}{F(u, v, w)}$ unter den Parameterintegralen ersetzt werden durch:

$$\sum_{i=0}^N \frac{c_i}{F(u, v, w) + M_i^2(1-u)}$$

Da nun keines der auftretenden $\frac{1}{F(u, v, w)}$ bei $u = 1$ eine Singularität hat, geht für $M_i \rightarrow \infty$ ($i \neq 0$) jeder Zusatzterm ($i \neq 0$) einzeln gegen Null, und es ergibt sich genau die Formel (52), die damit vom Standpunkt unserer Regularisierungsmethode gerechtfertigt ist.

Hätten wir statt der u, v, w -Zusammenfassung einen anderen Weg zur Auswertung von (34) gewählt, der ohne Regularisierung eine mit (52) nicht-äquivalente Endformel liefert, so würden durch die Regularisierung gerade solche Zusatzterme hereingebracht, dass (52) wiederhergestellt würde (vgl. 7)). Die Stärke und Auszeichnung der u, v, w -Zusammenfassung liegt eben darin, dass sie keine Zusatzterme von der Regularisierung erhält und deshalb schon ohne diese zum richtigen Resultat führt (abgesehen eventuell von endlichen Ladungsrenormalisationen; dass der Zusatzterm in (48') ohne Regularisierung zum richtigen Resultat führt, dürfte kaum mehr als Zufall bedeuten).

NB. 1. Die Anwendung der hier verwendeten Regularisierungsmethode auf den Selbstenergieoperator (33) ist identisch mit der Limitierung desselben nach VILLARS und PAULI⁷⁾ und bringt ihn auf die Form $\text{const.} \int d^3 x \bar{\psi}(x) \psi(x)$, wie in § 5 erwähnt wurde.

2. Die Tatsache, dass die hier gewählte Limitierungsvorschrift mit Hilfsfeldern im Gegensatz etwa zu den rein mathematischen Vorschriften⁷⁾ und⁹⁾ die Formel (52) so normiert, dass keine Ladungsrenormalisation mehr auftritt, deutet vielleicht darauf hin, dass solche Hilfsfelder doch mehr als eine bloss formale Bedeutung haben.

§ 9. Ultrarotterme; unrelativistischer Grenzfall.

1. Die Ultrarotterme sind in (52) ziemlich komplex in die u, v, w -Integration eingebaut, und es besteht keine einfache Möglichkeit, sie mit dem Doppelcomptoneffekt (29) zu vergleichen. Wir haben deshalb auch im Vorhergehenden einfach die Vorschrift, dem Photon eine kleine Masse μ zu erteilen, aus der Impulsraumdiskussion übernommen. Nun können wir aber die Impulsraumformel von § 4 als eine andere Form der Auswertung von (34) ansehen, die jedoch nicht der Regularisierung von § 8 genügt. Wir haben infolgedessen keine Garantie, dass die Ausrechnung von (30) dasselbe liefert wie (52). Da es sich aber bei den Ultrarottermen nur um das Verhalten des Integranden in der Umgebung eines nicht-integrablen Pols im Impulsraum handelt, auf das die Regularisierung keinen Einfluss hat, können wir sie trotz der allgemeinen Nichtäquivalenz von (30) und (52) an Hand von (30) diskutieren, wie das in § 4 geschehen ist, und von da die Vorschrift übernehmen, dass man $d\sigma_6(\mu) = d\sigma_6 + d\sigma''(\mu)$ erhält, wenn man in \mathfrak{H}_4 dem Photon formal die Masse μ erteilt. Damit ist unser obiges Vorgehen gerechtfertigt.

2. Genau dieselbe Überlegung gilt auch, wenn man $d\sigma_6(\mu)$ für kleine Energien berechnen will. Die Entwicklung des Wirkungsquerschnittes nach der Energie κ des einfallenden Photons lautet nämlich im Schwerpunktsystem:

$$d\sigma_6(\mu) = d\sigma_6^{(1)} \cdot \kappa^2 \log \kappa + d\sigma_6^{(2)} \cdot \kappa^2 + o(\kappa^2)$$

und für sehr kleine κ stellt der erste Term den Hauptanteil dar. Die logarithmische Abhängigkeit von κ kommt dadurch zustande, dass im Limes $\kappa \rightarrow 0$ zwei Pole im Impulsraum zusammenrücken, so dass eine nicht-integrable Singularität entsteht. So wenig wie auf die Ultrarotterme kann deshalb die spezielle Wahl der Auswertungsvorschrift auf diesen Term einen Einfluss haben, und wir dürfen ihn also auf Grund von (30) berechnen, was bedeutend bequemer ist. Die Rechnung ist als solche uninteressant, so dass hier nur das Resultat angegeben sei:

Bedeutet $r_0 = e^2/4\pi m$ den klassischen Elektronenradius, ϑ den Streuwinkel, $d\Omega$ das Raumwinkelement; übrige Bezeichnungen wie bisher, so ist:

$$d\sigma_6(\mu) = \frac{r_0^2}{137} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 \left\{ [1 + \cos^2 \vartheta] \left[2 \log\left(\frac{\kappa}{m}\right) + \frac{8}{3} \log\left(\frac{\mu}{m}\right) \right] \right. \\ \left. - \frac{8}{3} [1 + \cos^2 \vartheta] \cos \vartheta \cdot \log\left(\frac{\mu}{m}\right) \right. \\ \left. - \frac{4}{3} [1 - \cos^2 \vartheta] \cos \vartheta \cdot \log\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right\}^{12} \quad (53)$$

3. Um die Diskussion der Ultrarotdivergenzen vollständig zu machen, müssen wir noch in Anlehnung an Jost⁹⁾ (im folgenden zitiert als (J)) die Verhältnisse bei der Emission kleiner Photonen beim Comptoneffekt untersuchen. Das Vorgehen ist genau analog zu dem bei (J), bis auf die Ersetzung der Einelektrontheorie durch Löchertheorie und die Berücksichtigung unserer strahlungstheoretischen Korrekturen:

Man spaltet das Strahlungsfeld im Schwerpunktsystem durch eine Grenzfrequenz μ in einen hochfrequenten (h. f.) ($\kappa > \mu$) und einen niederfrequenten (n. f.) Anteil. Der Hamiltonoperator $H = H_0 + eH_1$ zerfällt analog:

$$\text{h. f.} \quad H(\mu) = H_0(\mu) + eH_1(\mu)$$

$$\text{n. f.} \quad H'(\mu) = H'_0(\mu) + eH'_1(\mu)$$

Wenn μ klein ist gegen die Elektronmasse und die Energie des einfallenden Photons, kann man in $H + H'$ alle Terme von der Ordnung μ/m resp. μ/κ vernachlässigen.

Eine erste kanonische Transformation

$$F \rightarrow e^{-U} F e^{+U}$$

wo

$$U = - \sum_s \int d^3 \kappa \tilde{\kappa} \mathfrak{N}_s(\tilde{\kappa}) \int d^3 p \varphi^*(\tilde{p}') \frac{\partial}{\partial \tilde{p}'} \varphi(\tilde{p}')$$

mit

$$\mathfrak{N}_s(\tilde{\kappa}) = A_s^*(\tilde{\kappa}) A_s(\tilde{\kappa}) \quad \text{Photonenzahlen}$$

$$\varphi(\tilde{p}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3 x \psi(\tilde{x}) e^{-i\tilde{p}\tilde{x}}$$

(im übrigen die alten Bezeichnungen)

führt $\varphi(\tilde{p})$ über in

$$\varphi\left(\tilde{p} - \sum_s \int d^3 \kappa \tilde{\kappa} \mathfrak{N}_s(\tilde{\kappa})\right),$$

wälzt also den Feldimpuls der n. f. Photonen auf das Materiefeld ab. Die Strahlungsfeldamplituden gehen dabei über in

$$A_s(\vec{\kappa}) \rightarrow A_s(\vec{\kappa}) e^{-\vec{\kappa} \int d^3 p' \varphi^*(\vec{p}') \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \varphi(\vec{p}')} \quad (54)$$

Im Sinne der obigen Vernachlässigungen dürfen wir den Energie-Impulssatz im n. f. Gebiet vernachlässigen und damit den Exponentialfaktor in (54) weglassen.

Auf den derart vorbereiteten Hamiltonoperator wird nun die von BLOCH und NORDSIECK⁵⁾ eingeführte kanonische Transformation

$$F \rightarrow e^{-eS} F e^{+eS}$$

mit

$$S = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \sum_{\sigma, s} \int d^3 \kappa \int d^3 p \frac{(p e_s)}{(p \kappa)} \frac{A_s(\vec{\kappa}) - A_s^*(\vec{\kappa})}{\sqrt{2} |\vec{\kappa}|} a_\sigma^*(p) a_\sigma(p)$$

ausgeübt. Es ist dies genau unsere frühere S -Transformation, die hier aber nicht im Sinne einer Entwicklung nach Potenzen von e , sondern strahlungstheoretisch exakt, aber unter Vernachlässigung des Impuls-Energie-Satzes im n. f. Gebiet durchgeführt wird. Genau wie bei (J) erhält man damit für den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \tilde{H}_1(\mu) + 0(\mu/m, \mu/\kappa) \quad (55)$$

wo

$$\tilde{H}_1(\mu) = H_1(\mu) \cdot K'$$

und

$$\begin{aligned} (\mathfrak{N}_s(\vec{\kappa}), N_\tau(\vec{p}) | K' | \mathfrak{N}'_s(\vec{\kappa}), N_\tau(\vec{p}) - \delta_{\sigma_s \tau} \delta(\vec{p} - \vec{p}_0) + \\ + \delta_{\sigma_1 \tau} \delta(\vec{p} - \vec{p}')) = (\mathfrak{N}_s(\vec{\kappa}), \vec{p}_0(\sigma_0) | K | \mathfrak{N}'_s(\vec{\kappa}), \vec{p}_1(\sigma_1)) \quad ((J) 29) \end{aligned}$$

Dabei sind $N_0(\vec{p}) \equiv a_\sigma^*(\vec{p}) a_\sigma(\vec{p})$ Elektronenzahlen.

In (55) ist $H_1(\mu)$ (bis auf Grössen $0(\mu/m)$) der Hamiltonoperator der Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld der Masse μ : er ergibt also in der Störungstheorie den Querschnitt $d\sigma(\mu) = d\sigma_4 + d\sigma_6(\mu) + \dots$

Wieder genau wie (J) erhält man für den Streuquerschnitt eines Prozesses, bei dem neben dem in ein bestimmtes Raumwinkel-element $d\Omega$ gestreuten Photon noch n. f. der Verteilung $\mathfrak{N}_s(\vec{\kappa})$ emittiert werden:

$$d\sigma = \prod [\mathfrak{N}_s(\vec{\kappa})] \cdot d\sigma_e \quad (56)$$

wo $\prod [\mathfrak{N}_s(\vec{\kappa})]$ eine Poissonverteilung für die n. f. Photonen der störungstheoretisch aus $H_1(\mu)$ berechnete Querschnitt für den Comptoneffekt ist:

$$d\sigma_e = d\sigma_4 + d\sigma_6(\mu) + \dots$$

Die Unabhängigkeit von μ , innerhalb gewisser Schranken, ergibt sich leicht folgendermassen: Es ist nach (29) der Wirkungsquerschnitt eines Doppelcomptoneffektes, bei welchem neben dem in $d\Omega$ gestreuten Photon und beliebigen n.f. Photonen noch ein Photon mit einer Energie κ' : $\mu < \kappa' < \mu'$ emittiert wird, falls $\mu'/m \ll 1$, $\mu'/\kappa \ll 1$:

$$d\sigma''(\mu, \mu') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mu < |\kappa'| < \mu'} \frac{d^3\kappa'}{2|\kappa'|} \left\{ \frac{p_0}{(p_0\kappa)} - \frac{p_1}{(p_1\kappa)} \right\}^2 \cdot d\sigma_4$$

Somit gilt:

$$d\sigma_6(\mu) + d\sigma''(\mu, \mu') = d\sigma_6(\mu') \quad (57)$$

Es ist also tatsächlich das Resultat unabhängig von der Frequenz μ , die das Strahlungsfeld in einen h.f. und einen n.f. Teil spaltet, unter den Bedingungen:

1. $\mu \ll m, \mu \ll \kappa$
2. $e^2 \log \left(\frac{\kappa}{\mu} \right) \ll 1$

(wo κ = Energie des einfallenden Photons im Schwerpunktsystem). Die Bedingung 2 drückt aus, dass der Dreifach-Compton-Effekt vernachlässigbar klein sein soll gegen den Doppelcomptoneffekt, was natürlich in allen obigen Überlegungen implizit vorausgesetzt war.

Im übrigen bleiben alle Folgerungen von (J) unverändert erhalten. Insbesondere kann über die Form der Comptonlinie nicht mehr ausgesagt werden, als was schon aus (J) folgt: Innerhalb des n.f. Gebietes ist sie gegeben durch die Funktion S (J 49), ausserhalb kann sie nur durch exakte Berechnung des Doppel-Compton-Querschnittes bis zur Ordnung e^6 berechnet werden.

* * *

Mit der Formel (52) sind wir grundsätzlich in der Lage, die e^6 -Korrektur zum Streuquerschnitt des Comptoneffektes auszurechnen. Der rein rechnerischen Schwierigkeiten wegen, die diese Aufgabe bietet, mussten wir die Auswertung jedoch zurückstellen und uns mit der Näherung kleiner Energien (53) begnügen. Wir hoffen indessen, in absehbarer Zeit wenigstens noch den Fall extrem grosser Energien behandeln zu können.

Zum Schlusse möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor W. PAULI, für seine kundige Leitung vielmals danken. Ausserdem bin ich Herrn Dr. R. JOST, der diese Arbeit anregte, für viele wertvolle Ratschläge und anregende Diskussionen zu grossem Dank verpflichtet.

Literatur.

- ¹⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **73**, 415 (1948); H. W. LEWIS, Phys. Rev. **73**, 173 (1948); S. T. EPSTEIN, Phys. Rev. **73**, 177 (1948); S. TOMONAGA, Phys. Rev. **74**, 224 (1948); S. TOMONAGA, Progr. Theor. Phys. **21**, 183 (1948).
 - ²⁾ E. CORINALDESI und R. JOST, HPA **21**, 183 (1948).
 - ³⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948), Phys. Rev. **75**, 651 (1949) und unpublizierte Arbeiten.
 - ⁴⁾ J. FRENCH und V. WEISSKOPF, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).
 - ⁵⁾ F. BLOCH und A. NORDSIECK, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).
 - ⁶⁾ R. JOST, Phys. Rev. **72**, 815 (1947).
 - ⁷⁾ W. PAULI und F. VILLARS, im Druck.
 - ⁸⁾ R. JOST und J. M. LÜTTINGER, in Vorbereitung.
 - ⁹⁾ D. RIVIER und E. C. G. STÜCKELBERG, Phys. Rev. **74**, 218 (1948). D. RIVIER, im Druck.
 - ¹⁰⁾ S. SAKATA, Progr. Theor. Phys. **2**, 145 (1947); A. PAIS, Phys. Rev. **68**, 227 (1946); J. RAYSKI, Acta Physica Polonica, IX, 129 (1948).
 - ¹¹⁾ Auch D. FELDMAN und J. SCHWINGER, B. Am. Phys. Soc., **23**, Nr. 7, 17 (1948) haben gefunden, dass bei diesem Problem sich sämtliche Divergenzen als Renormalisation von Masse und Ladung deuten lassen. Vgl. auch Z. KÔBA und G. TAKEDA, Progr. Theor. Phys. **3**, 202 (1948).
 - ¹²⁾ Diese Formel wurde bereits mitgeteilt im Solvay-Report 1948 sowie Phys. Rev. **75**, 1111 (1948).
-

Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld

von W. Scherrer, Bern.

(27. VI. 1949.)

§ 1. Einleitung.

Der umfassende Charakter der klassischen Einstein'schen Gravitationsgleichungen

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\sigma\varrho} R = -\kappa T_{\varrho\sigma} \quad (1.1)$$

kommt unter anderem darin zum Ausdruck, dass die identisch verschwindende Divergenz der linken Seite den sog. Erhaltungssatz

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial (\sqrt{-G} T_{\varrho}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} - T_{\varrho\lambda}^{\sigma} T_{\sigma}^{\lambda} = 0 \quad (1.2)$$

erzwingt, gleichgültig wie auch im einzelnen der Energietensor $T_{\varrho\sigma}$ gestaltet sein mag.

Obwohl schon seit langem Versuche unternommen werden, die Theorie nicht nur durch passende Wahl von $T_{\varrho\sigma}$, sondern auch durch gleichzeitige Bereicherung der Metrik zu fördern, habe ich den Eindruck, dass die bei Festhaltung der Riemann-Metrik sich bietenden Möglichkeiten noch nicht ausreichend analysiert worden sind. Im folgenden präsentiere ich daher eine Variante der Theorie, welche sich in diesem engeren Rahmen hält. Dabei stütze ich mich vor allem auf zwei Argumente:

1. *Physikalisch* ist es paradox, dass die Gleichungen (1.1) auch dann noch Lösungen liefern, wenn keine Materie vorhanden ist. Von einer Theorie, die die Materie nicht nur für die Abweichungen von der Trägheitsbahn, sondern für die totale metrische Struktur verantwortlich macht, sollte man eigentlich erwarten, dass sie im Falle verschwindender Materie entartet.

Anders ausgedrückt ist es paradox, wenn man einem Linienelement ds gemäss

$$ds^2 = G_{\sigma\sigma} dx_\sigma d\tilde{x}_\sigma \quad (1.3)$$

eine reale Existenz zusprechen will, auch wenn den beiden infinitesimal benachbarten Weltpunkten x_σ und $x_\sigma + dx_\sigma$ kein materielles Substrat entspricht.

So gelange ich zu der heuristischen Forderung, jeder Weltstelle x_σ eine Intensität ψ^2 zuzuordnen, etwa in dem Sinne, dass der Ausdruck

$$\psi^2 \sqrt{-G} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \psi^2 \sqrt{-G} dx \quad (1.4)$$

die relative Anzahl der im Volumelement $\sqrt{-G} dx$ vorhandenen materiellen Elemente darstellen soll. Es liegt im Wesen der Kontinuumstheorie, dass die entsprechende absolute Anzahl als mathematisch unendlich aufgefasst werden muss. Eine diskrete — und damit erkenntnistheoretisch befriedigendere — Theorie mit endlicher Elementzahl liegt wohl noch in weiter Ferne.

2. *Mathematisch* ist es verhänglich, in der Einstein'schen Theorie die so weit über den uns vertrauten Anschauungsbereich hinaus reicht, an den expliziten Gleichungen Zusatzglieder anzubringen. Methodisch viel günstiger ist es, von einem Wirkungsprinzip auszugehen. Ein solches liefert immer ein vollständiges System von Gravitations- und Materiegleichungen. Ausserdem gestattet es — ganz abgesehen von den rechnerischen Vorteilen — von Anfang an eine klare Scheidung zwischen Annahmen und Folgerungen.

Wohl das einfachste Wirkungsprinzip, das dem unter 1. entwickelten Gesichtspunkt Rechnung trägt, hat die Gestalt

$$\delta \int R \psi^2 \sqrt{-G} dx = 0 \quad (1.5)$$

Dabei könnte angesichts des relativen Charakters der Intensität ψ^2 die normierende Nebenbedingung

$$\delta \int \psi^2 \sqrt{-G} dx = 0 \quad (1.6)$$

von Interesse sein.

Eine naheliegende Bereicherung von (1.5) stellt das Prinzip

$$\delta \int \left(R \psi^2 + 4 \omega G^{\sigma\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right) \sqrt{-G} dx = 0 \quad (1.7)$$

dar.

Auf diese Ansätze habe ich schon vor längerer Zeit hingewiesen¹⁾. Jetzt konstatiere ich, dass Feldgleichungen, wie sie aus dem Prinzip (1.7) folgen, in der Literatur zur Behandlung kommen sollen²⁾. Ich hoffe daher, dass eine einlässlichere Darstellung meiner Untersuchungen Interesse finden werde.

Selbstverständlich hat man mit der Möglichkeit zu rechnen, dass Ansätze mit einer skalaren Intensität zu primitiv sind und man kann als nächste Stufe auch Invarianten in Betracht ziehen, die aus dem Vektorpotential Φ_o aufgebaut sind³⁾. Trotzdem beschränke ich mich auf den einfachsten Fall in der Hoffnung zu erfahren, was für Struktureffekte das metrische Feld allein schon ausübt.

Gegen die primäre Einführung eines Vektorfeldes Φ_o lässt sich nämlich folgendes sagen. Ein Vektor ist nach seinem ursprünglichen Sinne schon eine Relation zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten. Dasselbe gilt aber auch von dem Linienelement ds^2 . Es ist daher eine Frage von grundsätzlicher Bedeutung, was aus der Verbindung von ds^2 und ψ^2 allein schon folgt.

In dieser Arbeit will ich nun zeigen, dass das zum einfachsten Wirkungsprinzip (1.5) gehörige statische und räumlich zentral-symmetrische Problem exakt und vollständig lösbar ist. Die Lösungen bilden eine zweiparametrische Schar. Zu jeder dieser Lösungen gehört eine endliche Totalenergie. Wir haben hier ein Beispiel für ein Feld, das bei grosser Entfernung r vom Zentrum eine Energiedichte vom Typus

$$T_0^0 \sim \frac{\text{konst}}{r^4} \quad (1.8)$$

aufweist, dessen Totalenergie aber unter dem Einfluss des metrischen Feldes allein endlich bleibt.

§ 2. Die Feldgleichungen.

Wir legen uns vorderhand keine Beschränkung auf und leiten die Feldgleichungen ab für das Prinzip (1.7) mit der Nebenbedingung (1.6). Nach den Methoden der Variationsrechnung haben wir zu dem Zweck einfach das Prinzip

$$\delta \int \left[(R - 2A) \psi^2 + 4\omega G^{\sigma\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right] \sqrt{-G} dx = 0 \quad (2.1)$$

zu behandeln, wo A eine Konstante ist.

¹⁾ Verhandlungen der S.N.G., Basel, 1941, S. 86—87.

²⁾ G. LUDWIG und C. MÜLLER, Archiv der Mathematik **1**, 1948, S. 80—82.

³⁾ Mitteilungen der Berner Naturforschenden Gesellschaft, Neue Folge, Bd. 6 1949.

Zur leichteren Übersicht verwenden wir folgende Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} R_{\varrho\sigma} &\equiv \frac{\partial \Gamma_{\varrho\lambda}^{\lambda}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma_{\varrho\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} - Q_{\varrho\sigma} \\ Q_{\varrho\sigma} &\equiv \Gamma_{\varrho\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} - \Gamma_{\varrho\mu}^{\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \\ P^{\lambda} &\equiv G^{\lambda\varrho} \Gamma_{\varrho\mu}^{\mu} - G^{\varrho\mu} \Gamma_{\varrho\mu}^{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} R &\equiv G^{\varrho\sigma} R_{\varrho\sigma}; \quad \mathfrak{R} \equiv R \sqrt{-G} \\ Q &\equiv G^{\varrho\sigma} Q_{\varrho\sigma}; \quad \mathfrak{Q} \equiv Q \sqrt{-G} \\ \mathfrak{P}^{\lambda} &\equiv P^{\lambda} \sqrt{-G} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Dann gilt bekanntlich die Identität

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{\partial \mathfrak{P}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} + \mathfrak{Q}. \quad (2.4)$$

Weiter charakterisieren wir die kovariante Differentiation nach der Koordinate x_{ϱ} durch das Symbol D_{ϱ} und führen hierauf die Beltrami'schen Operatoren

$$\nabla \psi \equiv G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\varrho}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\sigma}} \equiv G^{\varrho\sigma} D_{\varrho} \psi D_{\sigma} \psi, \quad (2.5)$$

$$\square \psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} \left(\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\sigma}} \right) \equiv G^{\varrho\sigma} D_{\varrho} D_{\sigma} \psi \equiv D_{\sigma} \psi^{\sigma} \quad (2.6)$$

ein.

Benützen wir schliesslich noch die Abkürzung

$$\chi \equiv \psi^2 \quad (2.7)$$

so verwandelt sich (2.1) nach der durch (2.4) angezeigten partiellen Integration in

$$\delta \int \left[-\mathfrak{P}^{\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial x_{\lambda}} + (\mathfrak{Q} - 2A\sqrt{-G})\chi + \omega \frac{\sqrt{-G}}{\chi} \sqrt{-G} \right] dx = 0. \quad (2.8)$$

Die weitere Rechnung wird etwas verkürzt, wenn man als unabhängig zu variierende Funktionen die Grössen χ und $\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma}$ wählt. Die Variationen der $D_{\varrho} \chi$ lassen sich in der üblichen Weise durch partielle Integration entfernen und man erhält nach einer ersten Berechnungsphase an Stelle von (2.8):

$$\int \left\{ \begin{aligned} &\left[R - 2A + \omega \left(\frac{\sqrt{-G}}{\chi^2} - 2 \frac{\square \chi}{\chi} \right) \right] \sqrt{-G} \delta \chi \\ &D_{\lambda} \chi \delta \mathfrak{P}^{\lambda} + \chi \delta \mathfrak{Q} - 2A \chi \delta \sqrt{-G} + \omega \frac{D_{\varrho} \chi D_{\sigma} \chi}{\chi} \delta (\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma}) \end{aligned} \right\} dx = 0 \quad (2.9)$$

Zur Umformung der zweiten Zeile in (2.9) — Wegschaffung der Variationen der Ableitungen $\sqrt{-G} G^{e\sigma}$ — benötigt man die zum Rüstzeug der allgemeinen Relativitätstheorie gehörigen Formeln

$$\delta \sqrt{-G} = \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \delta (\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma}) \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{P}^\lambda = G^{\lambda\mu} \frac{\partial \sqrt{-G}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial (\sqrt{-G} G^{\lambda\mu})}{\partial x_\mu} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{Q} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} [F_{\varrho\sigma}^\lambda \delta (\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma})] - \frac{\partial}{\partial x_\nu} [F_{\lambda\mu}^\mu \delta (\sqrt{-G} G^{\lambda\nu})] \\ + R_{\varrho\sigma} \delta (\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nach einer zweiten Berechnungsphase erhält man dann das Teilintegral von (2.9)

$$\begin{aligned} \int (-D_\lambda \chi \cdot \delta \mathfrak{P}^\lambda + \chi \delta \mathfrak{Q}) dx \\ = \int (D_\varrho D_\sigma \chi + \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \square \chi + R_{\varrho\sigma} \chi) \delta (\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma}) dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Als Endresultat ergibt sich schliesslich die Formel

$$\begin{aligned} & \delta \int \left[(R - 2A) \chi + \omega \frac{V\chi}{\chi} \right] (\sqrt{-G} dx \\ & = \int \left\{ \begin{aligned} & \left[R - 2A + \omega \left(\frac{V\chi}{\chi^2} - 2 \frac{\square \chi}{\chi} \right) \right] \sqrt{-G} \delta \chi \\ & + \left[D_\varrho D_\sigma \chi + \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \square \chi \right. \\ & \left. + (R_{\varrho\sigma} - A G_{\varrho\sigma}) \chi + \omega \frac{D_\varrho \chi D_\sigma \chi}{\chi} \right] \delta (\sqrt{-G} G^{\varrho\sigma}) \end{aligned} \right\} dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Feldgleichungen der Gravitation lauten daher vorerst

$$(R_{\varrho\sigma} - A G_{\varrho\sigma}) \chi + D_\varrho D_\sigma \chi + \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \square \chi + \omega \frac{D_\varrho \chi D_\sigma \chi}{\chi} = 0, \quad (2.15)$$

und als Feldgleichung der Materie ergibt sich

$$R - 2A + \omega \left(\frac{V\chi}{\chi^2} - 2 \frac{\square \chi}{\chi} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Durch Multiplikation von (2.15) mit $G^{e\sigma}$ erhalten wir die zugehörige skalare Gleichung

$$(R - 4A) \chi + 3 \square \chi + \omega \frac{V\chi}{\chi} = 0. \quad (2.17)$$

Bildet man nun die Kombination χ^{-1} (2.15) — $\frac{1}{2} \chi^{-1} G_{\varrho\sigma}$ (2.17), so

erhält man schliesslich die Feldgleichungen der Gravitation in der Gestalt

$$\begin{aligned} R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} R + \Lambda G_{\varrho\sigma} \\ + \frac{1}{\chi} (D_{\varrho} D_{\sigma} \chi - G_{\varrho\sigma} \square \chi) \\ + \frac{\omega}{\chi^2} \left(D_{\varrho} \chi D_{\sigma} \chi - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} V \chi \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

die zum Vergleich mit den klassischen Gleichungen (1.1) geeignet ist.

Analog bilden wir die Kombination (2.17) $-\chi \cdot$ (2.16) und erhalten als Feldgleichung der Materie

$$(\mathfrak{g} + 2\omega) \square \chi - 2\Lambda \chi = 0 \quad (2.19)$$

Aus dem Vergleich unserer Gleichungen (2.18) mit den klassischen Gleichungen (1.1) entnehmen wir nun, dass wir als Energietensor anzusetzen haben

$$T_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\chi} \left\{ \frac{D_{\varrho} D_{\sigma} \chi - G_{\varrho\sigma} \square \chi}{\chi} + \omega \cdot \frac{D_{\varrho} \chi \cdot D_{\sigma} \chi - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} V \chi}{\chi^2} \right\}. \quad (2.20)$$

Schon Einstein hat das kosmologische Glied als einen Schönheitsfehler der Theorie bezeichnet. Gerade an dieser Stelle kommt einem das zum Bewusstsein, da es für sich allein schon dem Erhaltungssatz (1.2) genügt, könnte man es ungestraft zum Energietensor schlagen. Dies aber hat wiederum nicht viel Zweck, da kein Austausch mit $T_{\varrho\sigma}$ stattfindet.

§ 3. Das statische Zentralfeld.

Wir wählen das Schwarzschild'sche Linienelement

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - g^2 dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

wo nun also f und g Funktionen des Radius r sind. Es folgt

$$\sqrt{-G} = f g r^2 \sin \vartheta, \quad (3.2)$$

und man erhält

$$\mathfrak{R} = \left\{ - \left[\frac{2r}{g} (rf' + 2f) \right]' + 2 \left(\frac{2rf' + f}{g} + fg \right) \right\} \sin \vartheta, \quad (3.3)$$

wobei der Strich die Ableitung nach r anzeigt.

Das Wirkungsprinzip (2.1) nimmt für $\lambda = \omega = 0$ und mit (2.7) die Gestalt

$$\delta \int R \chi \sqrt{-G} dx = 0 \quad (3.4)$$

an. Lassen wir hier die Zeit und die Winkelvariablen weg, so ergibt sich nach Ausübung der durch (3.3) nahegelegten partiellen Integration das Prinzip

$$\delta \int \left\{ \frac{r}{g} (r f' + 2f) \chi' + \left(\frac{2 r f' + f}{g} + f g \right) \chi \right\} dr = 0. \quad (3.5)$$

Durch sukzessive Variation von f , χ und g , gefolgt von respektiver Division durch χ , f und χf erhält man nach leichter Umformung die Gleichungen

$$\left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \right]' + \frac{r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^2 - \left(g + \frac{1}{g} \right) = 0, \quad (3.6)$$

$$\left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) \right]' + \frac{r^2}{g} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - \left(g + \frac{1}{g} \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{r^2}{g^2} \left(\frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) - \left(1 + \frac{3}{g^2} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Ersetzt man hier die beiden ersten Gleichungen durch ihre Differenz und ihre Summe und führt man überdies an Stelle von χ und f die neuen Funktionen

$$P \equiv \chi f, \quad Q \equiv \frac{\chi}{f} \quad (3.9)$$

ein, so erhält man durch Auswertung einer an der Differenz unmittelbar ersichtlichen Integration, das System

$$\frac{r^2 Q'}{g Q} = \frac{A}{P}, \quad (3.10)$$

$$2 \frac{r^2}{g} \left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{P'}{P} + \frac{4}{r} \right) \right]' + \left(\frac{r^2}{g} \frac{P'}{P} \right)^2 + \frac{A^2}{P^2} - 4 r^2 \left(1 + \frac{1}{g^2} \right) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{g^2} \left[r^2 \left(\frac{P'}{P} \right)^2 + 8 r \frac{P'}{P} + 4 \right] - \left(\frac{A^2}{r^2 P^2} + 4 \right) = 0. \quad (3.12)$$

Hier empfiehlt es sich, (3.11) noch umzuformen in

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{g^2} \left[2 r \left(\frac{r P'}{P} \right)' + \left(\frac{r P'}{P} \right)^2 + \frac{2 r P'}{P} + 4 \right] \\ & + \left(\frac{1}{g^2} \right)' r^3 \left(\frac{r P'}{P} + 4 \right) + \frac{A^2}{P^2} - 4 r^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.11')$$

Setzt man jetzt

$$S \equiv rP ; \quad K \equiv \frac{rP'}{P}, \quad (3.13)$$

so gilt offenbar

$$rS' = S(K+1). \quad (3.14)$$

Nun findet man aus (3.12) und (3.11') nach einiger Rechnung als Differentialgleichung zwischen S^2 und K allein

$$\frac{2(K+1) dK}{K(K^2+8K+4)} + \frac{d(S^2)}{A^2+4S^2} = 0. \quad (3.15)$$

Ihr Integral lautet

$$\frac{K^2(A^2+4S^2)}{K^2+8K+4} = B^2. \quad (3.16)$$

Weiter finden wir aus (3.10), (3.13) und (3.14)

$$\frac{dQ}{Q} = g \frac{A dS}{(K+1)S^2}. \quad (3.17)$$

Aus (3.12), (3.13) und (3.16) aber folgt

$$g = \frac{KS}{B}, \quad (3.18)$$

womit (3.17) übergeht in

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{AK}{B(K+1)} \cdot \frac{dS}{S}. \quad (3.19)$$

Um nun die endgültige Integration einzuleiten, müssen wir die nach (3.13) und (3.14) in (3.16) enthaltene Differentialgleichung auflösen. Setzt man

$$s \equiv Lgr \quad (3.20)$$

und bezeichnet die Ableitung nach s mit einem Punkt, so erhält man

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{4S^2 + A^2 + 3B^2 - 2B\sqrt{4S^2 + A^2 + 3B^2}}{4S^2 + A^2 - B^2}. \quad (3.21)$$

Führt man nun die Abkürzungen

$$2a = \sqrt{A^2 + 3B^2}, \quad \beta = \frac{B}{2a} \quad (3.22)$$

ein, so verwandelt sich (3.21) mittels der Substitution

$$S = a \sqrt{x^2 - 1} \quad (3.23)$$

in

$$\frac{x+2\beta}{x^2-1} dx = ds. \quad (3.24)$$

Die Integration ergibt mit Rücksicht auf (3.20)

$$r = b \sqrt{x^2 - 1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^\beta. \quad (3.25)$$

Aus (3.14), (3.20), (3.21), (3.22) und (3.23) folgt weiter

$$K = - \frac{2\beta}{x+2\beta}. \quad (3.26)$$

Führt man nun (3.23) und (3.26) in (3.19) ein und integriert, so folgt

$$Q = C \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-\alpha} \quad (3.27)$$

mit

$$\alpha = \frac{A}{2a}. \quad (3.28)$$

Aus (3.13), (3.23) und (3.25) ergibt sich dazu

$$P = \frac{a}{b} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-\beta}. \quad (3.29)$$

Wegen (3.9) erhalten wir also

$$\chi^2 = \frac{Ca}{b} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-(\alpha+\beta)} \quad (3.30)$$

und

$$f^2 = \frac{a}{Cb} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{\alpha-\beta}. \quad (3.31)$$

Aus (3.18), (3.23), (3.26) und (3.22) folgt schliesslich

$$q^2 = \frac{x^2 - 1}{(x + 2\beta)^2}. \quad (3.32)$$

Jetzt nehmen wir die Normierung im Unendlichen vor. Aus $x \rightarrow \infty$ folgt nach (3.25) $r \rightarrow \infty$. Damit also das pseudoeuklidische Linienelement herauskommt, muss in (3.31) gesetzt werden

$$\frac{a}{Cb} = 1. \quad (3.33)$$

Weiter aber normieren wir die relative Intensität χ so, dass im Unendlichen herauskommt $\chi = 1$. Nach (3.30) bedingt dies

$$\frac{Ca}{b} = 1. \quad (3.34)$$

Wir haben also zu setzen

$$b = a ; \quad C = 1. \quad (3.35)$$

Schliesslich ist noch zu beachten, dass wegen (3.22) und (3.28) gilt

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 1 \quad (3.36)$$

Die gewonnenen Resultate stellen wir nun zusammen in folgender Tabelle

$\begin{aligned} r &= a \sqrt{x^2 - 1} \left \frac{x-1}{x+1} \right ^\beta \\ f^2 &= \frac{x-1}{x+1}^{\alpha-\beta} \\ g^2 &= \frac{x^2-1}{(x+2\beta)^2} \\ \chi^2 &= \left \frac{x-1}{x+1} \right ^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}$	(3.37)
--	--------

Nach (3.23) muss auf jeden Fall $|x| > 1$ sein. Doch genügt es, sich auf

$$x > 1 \quad (3.38)$$

zu beschränken, denn die den negativen x -Werten entsprechenden Lösungen erhält man auch bei positiven x -Werten, wenn man in der Tabelle das Exponentenpaar (α, β) durch $(-\alpha, -\beta)$ ersetzt.

§ 4. Der Energietensor.

Um den Energietensor zu berechnen, führen wir auch im Linienelement (3.1) an Stelle von r den Parameter x ein. Nach (3.37) haben wir also einzusetzen

$$r = a(x-1)^{\frac{1}{2}+\beta}(x+1)^{\frac{1}{2}-\beta}, \quad (4.1)$$

und wir erhalten

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - h^2 dx^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (4.2)$$

mit

$$h = a \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^\beta. \quad (4.3)$$

Jetzt ermitteln wir die Dreizeigersymbole auf Grund der Tatsache, dass die Differentialgleichungen der geodätischen Linie auf kanonische Gestalt gebracht, die Form

$$\ddot{x}_\varrho + \Gamma_{\lambda\mu}^\varrho \dot{x}_\lambda \dot{x}_\mu = 0 \quad (4.4)$$

haben müssen, falls man die Bogenlänge als Parameter benützt.

Bezeichnen wir – in Abweichung von § 3 – die Ableitung nach x mit einem Strich, so ergibt die Berechnung

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{f'}{f}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{ff'}{h^2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{h'}{h}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{rr'}{h^2}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{rr'}{h^2} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{r'}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{r'}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{tg} \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

während alle übrigen $\Gamma_{\lambda\mu}^\varrho$ Null sind.

Ausgehend von (2.20) erhält man nun vorerst für die nicht verschwindenden Komponenten des Energietensors

$$\left. \begin{aligned} \kappa T_0^0 &= -G^{00} \Gamma_{00}^1 \cdot \frac{\chi'}{\chi} = -\frac{f' \chi'}{h^2 f \chi} \\ \kappa T_1^1 &= G^{11} \left(\frac{\chi''}{\chi} - \Gamma_{11}^1 \frac{\chi'}{\chi} \right) = -\frac{h \chi'' - h' \chi'}{h^3 \chi} \\ \kappa T_2^2 &= -G^{22} \Gamma_{22}^1 \frac{\chi'}{\chi} = -\frac{r' \chi'}{h^2 r \chi} \\ \kappa T_3^3 &= -G^{33} \Gamma_{33}^1 \frac{\chi'}{\chi} = -\frac{r' \chi'}{h^2 r \chi} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Die weitere Berechnung nach (3.37) und (4.3) liefert zuerst

$$\frac{f'}{f} = \frac{\alpha - \beta}{x^2 - 1}, \quad \frac{\chi'}{\chi} = -\frac{\alpha + \beta}{x^2 - 1}, \quad \frac{r'}{r} = \frac{x + 2\beta}{x^2 - 1}, \quad (4.7)$$

und schliesslich

$$\left. \begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\kappa a^2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-2\beta} \frac{1}{(x^2-1)^2} \\ T_1^1 &= -\frac{\alpha + \beta}{\kappa a^2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-2\beta} \frac{2x + \alpha + 3\beta}{(x^2-1)^2} \\ T_2^2 = T_3^3 &= \frac{\alpha + \beta}{\kappa a^2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-2\beta} \frac{x + 2\beta}{(x^2-1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Mit

$$\sqrt{-G} = f h r^2 \sin \vartheta = a^3 \frac{x-1}{x+1} \left| \frac{\alpha+\beta}{2} \right| (x^2-1) \sin \vartheta \quad (4.9)$$

ergibt sich also die Energiedichte

$$T_0^0 \sqrt{-G} = \frac{a (\alpha^2 - \beta^2)}{\kappa} \frac{x-1}{x+1} \left| \frac{\alpha+\beta}{2} \right| \frac{\sin \vartheta}{x^2-1} \quad (4.10)$$

Nun berechnet man ohne Schwierigkeit die Totalenergie

$$E = \int_1^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} T_0^0 \sqrt{-G} d\varphi d\vartheta dx. \quad (4.11)$$

Die Integration über die Winkel ergibt zuerst

$$E = \frac{4\pi a (\alpha^2 - \beta^2)}{\kappa} \int_1^\infty \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{dx}{x^2-1}, \quad (4.12)$$

und mit Hilfe der Substitution

$$\frac{x-1}{x+1} = z^2 \quad (4.13)$$

erhält man weiter

$$E = \frac{4\pi a (\alpha^2 - \beta^2)}{\kappa} \int_0^1 z^{\alpha+\beta-1} dz. \quad (4.14)$$

Damit das Integral konvergiert, muss also gelten

$$\alpha + \beta > 0 \quad (4.15)$$

und es folgt

$$E = \frac{4\pi a (\alpha - \beta)}{\kappa} \quad (4.16)$$

Besonderes Interesse verdienen die Grenzfälle $\alpha + \beta = 0$, da für sie der Energietensor in allen Punkten $x > 1$ verschwindet, während er im Punkte $x = 1$ unendlich wird. Die Totalenergie geht dabei stetig in den durch (4.16) gegebenen Wert über.

Im Detail sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{a) } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}. \quad (4.17\text{a})$$

Man kann in (3.37) r als unabhängige Variable verwenden und erhält

$$f^2 = 1 - \frac{2a}{r}, \quad (4.18\text{a})$$

$$g^2 = \frac{1}{1 - \frac{2a}{r}}, \quad (4.19\text{a})$$

$$\chi = 1. \quad (4.20\text{a})$$

Es liegt also das Einstein'sche Zentralfeld für den Gravitationsradius a vor, dem nach (4.16) jetzt die Totalenergie

$$E = \frac{4\pi a}{\kappa} \quad (4.21\text{a})$$

zugeordnet ist.

$$\text{b) } \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad (4.17\text{b})$$

Analog wie oben erhält man

$$f^2 = 1 + \frac{2a}{r}, \quad (4.18\text{b})$$

$$g^2 = \frac{1}{1 + \frac{2a}{r}}, \quad (4.19\text{b})$$

$$\chi = 1, \quad (4.20\text{b})$$

also ein Feld, das einer negativen Masse entsprechen würde. Als Totalenergie folgt

$$E = -\frac{4\pi a}{\kappa}. \quad (4.21\text{b})$$

Bezeichnet man im Falle a) die Masse mit m , so liefert der bekannte Vergleich mit dem Newton'schen Potential

$$a = \frac{km}{c^2}, \quad (4.22)$$

wobei k die Newton'sche Gravitationskonstante und c die Licht-

geschwindigkeit bedeutet. Nimmt man nun noch den Satz von der Trägheit der Energie

$$m = \frac{E}{c^2} \quad . \quad (4.23)$$

hinzu, so erhält man aus (4.21a)

$$\kappa = \frac{4\pi k}{c^4} \quad , \quad (4.24)$$

also die Hälfte desjenigen Wertes, der für den phänomenologischen Energietensor aus der Poisson'schen Gleichung folgt.

Diese Abweichung hängt offenbar damit zusammen, dass für ein Materiefeld, das ein statisches Gleichgewicht zulässt, die Poisson'sche Gleichung auch näherungsweise nicht zuständig sein kann.

§ 5. Schlussbemerkungen.

Rückblickend erhalten wir folgendes Bild. Wenn wir die invariante Intensität χ als eigentlichen Repräsentanten der Materie betrachten, ist die Welt nirgends leer. Da nach (4.15) $\alpha + \beta > 0$ und nur in den Grenzfällen $\alpha + \beta = 0$ ist, weist die Intensität χ nach (3.37) normalerweise eine singuläre Verdichtung im Zentrum auf, die kontinuierlich auf 1 abklingt. Wenn man dagegen die Energiedichte als Repräsentanten der Materie auffasst, so kann diese Dichte nach (4.8) positiv, Null oder negativ sein. In allen Fällen aber liegt — auch nach (4.10) — eine singuläre Verdichtung des Absolutwertes im Zentrum vor.

Für die weitere Abklärung wäre natürlich eine Herleitung der ponderomotorischen Kraft erwünscht. Wenn man orientierungshalber das im Grenzfall (4.17a) bewährte Gesetz der geodätischen Linie zugrunde legt, wird man auf die Vermutung geführt, dass ein kontinuierlicher Übergang von anziehenden zu abstossenden Kräften stattfindet.

Grundsätzlich betrachtet, ist allerdings die Herleitung einer ponderomotorischen Kraft gar nicht nötig. Die konsequente Weiterentwicklung würde vielmehr darin bestehen, das Zweizentrenproblem vollständig zu lösen. Ich weiss aber nicht, ob irgendeine Aussicht besteht, diese schwierige Aufgabe zu bewältigen.

Da unser Modell ein vollständiges Gleichgewicht liefert, muss es sinngemäss in erster Linie für Elementarteilchen in Aussicht genommen werden. Man wird sich also fragen, weshalb noch keine Quantisierung auftritt. Dazu möchte ich nur folgendes bemerken. Einmal ist die Beschränkung auf den absolut statischen Fall

möglicherweise zu eng. Weiter aber ist es denkbar, dass eine Quantisierung erst bei Wechselwirkung, also beim Zweizentrenproblem, auftritt. Faktisch liegt ja bei den klassischen Quantisierungen immer Wechselwirkung vor.

Schliesslich gebe ich noch zwei Hinweise auf weitere in § 1 genannte Probleme:

1. das Problem (1.5) — also das eben behandelte Problem — hat keine statische Lösung, wenn man die Nebenbedingung (1.6) hinzunimmt.

2. Das statische und zentralsymmetrische Problem (1.7) ohne Nebenbedingung (1.6) lässt sich analog zum eben behandelten Problem ebenfalls vollständig lösen. Abgesehen von einer an sich natürlich wesentlichen Strukturänderung des Gesamtfeldes tritt grundsätzlich nichts Neues auf. Die Energieverhältnisse habe ich noch nicht untersucht.

Zur temperaturbedingten Änderung eines Absorptionsspektrums

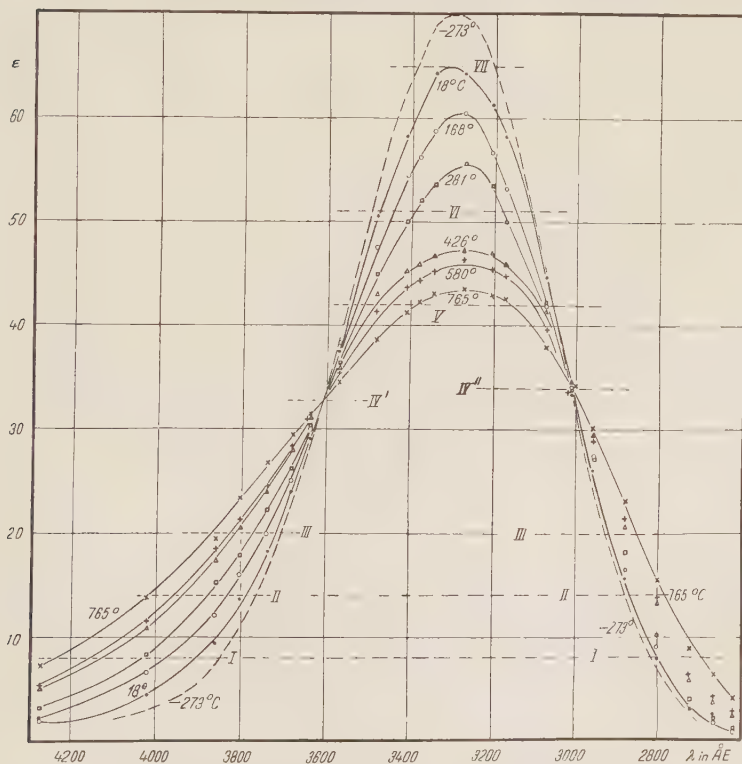
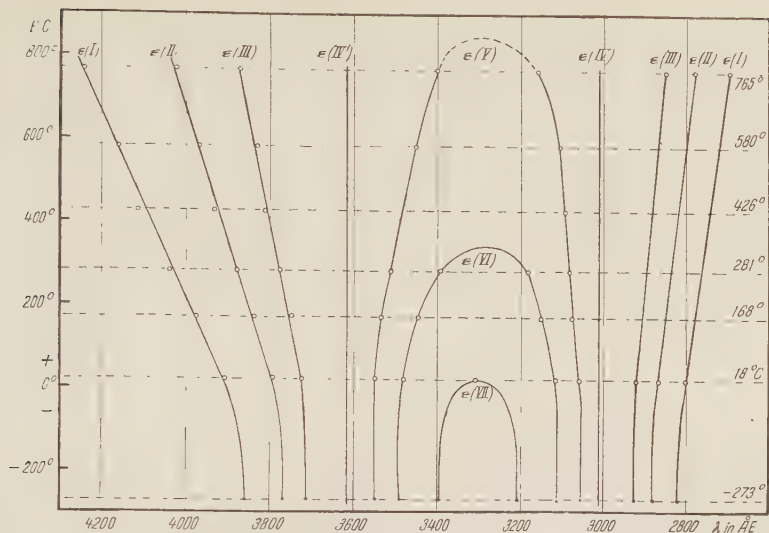
von A. Herzog und K. Wieland.

(4. VI. 49.)

Wir haben kürzlich gezeigt¹⁾, dass im kontinuierlichen Absorptionsspektrum einiger einfacher Substanzen in Gas-Phase der Extinktionskoeffizient ϵ_λ bei mindestens einer Wellenlänge temperaturunabhängig ist, dass hier also ein Kreuzpunkt (X-Punkt in der Bezeichnung von PRICE²⁾) der Absorptionskurven bei verschiedenen Temperaturen vorliegt, und ferner, dass in der Nähe dieses Kreuzpunktes die temperaturbedingte Wellenlängenverschiebung für konstanten Extinktionswert weitgehend linear mit der Temperatur erfolgt (λ , t -Gerade). Nach R. A. WEALE³⁾, der auf unsere Arbeit Bezug nimmt, soll nun diese Gesetzmässigkeit dahin erweitert werden, dass die bis -273°C extrapolierten λ , t -Geraden einen gemeinsamen Ursprung besitzen, und zwar für die dem Absorptionsmaximum entsprechende Wellenlänge bei -273°C . WEALE stützt sich hierbei auf unsere Angaben für Chlor sowie auf Absorptionsmessungen von BRODA und GOODEVE⁴⁾ an Sehpurpur.

Wir sind nicht der Meinung, dass eine so komplizierte Substanz wie Sehpurpur, zumal auf Grund von so unzulänglichen Messdaten (vgl. Fig. 1 bei WEALE), geeignet ist, um eine derartige Gesetzmässigkeit zu prüfen. Dagegen eignet sich hierfür in geradezu idealer Weise das von GIBSON, RICE und BAYLISS⁵⁾ in einem grossen Temperaturbereich genau vermessene und berechnete Absorptionsspektrum von Chlor. Wir haben daher in der beigegebenen Figur (untere Hälfte) nochmals die von diesen Autoren gemessenen Absorptionskurven von Chlor und die daraus abgeleiteten λ , t -Kurven (obere Hälfte der Figur) in einem gegenüber unseren früheren Figuren 3 und 4 erweiterten Bereich aufgezeichnet. Die Absorptionskurve bei -273°C erhält man aus den von BAYLISS und GIBSON in ihrer Tabelle II angegebenen ϵ_0 -Werten.

Auf Grund dieser Figur kommen wir zu folgendem Schluss: Das Auftreten von λ , t -Geraden, für das wir keine ersichtliche Begrün-



Absorptionskurven von Cl_2

unten: ε in Abhängigkeit von λ bei konstanten Temperaturen (t^0 C).
oben: t^0 in Abhängigkeit von λ bei konstanten ε -Werten.

dung geben konnten, beschränkt sich wesentlich auf das Gebiet in der Nähe des X-Punktes. Von einem gemeinsamen Schnittpunkt dieser Geraden bei $t = -273^{\circ}\text{C}$ kann keine Rede sein, weder bei der einem X-Punkt, und noch weniger bei der dem Absorptionsmaximum entsprechenden Wellenlänge. Letzteres ist bei Molekülen schon deshalb unmöglich, weil die Breite einer Absorptionsbande, infolge der Nullpunktschwingung, bei -273°C keineswegs unendlich schmal wird.

Physikalisch-chemisches Institut der Universität Zürich.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ A. HERZOG und K. WIELAND, *Helv. Phys. Acta*, **21**, 6 (1948).
 - ²⁾ D. J. PRICE, *Proc. Phys. Soc.* **59**, 131 (1947).
 - ³⁾ R. A. WEALE, *Helv. Phys. Acta* **22**, 164 (1949).
 - ⁴⁾ BRODA und GOODEVE, *Proc. Roy. Soc. A*, **179**, 151 (1941).
 - ⁵⁾ G. E. GIBSON, O. K. RICE und N. S. BAYLISS, *Phys. Rev.* **44**, 189 und 193 (1933).
-

Zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstandes elektromagnetischer Hohlräume

von F. Borgnis (Zürich).

(12. VI. 1949)

Zur Messung des Resonanzwiderstandes von Hohlraumresonatoren lassen sich eine Anzahl von Methoden angeben. Nach Betrachtungen allgemeiner Art über den Begriff und die Messung des Resonanzwiderstandes bei Mikrowellen werden diese Methoden speziell auf Hohlräume angewandt, deren elektromagnetisches Feld in gewissen Bereichen, auf die der Resonanzwiderstand bezogen wird, entweder als homogen oder als rotationssymmetrisch angesehen werden kann. Die notwendigen theoretischen Beziehungen werden abgeleitet; experimentelle Untersuchungen bei einer Wellenlänge von 14 cm an verschieden gestalteten Hohlräumen zeigen die Eignung und die Genauigkeit der angeführten Messmethoden.

Das Verhalten eines schwach gedämpften Parallelresonanzkreises gegenüber einer Wechselspannung der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ lässt sich durch ein Ersatzschaltbild nach Fig. 1 beschreiben. Bei Resonanz ($\omega^2 LC = 1$) stellt R_p den zwischen den Stellen A und B wirksamen, rein ohm'schen „Resonanzwiderstand“ dar. Die „Dämpfung“ d bzw. ihr Reziprokwert $Q = 1/d$ (Quality-factor) eines solchen Kreises lässt sich in bekannter Weise aus der Breite der Resonanzkurve ermitteln. Energetisch können Dämpfung und Resonanzwiderstand folgendermassen definiert werden: Die Dämpfung

$$d = \frac{\bar{Q}}{\omega \bar{W}}, \quad (1)$$

wobei \bar{Q} die im Zeitmittel vom Kreis aufgenommene Verlustleistung und $\omega \bar{W}$ die mittlere Blindleistung (\bar{W} = mittlerer elektromagnetischer Energieinhalt) bedeuten; der Resonanzwiderstand

$$R_p = \frac{U^2}{\bar{Q}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\bar{Q}}. \quad (2)$$

$\bar{U}^2 = U_{\text{eff}}^2$ ist das Quadrat der effektiven Wechselspannung am

Kreis. Dämpfung und Resonanzwiderstand stehen daher allgemein in dem Zusammenhang

$$d \cdot R_p = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\omega W}. \quad (3)$$

Für einen Kreis nach Fig. 1 gilt speziell

$$d \cdot R_p = \omega L = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3a)$$

Im Bereich hoher Frequenzen, bei denen die linearen Abmessungen der Kreise in die Grössenordnung der Wellenlänge kommen, ist eine

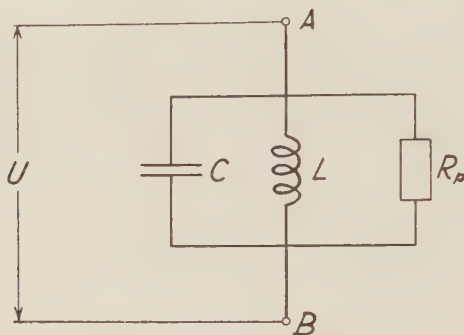


Fig. 1.

Ersatzbild eines schwach gedämpften Parallelresonanzkreises (R_p , Parallelresonanzwiderstand, U = Wechselspannung zwischen den Punkten A , B).

„quasistationäre“ Betrachtungsweise nicht mehr angängig. Die Verschiebungsströme treten wesentlich in Erscheinung, und die idealisierten Begriffe einer konzentrierten Kapazität oder Induktivität verlieren ihre Gültigkeit. Als Resonanzkreise verwendet man daher hier geschlossene metallische Hohlräume, in deren Innerem durch eine von aussen eingeführte Erregung ein elektromagnetisches Wechselfeld aufrechterhalten wird. Das Wechselspiel zwischen magnetischer und elektrischer Energie, die im quasistationären Fall in der Induktivität L bzw. der Kapazität C konzentriert ist, vollzieht sich hier im elektromagnetischen Feld des Hohlraums (HR), wobei elektrisches und magnetisches Feld räumlich nicht mehr zu trennen sind. Beziehungen von der Art (3a) verlieren ihren Sinn*);

*) In der Umgebung einer Resonanzstelle kann zwar auch das Verhalten eines Hohlraumresonators durch ein Ersatzbild nach Fig. 1 (oder einen Serienresonanzkreis) beschrieben werden; die fiktiven Grössen L und C haben jedoch dann keine unmittelbare physikalische Bedeutung wie beim quasistationären Kreis.

hingegen bleiben die energetischen Beziehungen (1) bis (3) aufrecht.

Die Dämpfung d kann auch bei Hohlräumen aus der Resonanzkurve entnommen werden¹⁾. Bei der Definition des Resonanzwiderstandes R_p nach (2) muss hier aber noch angegeben werden, was unter der „Spannung“ U_{eff} verstanden wird, da das Linienintegral der elektrischen Feldstärke zwischen zwei Punkten im Innern eines HR nicht mehr unabhängig vom beliebigen Weg ist; es müssen also Bezugspunkte A, B (Fig. 2) für R_p festgelegt werden, ausserdem muss der Weg, auf den die „Spannung zwischen A und B“ bezogen wird, evident sein.

Die Kenntnis von R_p spielt bei der Anwendung von Hohlraumresonatoren eine bedeutende Rolle. So liefert R_p beispielsweise die

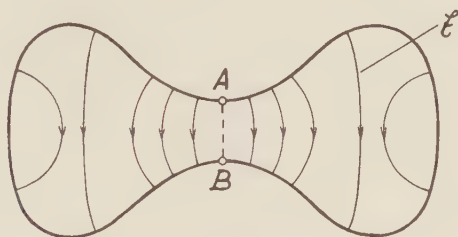


Fig. 2.

Hohlraumresonator mit einer durch die elektrischen Feldlinien E angedeuteten Erregung. Der Resonanzwiderstand wird hier z. B. auf die Punkte A, B, die „Spannung U_{AB} “ auf den Weg AB längs der Symmetrieachse bezogen.

Grösse der aufzuwendenden Verlustleistung, wenn in einem HR zwischen zwei gewählten Bezugspunkten eine Wechselspannung vorgegebener Grösse (z. B. bei Acceleratoren) erzeugt werden soll; oder man erhält damit den Wert des Anfachstromes für einen Elektronenstrahl, der einen solchen HR zu Eigenschwingungen anregt. Die zweckmässige Wahl der Stellen A, B, auf welche R_p jeweils zu beziehen ist, folgt meist ohne weiteres aus der geometrischen Konfiguration des HR.

Die folgende Untersuchung befasst sich mit verschiedenen Methoden zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstandes von Hohlräumen gebräuchlicher Formen. Teil I gibt die notwendigen theoretischen Beziehungen; Teil II berichtet über die experimentellen Ergebnisse bei den verschiedenen Methoden, so dass dieselben bezüglich ihrer Brauchbarkeit untereinander verglichen werden können.

I. Theoretische Beziehungen für die experimentelle Bestimmung des Resonanzwiderstandes.

1. Besitzen die verwendeten Hohlräume einfache geometrische Gestalt, so lassen sich Resonanzwiderstand und Dämpfung formelmässig berechnen*). Als Beispiel mögen die folgenden Anordnungen dienen:

a) Im kreiszyllindrischen Hohlraum (Fig. 3), der in der elektrischen Grundschiwingung (TM_{001}) erregt ist, besitzt das elektrische Feld E nur eine Komponente in Richtung der Zylinderachse; die

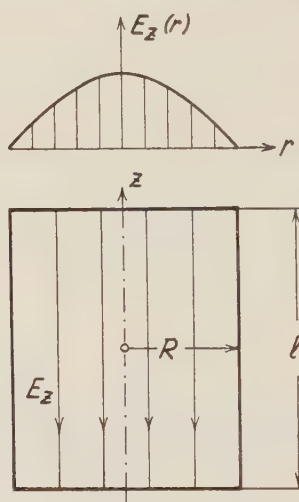


Fig. 3.

Kreiszyllindrischer Hohlraum mit ebenen Abschlussflächen bei Erregung in der elektrischen Grundschiwingung (TM_{001}).

radiale Verteilung $E_z(r)$ verläuft nach der Besselfunktion $J_0(kr)$ mit $k = 2\pi/\lambda$, wenn λ die Resonanzwellenlänge der Grundschiwingung bedeutet. Von der z -Koordinate hängt E_z nicht ab: die magnetischen Feldlinien verlaufen in Kreisen um die Achse²⁾. Die Resonanzwellenlänge ist gegeben durch

$$\lambda = 2,61 \cdot R. \quad (4)$$

*) Die Formeln werden im praktischen Maßsystem angegeben (Einheiten: Volt, Ampere, cm, sec.). Es bedeuten: $c = 3 \cdot 10^{10}$ (Lichtgeschwindigkeit), $\epsilon_0 = 0,886 \cdot 10^{-13} = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11})$ (Dielektrizitätskonstante des Vakuums), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ (Permeabilität des Vakuums), σ = elektrische Leitfähigkeit der inneren Hohlraum-berandung in $(\text{Ohm} \cdot \text{cm})^{-1}$.

Weiterhin ergeben sich (s. a. Fig. 10):

$$R_p(A, B) = \frac{\pi l}{0,39 \lambda c \varepsilon_0} \sqrt{\frac{30 \sigma}{\lambda}} \frac{1}{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{l} \right)} [\text{Ohm}] \quad (5)$$

$$d = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{\lambda}{30 \sigma}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{l} \right) \quad (6)$$

und somit

$$d \cdot R_p = \frac{l}{0,78 \lambda c \varepsilon_0} [\text{Ohm}]. \quad (7)$$

b) Eine koaxiale kreiszylindrische, beiderseits metallisch abgeschlossene Doppelleitung (Fig. 4) von der Länge l und dem Aussen- bzw. Innenradius r_a und r_i besitzt bei der Erregung als Lecherleitung (TEM-Typ) ein radiales elektrisches Feld E_r und ein in Kreisen um die Achse verlaufendes magnetisches Feld H_φ , wobei die Felder in Ebenen senkrecht zur Achse liegen ($E_z = H_z \equiv 0$) und längs der

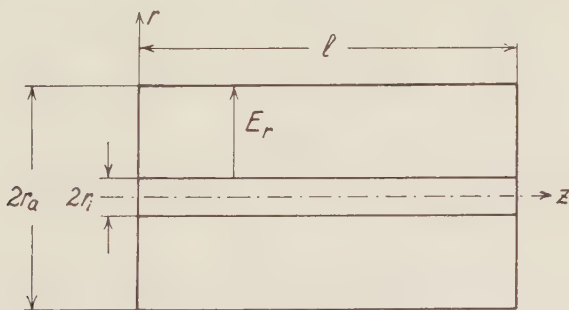


Fig. 4.

Konzentrische kreiszylindrische Leitung mit ebenen Abschlussflächen. E_r elektrische Feldstärke bei Erregung im Lechertyp (TEM-Typ).

z -Achse sinusförmig variieren. Die Resonanzwellenlänge der *Grundschwingung* ist

$$\lambda = 2 l. \quad (8)$$

Weiterhin gilt für eine Stelle z der Leitung³⁾:

$$R_p(z) = \frac{4}{\pi \varepsilon_0 c} \sqrt{\frac{30 \sigma}{\lambda}} \frac{r_a \ln r_a / r_i}{1 + r_a / r_i + \frac{4 r_a}{l}} \sin^2 \frac{2 \pi}{\lambda} z [\text{Ohm}], \quad (9)$$

für die Dämpfung

$$d = \frac{1}{4 \pi} \sqrt{\frac{\lambda}{30 \sigma}} \frac{1}{r_a} \left[\frac{1 + r_a / r_i}{\ln r_a / r_i} + \frac{4 r_a}{l} \right] \quad (10)$$

und somit

$$\bar{d} \cdot R_p(z) = \frac{\ln r_a/r_i}{\pi^2 c \varepsilon_0} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} z [\text{Ohm}]. \quad (11)$$

In Fällen, die einer exakten Rechnung zugänglich sind, wie z. B. in den vorangehenden, lässt sich der Resonanzwiderstand daher berechnen, sobald die Dämpfung d bekannt ist. Diese kann durch Aufnahme der Resonanzkurve (bei quadratisch arbeitendem Indikator aus der Halbwertsbreite) experimentell bestimmt werden.

2. Für Hohlräume mit weniger einfachen geometrischen Formen lässt sich die Feldverteilung als Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für die zugehörigen Randbedingungen meist nicht in geschlossener Form bestimmen. Energieinhalt und Verlustleistung im HR und damit ein theoretischer Zusammenhang zwischen R_p und d können hier nicht in einfacher Weise formelmässig angegeben werden.

Im folgenden werden einige Methoden besprochen, die zur experimentellen Bestimmung von R_p verwendet werden können. Aus Gründen, die sogleich verständlich werden, wollen wir diese Methoden abkürzend als ΔC -, ΔL -, und ΔR_p -Methode bezeichnen.

A. Methode der dielektrischen Verstimmung (ΔC -Methode).

Zur Veranschaulichung betrachten wir den Resonanzkreis der Fig. 1 mit „konzentrierten“ Elementen C , L und R_p . Für die Resonanzfrequenz gilt

$$\omega^2 LC = 1 \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}. \quad (12)$$

Variiert man die Kapazität C (bei konstantem L) um ΔC , so folgt die zugehörige Änderung der Resonanzfrequenz $\Delta\omega$ mit (12) aus

$$2\omega C \Delta\omega + \omega^2 \Delta C = 0;$$

daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\omega C} = - \frac{2}{\omega^2} \frac{\Delta\omega}{\Delta C} = 2 \frac{\Delta(1/\omega)}{\Delta C} = \frac{1}{\pi c} \frac{\Delta\lambda}{\Delta C}. \quad (13)$$

Aus der Beziehung (3a) zwischen Resonanzwiderstand und Dämpfung erhält man mit (13)

$$R_p = \frac{1}{\omega C d} = \frac{1}{\pi c d} \frac{\Delta\lambda}{\Delta C} [\text{Ohm}]. \quad (14)$$

Misst man also die Dämpfung d und die durch eine kleine Kapazitätsänderung ΔC hervorgerufene Änderung der Resonanzwellenlänge $\Delta\lambda$, so kann R_p nach (14) berechnet werden.

Diese Methode lässt sich nun auf Hohlräume übertragen. Der Änderung ΔC im quasistationären Kreis entspricht hier eine durch äussere

Einwirkung hervorgerufene Änderung ΔW_e des elektrischen Energieinhaltes $W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \epsilon_0 \mathfrak{E}^2 dV$ im HR. Dies kann geschehen durch eine kleine Änderung ΔV des Hohlraumvolumens V , z. B. durch eine kleine Veränderung der metallischen Berandung an Stellen, wo das magnetische Feld gleich Null bzw. vernachlässigbar klein ist; oder durch eine Änderung der Dielektrizitätskonstante (DK) $\epsilon \epsilon_0$, d. h. Änderung der elektrischen Polarisierung P im Bereich eines kleinen Volumens ΔV im Hohlraum. Die hierdurch bewirkte Änderung der Resonanzfrequenz $\Delta \omega$ lässt sich nach einem von J. MÜLLER⁴⁾ angegebenen Satz berechnen zu

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = - \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \overline{A}}{\overline{W}}, \quad (15)$$

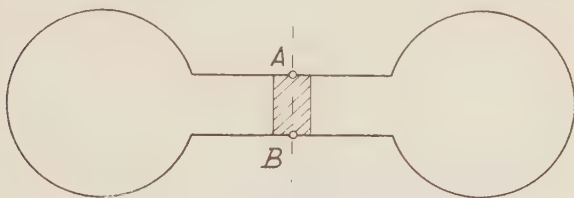


Fig. 5.

Hohlraumresonator von der Art der Fig. 2. In der Umgebung der Symmetrieachse AB wird das elektrische Feld \mathfrak{E} als homogen und quasistatisch (rot $\mathfrak{E} = 0$), das magnetische Feld \mathfrak{H} als rotationssymmetrisch um die Achse A, B ($\mathfrak{H} = 0$) angesehen.

wobei $\overline{\Delta A}$ die bei der Änderung der elektrischen bzw. magnetischen Feldenergie langsam im Vergleich zur Periodendauer geleistete Arbeit und \overline{W} den totalen elektromagnetischen Energieinhalt des HR bedeuten. Wir geben zwei Anwendungen für Fälle, die von praktischem Interesse sind:

a) In einem beliebig gestalteten Hohlraum existiere ein Gebiet mit praktisch homogenem elektrischen Feld. Als Beispiel diene ein HR nach Fig. 5 mit der Symmetrieachse AB . Zwischen A und B liege ein kleiner zylindrischer Bereich mit AB als Achse, in dem das elektrische Feld als homogen und parallel der Achse angesehen werden kann. Die elektrische Feldstärke sei gegeben durch $E_0 \sin \omega t$ über die Länge $l = AB$. Führen wir ein dielektrisches Stäbchen ($\mu = 1$) mit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon \epsilon_0$, dem Querschnitt f und der Länge l parallel der Achse zwischen den Punkten A und B ein, so lässt sich die hierdurch hervorgerufene Änderung der Resonanzwellenlänge $\Delta \lambda$ nach (15) berechnen. Denken wir uns in dem kleinen Volumen $\Delta V = f \cdot l$ des Stäbchens die relative DK ϵ lang-

sam vom Wert 1 bis zum Wert ε wachsend, so folgt für die Zunahme der elektrischen Energie des abgeschlossenen Hohlraums im Zeitmittel (Periodendauer T):

$$\overline{\Delta W_e} - \overline{\Delta A} = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) f l E_0^2 \sin^2 \omega t \, dt - \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) f l E_0^2.$$

Der elektromagnetische Energieinhalt des HR steht daher nach (15) mit der relativen Verstimmung $\Delta \lambda / \lambda$ durch das dielektrische Stäbchen in der Beziehung

$$\overline{W} = - \frac{\lambda \overline{\Delta A}}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) f l E_0^2}{4 \Delta \lambda}. \quad (16)$$

Setzen wir diesen Wert in (3) ein, so erhalten wir

$$d \cdot R_p = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\omega \overline{W}} = \frac{E_0^2 l^2}{2 \omega \overline{W}}$$

und

$$R_p = \frac{1}{\pi c \varepsilon_0} \frac{l}{(\varepsilon - 1) f} \frac{\Delta \lambda}{d} = 120 \frac{l}{(\varepsilon - 1) f} \frac{\Delta \lambda}{d} [\text{Ohm}]. \quad (17)$$

Zur gleichen Beziehung gelangt man mit (14), wenn man sich das Verhalten des HR in der Umgebung der Resonanzstelle durch ein Ersatzbild nach Fig. 1 darstellt und die Kapazitätsänderung mit

$$\Delta C = \Delta \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 f}{l} \right) = \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 f}{l}$$

in (14) einführt. Hiermit wird auch ersichtlich, warum wir diese Methode kurz als ΔC -Methode bezeichnen wollen.

Man hat demnach bei dieser Methode eine Dämpfungsmessung am ungestörten Hohlraum vorzunehmen und die Verstimmung $\Delta \lambda$ der Resonanzwellenlänge durch ein zwischen den Stellen A und B parallel der Achse AB eingebrachtes dünnes dielektrisches Stäbchen (Länge l , Querschnitt f , DK $\varepsilon \varepsilon_0$) zu messen. Aus (17) folgt sodann der Wert des auf die Punkte A, B bezogenen Resonanzwiderstandes R_p des Hohlraums*).

b) Es liege ein beliebig gestalteter Hohlraum vor, dessen Feldverteilung im einzelnen nicht bekannt zu sein braucht. Durch eine Öffnung sei der HR mit einer Koppelleitung verbunden, die als konzentrische kreiszylindrische Leitung ausgeführt ist. (Fig. 6.) Der HR werde, wie dies meist geschieht, über eine solche Leitung

*) Über diese Methode zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes nach (17) von Hohlräumen, die längs einer Achse ein konstantes elektrisches Feld aufweisen, s. a.: W. DAHLKE, Messungen an Hohlraumresonatoren, Bericht über die Arbeitskreistagung Röhren (Breslau 1944) S. 259—265.

erregt; auf der Leitung bestehe ein Schwingungszustand, der gewöhnlich als „Lechertyp“ (TEM-Typ) bezeichnet wird. Das elektrische Feld mit der radialen Komponente E_r und das magnetische Feld mit der azimuthalen Komponente H_φ liegen in Ebenen senkrecht zur Leitungsachse. Sie sind gegeben durch

$$|E_r| = E_1 \frac{\sin kz}{r}; \quad |H_\varphi| = \frac{E_1}{120\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\cos kz}{r}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (18)$$

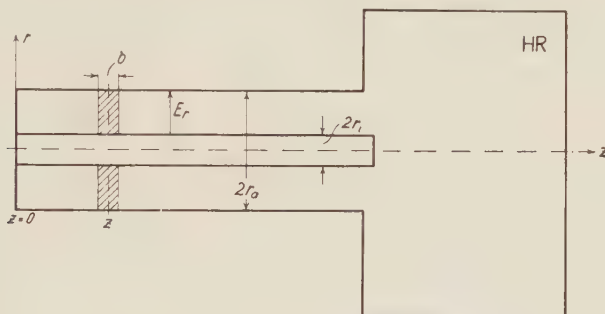


Fig. 6.

Beliebig gestalteter Hohlraum HR mit angeschlossener konzentrischer Leitung, die bei $z = 0$ kurzgeschlossen ist. Die Einkopplung der Erregung durch eine kleine Öffnung im System ist nicht eingezeichnet.

Wegen $H_z \equiv 0$ existiert auf der Leitung an jeder Stelle z eine eindeutige „Spannung“ $U = \int_{r_i}^{r_o} E_r dr$ zwischen Innen- und Außenleiter in Ebenen senkrecht zur Leitungsachse, auf die der Resonanzwiderstand bezogen werden kann. An der Stelle $z = 0$ sei die Leitung kurzgeschlossen. Bringt man ein dielektrisches Scheibchen von der Breite b und der DK $\varepsilon\varepsilon_0$ (Fig. 6) an einer Stelle z in die Leitung, welche vom HR so weit entfernt ist, dass sich dort praktisch ein Zustand nach (18) ausgebildet hat, so gilt mit (15) und (18)

$$\begin{aligned} \overline{W} &= -\frac{\lambda \overline{\Delta A}}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \cdot \frac{1}{4} \int_{\Delta V} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_r^2 dV \\ &= \frac{\lambda \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_1^2}{4 \Delta \lambda} \int_{r_i}^{r_o} \int_0^{2\pi} \int_{z-b/2}^{z+b/2} \frac{\sin^2 kz}{r^2} r dr d\varphi dz \end{aligned}$$

oder

$$\overline{W} = \frac{\pi E_1^2}{4} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \ln \frac{r_o}{r_i} \cdot \left(b - \frac{\sin kb \cos 2kz}{k} \right) \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

Mit (3) erhält man für R_p unter Einführung von $U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{r_i}^{r_o} E_r dr$ für

den Resonanzwiderstand $R_p(z)$ der ganzen Anordnung nach Fig. 6 bezogen auf den Abstand z vom kurzgeschlossenen Leitungsende

$$R_p(z) = \frac{1}{\pi^2 \epsilon \epsilon_0 (\epsilon - 1)} \frac{\ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \sin^2 k z}{b - \frac{\sin k b \cos 2 k z}{k}} \frac{\Delta \lambda}{d} [\text{Ohm}]. \quad (19)$$

Für *dünne* Scheibchen ($b \ll \lambda$) und eine Bezugsstelle z , die nicht allzuweit vom Spannungsbauch ($z = \lambda/4$) entfernt liegt, kann bei Gültigkeit von

$$\frac{\pi^2 b^2}{3 \lambda^2} \ll 1$$

in (19) nach Potenzen von b entwickelt werden; dann folgt aus (19) die vereinfachte Näherung:

$$R_p(z) = \frac{60}{\pi} \frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{b (\epsilon - 1)} \frac{\Delta \lambda}{d} [\text{Ohm}]. \quad (19a)$$

Wie sich von selbst versteht, gelten die Beziehungen (19) auch für den Resonanzwiderstand einer beiderseits abgeschlossenen konzentrischen Lecherleitung, deren Länge ein ganzes Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt.

Die Beziehung von (19a) zu Gleichung (14) lässt sich leicht aufzeigen. Setzt man in (14) $\Delta C = \Delta Q/U$ und versteht unter ΔQ die kleine Änderung der Oberflächenladung auf der konzentrischen Leitung durch das Einbringen eines dielektrischen Scheibchens von der Breite b an der Stelle $z = \lambda/4$, so folgt $\Delta Q = 2 \pi E_1 \epsilon_0 (\epsilon - 1) b$; mit $U = E_1 \cdot \ln r_a/r_i$ ergibt sich

$$\Delta C = \left(\frac{\Delta Q}{U} \right)_{z=\lambda/4} = \frac{2 \pi \epsilon_0 (\epsilon - 1) b}{\ln r_a/r_i}$$

und hiermit aus (14) unmittelbar die Gleichung (19a).

Bei Anwendung dieser Methode hat man also ebenfalls eine Dämpfungsmessung des ungestörten Systems vorzunehmen sowie die Messung der Verstimmung $\Delta \lambda$ durch ein kreiszylindrisches dielektrisches Scheibchen (Aussen- bzw. Innenradius r_a und r_i , Breite b , DK $\epsilon \epsilon_0$), das im Abstand z vom kurzgeschlossenen Ende der Leitung angebracht ist. Mit (19) bzw. der Näherungsformel (19a) bei dünnen Scheibchen und einer Stelle z in der Nähe des Spannungsbauches erhält man den bei z zwischen Innen- und Außenleiter der Leitung wirksamen Resonanzwiderstand $R_p(z)$.

B. Methode der induktiven Verstimmung (ΔL -Methode).

Verändert man in dem quasistationären Kreis nach Fig. 1 bei konstantem C den Wert der Selbstinduktion L um ΔL , so folgt analog den Betrachtungen unter A. die Beziehung

$$\omega L = \pi c \frac{\Delta L}{\Delta \lambda}. \quad (20)$$

Unter Einführung des „Wellenwiderstands“ $Z = \sqrt{L/C}$ schreiben wir (3a) in der Form

$$d \cdot R_p = \omega L = \frac{\omega L}{\omega^2 L C} = \frac{Z^2}{\omega L}.$$

Mit dem obigen Wert für ΔL erhalten wir daraus

$$R_p = \frac{Z^2}{\pi c d} \frac{\Delta \lambda}{\Delta L}. \quad (21)$$

Im Prinzip könnte man bei Hohlräumen in Analogie zu den unter A. angeführten Beispielen der dielektrischen Verstimmung von einer Verstimmung des HR durch Einbringen magnetischer Probekörper ($\mu \neq 1$) mit geringer Leitfähigkeit Gebrauch machen. Solche Materialien waren jedoch noch nicht erhältlich. Es wurde deshalb eine andere Art der induktiven Verstimmung betrachtet, nämlich durch Änderung der Berandung des HR an Stellen, wo praktisch nur ein magnetisches Feld vorhanden ist. Wird das Hohlraumvolumen V an einer solchen Stelle um den kleinen Betrag ΔV verringert, so beträgt die im Zeitmittel (langsam gegenüber der Periodendauer) geleistete Arbeit gegen die magnetischen Feldkräfte an der Berandung

$$\overline{\Delta A} = \frac{\mu_0}{4} \int_{\Delta V} \mathfrak{H}^2 dV$$

und damit nach (15) die Verstimmung

$$-\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\mu_0}{4 \overline{W}} \int_V \mathfrak{H}^2 dV. \quad (22)$$

Als Beispiel betrachten wir wiederum eine Anordnung nach Fig. 6. Verschiebt man das kurzgeschlossene Ende der im Lechertyp (TEM-Typ) erregten konzentrischen Leitung um ein kleines Stück Δl (Fig. 7), so ergibt sich aus (22) unter Benutzung des Ausdrucks für das magnetische Feld $\mathfrak{H} = H_\varphi$ nach (18)

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{\mu_0 \lambda}{4 |\Delta \lambda|} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Delta l} \frac{E_1^2}{(120 \pi)^2} \frac{\cos^2 k z}{r^2} r dr d\varphi dz \\ \overline{W} &= \frac{\pi \mu_0 \lambda}{2 |\Delta \lambda|} \frac{E_1^2}{(120 \pi)^2} \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \Delta l. \end{aligned} \quad (23)$$

Unter Einführung der Spannung $U = \int_{r_i}^{r_a} E_r dr$ mit Verwendung von (18) erhält man schliesslich mit (3) für den auf eine Stelle z der Leitung bezogenen Resonanzwiderstand

$$R_p(z) = \frac{60}{\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \sin^2 kz \cdot \frac{\Delta \lambda}{d \cdot \Delta l} [\text{Ohm}]. \quad (24)$$

Ist die konzentrische Leitung beiderseits kurzgeschlossen ($l = \lambda/2$), so ist theoretisch $\Delta \lambda / \Delta l = 2$; setzt man dies in (24) ein, so folgt die theoretische Beziehung (11).

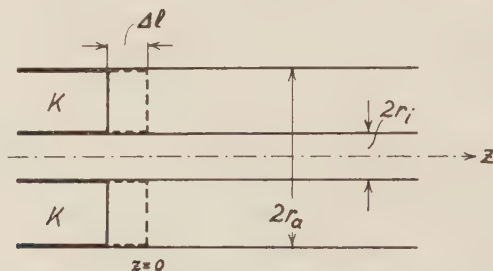


Fig. 7.

Verschiebung des Kurzschlusses K (Abschlusskolben) am Leitungsende $z = 0$ (siehe Fig. 6) um das kleine Stück Δl .

Auch hier kann man wieder (24) in Beziehung zur entsprechenden quasistationären Betrachtung bringen. Berechnet man in (21) ΔL aus $\Delta L = \Delta \Psi / J$, wobei $\Delta \Psi$ die kleine Änderung des Induktionsflusses $\int B_n df$ durch Verschieben des Kurzschlusses bei $z = 0$ um Δl und J den Strom an der Kurzschlussstelle bedeutet, so ergibt sich mit (18)

$$\Delta L = \frac{\mu_0 \Delta l}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}.$$

Setzt man in (21) diesen Wert und für den Wellenwiderstand Z der konzentrischen Leitung den hier sinngemässen Ausdruck $Z = 60 \cdot \ln r_a / r_i \cdot \sin kz$ ein, so erhält man Gleichung (24).

In Anwendung dieser Methode hat man die Dämpfung d der ungestörten Anordnung sowie der Verstimmung $\Delta \lambda$ zu messen, wenn das kurzgeschlossene Leitungsende um das kleine Stück Δl verschoben wird. Gleichung (24) liefert dann den Wert des auf einen Abstand z vom kurzgeschlossenen Ende bezogenen Resonanzwiderstandes $R_p(z)$.

Den unter A. und B. betrachteten Methoden der dielektrischen und induktiven Verstimmung liegt, von einem allgemeinen Standpunkt aus besehen, die Beziehung (3) zugrunde, wobei der mittlere

Energieinhalt \overline{W} des Hohlraums durch (15) einer Messung zugänglich gemacht wird. Mit (3) und (15) kann die allgemeine Beziehung zur Messung von R_p in der Form

$$R_p = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\omega \overline{W}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{2\pi c} \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| \quad (25)$$

angeschrieben werden. $\Delta\lambda$ bedeutet die Verstimmung der Resonanzwellenlänge, wenn an dem abgeschlossenen Hohlraum durch äussere Einwirkung im Zeitmittel, und zwar langsam gegenüber den periodischen zeitlichen Änderungen des Feldes die (kleine) Arbeit ΔA gegen die Feldkräfte geleistet wird. Die im folgenden unter C. angeführte Methode beruht auf einer anderen Überlegung; dort wird nicht der elektromagnetische Energieinhalt, sondern die im Hohlraum verbrauchte ohm'sche Verlustleistung verändert.

C. Methode der zusätzlichen Dämpfung (ΔR_p -Methode).

Über diese Methode wurde als erste bereits kurz berichtet⁵⁾. Als Beispiel zu dieser Methode betrachten wir einen Hohlraum nach Fig. 2 oder 10, der über einen kleinen Bereich ein homogenes elektrisches Feld aufweist. Bringt man zwischen die Bezugspunkte A, B parallel zum Feld ein dünnes Stäbchen geringer Leitfähigkeit (Querschnitt

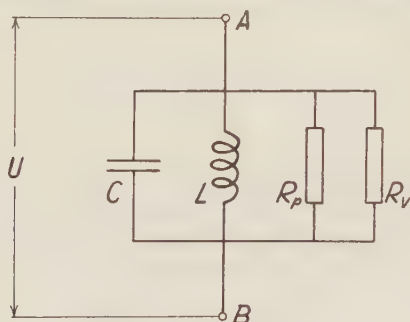


Fig. 8.

Parallelschaltung eines ohmschen Verlustwiderstandes R_v zum Resonanzwiderstand R_p im Ersatzbild des Parallelresonanzkreises.

f , Länge l , Leitfähigkeit σ , DK $\epsilon\epsilon_0$), so entspricht dies beim quasi-stationären Ersatzbild (Fig. 8) einer Parallelschaltung eines ohmschen Verlustwiderstandes R_v bzw. eines Leitwertes $G_v = 1/R_v$ zum Leitwert $G_p = 1/R_p$ des Kreises. Der Leitwert G_v steht mit dem „Verlustfaktor“ $\epsilon\epsilon_0 \tan \delta$ des Stäbchenmaterials im Zusammenhang⁶⁾:

$$G_v = \sigma \frac{f}{l} = \omega \epsilon \epsilon_0 \frac{f}{l} \tan \delta [\text{Ohm}]^{-1}. \quad (26)$$

Die Dämpfung nimmt den Wert konst. $\cdot (G_p + G_v)$ an. Bringt man ein zweites Stäbchen mit einem andern Leitwert an Stelle des ersten ein und bestimmt nacheinander die zugehörigen Dämpfungen d_1 und d_2 , so folgt

$$\begin{aligned} d_1 &= \text{konst.} \cdot (G_p + G_{v_1}) \\ d_2 &= \text{konst.} \cdot (G_p + G_{v_2}). \end{aligned}$$

Mit

$$K = \frac{d_2}{d_1} \quad (27)$$

folgt

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{K-1}{G_{v_2} - K \cdot G_{v_1}}. \quad (28)$$

Da die eingebrachten Stäbchen notwendigerweise ein von 1 verschiedenes ε haben, wählt man den Querschnitt f so, dass jeweils durch die verschiedenen Stäbchen dieselbe Verstimmung hervorgerufen wird ($(\varepsilon - 1) f = \text{konstant}$). Man erhält so den Resonanzwiderstand R_p für den um $\Delta\lambda$ verstimmten Hohlraum. Da im allgemeinen $\Delta\lambda/\lambda$ sehr klein (unter 1%) gehalten werden kann, ist dieser Umstand praktisch ohne Bedeutung.

Auch bei einer im Lechertyp (TEM-Typ) erregten konzentrischen Leitung ist diese Methode anwendbar. Man benutzt dünne Scheibchen aus Materialien mit verschiedener Leitfähigkeit (verschiedenem Verlustfaktor $\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{tg} \delta$). Der Paralleleitwert G_v ist hier gegeben durch

$$G_v = \frac{2\pi b}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \omega \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{tg} \delta [\text{Ohm}]^{-1}, \quad (29)$$

wenn b die Breite der Scheibchen, r_a und r_i Aussen- und Innendurchmesser der konzentrischen Leitung bzw. der Scheibchen und $\varepsilon\varepsilon_0$ deren DK bedeuten. Der Verlustfaktor selbst kann in Anordnungen der gleichen Art gemessen werden⁶⁾.

II. Experimentelle Bestimmung des Resonanzwiderstandes.

1. *Messanordnung.* Experimentelle Untersuchungen wurden bei einer Wellenlänge von 14 cm (2100 Mc) vorgenommen mit dem Ziel, die Brauchbarkeit der unter I. angeführten Methoden zu prüfen und dieselben unter sich zu vergleichen*). Als Generator G

*) Die Messungen wurden bereits vor längerer Zeit am Physikalischen Institut der Universität Graz (Abt. für Technische Physik) von Herrn Dr. ADOLF JESCHKE, dzt. Gmünd (Kärnten), ausgeführt, dem ich für seine Mitarbeit an dieser Untersuchung zu besonderem Dank verpflichtet bin. Ebenso habe ich Herrn Privatdozent Dr. ERNST LEDINEGG (Graz) für seine Mitwirkung zu danken.

(Fig. 9) diene eine Bremsfeldröhre hoher Frequenzkonstanz (10^{-6}) mit einer mittleren Wellenlänge von 14 cm, die sich über einen Bereich von etwa 6 mm variieren liess⁷⁾. Die Verbindung zu den Hohlräumen, die untersucht werden sollten, stellten flexible konzentrische Kabel L her unter Zwischenschaltung von geeigneten Transformationsvierpolen T , welche die richtige Anpassung zwischen Generator und Hohlraum sowie zwischen Hohlraum und Indikator besorgten. Als Indikatoren J wurden Spezialdetektoren (Germanium und künstlich hergestelltes Siliciumkarbid) verwendet, deren quadratisches Arbeiten durch separate Untersuchungen sichergestellt war.

Bei der Bestimmung von R_p kommt es wesentlich darauf an, die Eigendämpfung d des zu untersuchenden Hohlraumes richtig zu

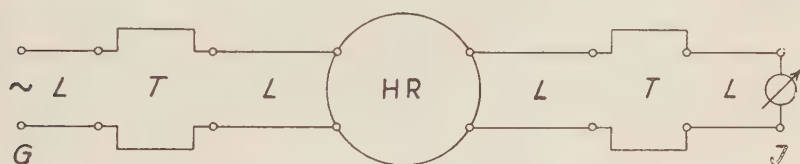


Fig. 9.

Schema der Messanordnung zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes eines Hohlraumresonators HR . G = Generator, L = konzentrische Verbindungsleitungen, T = Transformationsvierpole, J = Indikator.

messen; es muss daher Sorge getragen werden, dass durch die generator- und indikatorseitigen Ankopplungen keine *merkliche* Fremddämpfung eingekoppelt wird. Durch lose Kopplung und richtige Einstellung der Transformationsvierpole lässt sich dies erreichen. Die Resonanzkurve kann dann einwandfrei durch die Abhängigkeit des Indikatorstroms von der Frequenz gemessen werden. Ein wertvolles Kriterium dafür, dass unerwünschte Kopplungserscheinungen ausgeschaltet sind, bietet der Vergleich der punktwise aufgenommenen Resonanzkurve mit deren theoretischem Verlauf¹⁾ bei der zugehörigen Halbwertsbreite.

2. Mit der beschriebenen Messanordnung wurde die Bestimmung von R_p für verschiedene Arten von Hohlraumresonatoren und nach verschiedenen Methoden durchgeführt. Im folgenden werden die Ergebnisse angeführt, wobei jeweils auch auf die Berechnung der Resonanzwellenlänge kurz eingegangen wird.

A. Kreiszyklindrischer Hohlraum mit ebenen Abschlussflächen. (Aus Messing gedrückt, innen versilbert.)

Erregung: Grundschiwingung des elektrischen Typs (TM_{001}).

$\lambda = 14$ cm, $R = 5,35$ cm, $l = 10$ cm (Fig. 10).

Resonanzwellenlänge und theoretische Dämpfung folgen aus (4) und (6). Es ergaben sich:

	theoretisch	mittlerer Messwert
Dämpfung d	$4,04 \cdot 10^{-5}$	$5,3 \cdot 10^{-5}$
Resonanzwiderstand R_p . .	$8,55 \cdot 10^6$	$6,6 \cdot 10^6 \text{ Ohm}$

Der theoretische Wert von R_p folgt aus (7); er bezieht sich auf die Punkte A, B in Fig. 10.

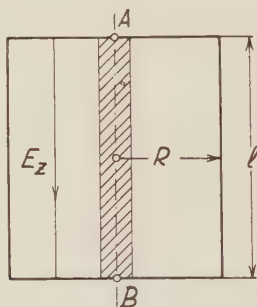


Fig. 10.

Kreiszylindrischer Hohlraumresonator bei Erregung in der elektrischen Grundschwingung (TM_{001}). Zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes wird als Probekörper ein zylindrischer dielektrischer dünner Stab längs der Achse A, B eingebracht.

a) ΔC -Methode. Das elektrische Feld der elektrischen Grundschwingung²⁾ besitzt nur eine Komponente E_z in Richtung der Achse und ist unabhängig von z . Als Probekörper dienten kreiszylindrische Stäbchen von 10 cm Länge aus verschiedenen dielektrischen Materialien, die zwischen A und B eingebracht wurden. Die Genauigkeit, mit der R_p bestimmbar ist, ist im wesentlichen durch die Genauigkeit für $\varepsilon - 1$ und d gegeben. $\varepsilon - 1$ wurde in der gleichen Anordnung nach einem an anderer Stelle angegebenen Verfahren⁶⁾ gemessen; die Genauigkeit betrug etwa 3%. Die relative Halbwertsbreite und damit die Dämpfung d konnten auf etwa 10% genau gemessen werden. Eine Genauigkeit auf 10% kann bei Messungen dieser Art als genügend angesehen werden; um unnötige Schwierigkeiten zu vermeiden, wurde davon abgesehen, die Genauigkeit höher zu treiben, als praktisch notwendig erscheint. Die Genauigkeit für die Dämpfung steigt mit wachsendem d . Bei Zu-

grundelegen des *mittleren* Dämpfungswertes ergab sich mit (17):

Dielektrikum	Durchmesser in mm	ε	$R_p \cdot 10^{-6}$ Ohm
Quarz	5,98	3,85	6,7
Quarz	4,06	3,85	6,6
Bernstein	3,41	2,6	6,8
Trolitul	4,97	2,45	6,6
Calit	2,00	6,3	6,6
Ardostan	4,00	5,5	6,8

b) *R_p-Methode*. Die elektrischen und magnetischen Feldgrößen im Hohlraum sind ein Mass für die Stärke der Erregung. Bei quadratisch arbeitendem Indikator sind die Ausschläge des Anzeigeinstrumentes (Galvanometer) daher proportional dem Quadrat der Resonanzamplituden des Hohlraumfeldes. Bei konstanter Primärerregung ist die Resonanzamplitude der Dämpfung d des HR umgekehrt proportional¹⁾. Das Verhältnis $K = d_2/d_1$ nach (27) kann daher auch durch die zugehörigen Indikatorausschläge α ausgedrückt werden:

$$K = \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}. \quad (30)$$

An Hand des Ersatzbildes (Fig. 1) lässt sich leicht zeigen, dass auch bei zusätzlich eingekoppelter Fremddämpfung die Beziehung (30) verwendet werden kann, wobei dann d_1 und d_2 die um die (kleine) Fremddämpfung erhöhten Werte von d bedeuten. Wichtig ist, bei der Messung die Primärerregung konstant zu halten; dies geschah durch Beobachtung der Hochfrequenzspannung an einer kleinen Sonde, welche in ein festes konzentrisches Leitungsstück zwischen Generator und Hohlraum hineinragte.

Die Genauigkeit dieser Methode hängt davon ab, wie genau die Leitfähigkeit bzw. der Verlustfaktor der Proben bekannt ist; ferner von den Beträgen von G_{v_1}/G_{v_2} , K und dem Fehler von K in (28). Eine einfache Fehlerbetrachtung zeigt, dass ein Messfehler δK sich um so stärker auswirkt, je näher K an Eins liegt.

Für verschiedene Kombinationen von Proben ergab sich nach dieser Methode folgendes:

Kombination	$R_p \cdot 10^{-6}$ Ohm
Calit-Ardostan	6,7
Calit-Quarz	6,7
Ardostan-Quarz	6,6
Trolitul-Bernstein . . .	7,2

B. *Konzentrische Leitung*, beiderseits kurzgeschlossen mit veränderlicher Eigenfrequenz (verschiebbarem Abschlusskolben), erregt in der Grundschiwingung des Lechertyps (TEM-Typ).

$\lambda = 2l$. $\lambda = 14$ cm, $r_a = 1,9$ cm, $r_i = 0,5$ cm. Versilbert, $\sigma = 60 \cdot 10^4$ (Ohm cm) $^{-1}$ (Fig. 11).

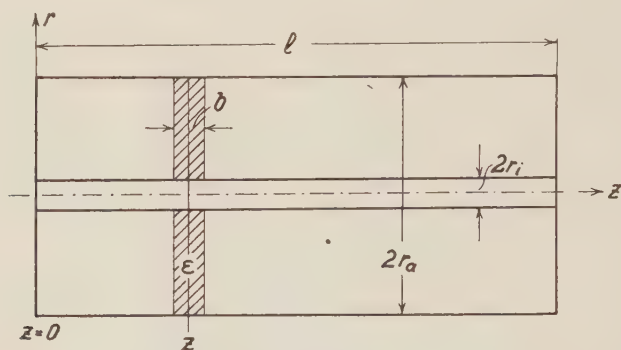


Fig. 11.

Zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes einer beiderseits kurzgeschlossenen konzentrischen Leitung, die im Lechertyp (TEM-Typ) erregt ist, wird als Probekörper ein dünnes dielektrisches Scheibchen an einer Stelle z der Leitung eingebracht.

Die Resonanzwellenlänge der Grundschiwingung ist $\lambda = 2l$; Dämpfung und Resonanzwiderstand folgen theoretisch aus (9) und (10). Es ergaben sich:

	theoretisch	mittlerer Messwert
Dämpfung d	$17,3 \cdot 10^{-5}$	$26,2 \cdot 10^{-5}$
Resonanzwiderstand R_p ($z = \lambda/4$)	$2,95 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^5$ Ohm

Der Unterschied zwischen den theoretischen und experimentellen Werten hatte seine Ursache in den zusätzlichen Verlusten an den Schleifkontakten des gefederten Abschlusskolbens, wie Vergleichsmessungen mit einer allseits verlöteten Leitung gleicher Abmessungen zeigten.

Als dielektrische Probekörper dienten dünne Scheibchen, die auf die Leitung aufgeschoben wurden (Fig. 11). Die Resonanzwellenlänge λ einer konzentrischen Leitung nach Fig. 11, in der sich an der Stelle z eine dielektrische Scheibe der Breite b und der DK $\epsilon\epsilon_0$ befindet, ergibt sich aus folgender Gleichung für den „Eigenwert“ $k = 2\pi/\lambda$:

$$\operatorname{tg} k b \sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} k z + \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} k (l - b - z) (1 - \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} k b \sqrt{\epsilon} \cdot \operatorname{tg} k z) = 0. \quad (31)$$

Die Herleitung von (31) folgt z. B. unter Verwendung der Feldverteilung nach (18) und der Stetigkeitsbedingungen für E_r und H_φ an den beiden Grenzflächen der Scheibe. Aus (31) kann man in 1. Näherung die Verstimmung $\Delta\lambda$ der ungestörten Leitung durch eine Scheibe mit der (kleinen) Polarisation $\varepsilon - 1$ gewinnen mit

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = - \frac{2\pi}{k^2} \frac{dk}{d\varepsilon} (\varepsilon - 1).$$

Berechnet man aus (31) den Ausdruck für $dk/d\varepsilon$, so ergibt sich

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\varepsilon - 1}{2l} \left(b - \frac{\sin kb \cos 2kz}{k} \right). \quad (32)$$

Für dünne Scheibchen kann man noch in (32) nach Potenzen von b entwickeln und höhere Potenzen vernachlässigen. (Die Beziehung (31) lässt sich zur experimentellen Bestimmung der DK von Materialien verwenden, aus denen dünne, konzentrisch durchbohrte Kreisscheibchen hergestellt werden können.) Die experimentelle Nachprüfung der Verstimmung $\Delta\lambda$ durch Proben mit bekanntem $\varepsilon - 1$ ergab vorzügliche Übereinstimmung mit (31) bzw. (32).

a) *AC-Methode.* $R_p(z)$ wurde für verschiedene Stellen z , d. h. verschiedenen Lagen der Scheibchen in der Leitung bestimmt. ($z = 3,5/2,1/1,4$ cm und „am Rand“, d. h. $z = b/2$), wobei sich die theoretische Abhängigkeit gemäss $\sin^2 kz$ bestätigte.

Als Beispiel seien zwei Ergebnisse für $z = l/2 = 3,5$ cm angegeben:

Dielektrikum	Dicke in mm	ε	$R_p \cdot 10^{-5}$ Ohm
Trolitul	4,00	2,45	1,90
Bernstein	3,92	2,6	1,81

Die Messgenauigkeit lässt sich wieder mit etwa 10% angeben. Bei Messungen für kleine Werte von z , d. h. am Rande der Leitung, nahm die Genauigkeit etwas ab, da bei kleinen Verstimmungen die Messung von $\Delta\lambda$ etwas ungenauer wurde.

b) *ΔL -Methode.* Da $\lambda = 2l$ ist, gilt theoretisch $\Delta\lambda/2\Delta l = 1$. Das kurzgeschlossene Leitungsende wurde jeweils um den konstanten Wert $\Delta l = 0,05$ cm verschoben. Es ergab sich folgendes Bild:

Leitungslänge in cm	6,95	7,00	7,05	7,10	7,15	7,20
$\frac{\Delta\lambda}{2\Delta l}$	0,96	1,00	0,99	0,99	1,02	1,01
Resonanzwiderstand $R_p(b/2) \cdot 10^{-3}$ Ohm . .	1,43	1,48	1,47	1,48	1,52	1,51

Zur gemessenen Dämpfung von $d = 26,2 \cdot 10^{-5}$ gehört mit (11) der *theoretische* Wert $R_p(b/2) = 1,49 \cdot 10^3$ Ohm. Die R_p -Werte in obiger Tabelle wurden aus (24) mit $z = b/2$ berechnet, wobei die *gemessenen* Werte für $\Delta\lambda/2\Delta l$ eingesetzt wurden.

Kontrollmessungen nach der ΔC -Methode mit Verstimmung der Leitung durch eine Trolitulscheibe am Rande ($z = b/2$) lieferten den gleichen Wert für $R_p(b/2)$. Die Gültigkeit von (24) wurde auch für andere Stellen z mit solchen Kontrollmessungen bestätigt.

c) *R_p -Methode.* Diese Methode wurde für eine Kombination Trolitul-Bernstein an verschiedenen Stellen z durchgeführt. Bei zweckmässiger Wahl der Kombination kann der Fehler ebenfalls auf etwa 10% beschränkt werden.

C. *Konzentrische Leitung*, wie unter B., jedoch in der *zweiten Oberschwingung* des Lechertyps erregt: $l = 3\lambda/2$. Für die Verstimmung gilt hier mit (32)

$$\Delta\lambda = \frac{\varepsilon - 1}{3} \left(b - \frac{\sin kb \cos 2kz}{k} \right). \quad (33)$$

Im Mittel ergaben sich folgende Werte:

	theoretisch	mittlerer Messwert
Dämpfung d	$1,54 \cdot 10^{-4}$	$2,36 \cdot 10^{-4}$
Resonanzwiderstand		
$R_p(z = l/2)$	$10,6 \cdot 10^4$	$6,9 \cdot 10^4$ Ohm

Auch hier ersieht man wieder an dem Unterschied zwischen theoretischen und experimentellen Werten den Einfluss des federnd berührenden Abschlusskolbens auf die Verluste.

D. *Konzentrische Leitung mit kapazitivem Abschluss* (Fig. 12).

($r_i = 0,75$ cm, $r_a = 3,5$ cm, $h = 2,7$ cm, $a = 0,5$ cm).

Die theoretische Dämpfung kann nach Näherungsformeln⁸⁾ berechnet werden; sie ergab sich zu $d = 12 \cdot 10^{-5}$. Der gemessene Wert betrug $d = 25 \cdot 10^{-5}$. Der Resonanzwiderstand wird auf die Stellen A, B bezogen.

Die Eigenwellenlänge dieses Resonators lässt sich streng nicht in geschlossener Form angeben. Ein sehr nützliches Verfahren zur *Abschätzung* der Resonanzwellenlängen von Hohlräumen, die einer strengen Berechnung nicht oder nur mit sehr grossem Rechenaufwand zugänglich sind, wurde von GRIVET⁹⁾ in diesem Zu-

sammenhang verwendet. Wegen seiner allgemeinen Brauchbarkeit werde seine Herleitung hier nochmals kurz skizziert:

Die aus den Maxwell'schen Gleichungen beispielsweise für den elektrischen Feldvektor \mathfrak{E} folgende Wellengleichung $\nabla^2 \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0$ kann als die zum Variationsprinzip $\int_V |\text{rot } \mathfrak{E}|^2 dV = \text{stationär}$ mit

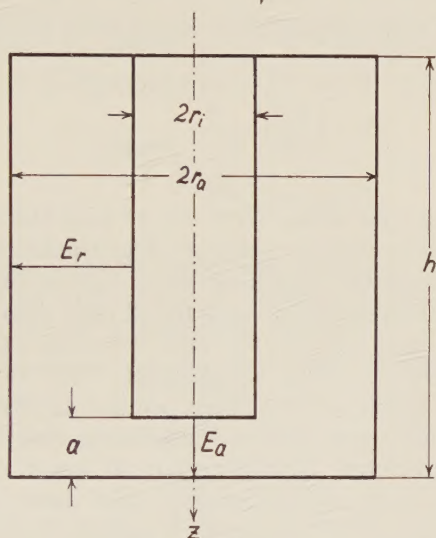


Fig. 12.

Konzentrische Leitung mit kapazitivem Abschluss als Hohlraumresonator. E_r (ungestörte) radiale elektrische Feldstärke bei Erregung im Lechertyp (TEM-Typ),
 E_a = Feldstärke im kapazitiven Abschluss längs der z -Achse.

der Nebenbedingung $\int_V \mathfrak{E}^2 dV = \text{const.}$ gehörige Euler'sche Differentialgleichung angesehen werden¹⁰⁾. Spezialisiert auf die Grundschwingung und mit Einführung des Lagrange-Faktors wird das Variationsproblem zum Minimumproblem

$$\int_V |\text{rot } \mathfrak{E}|^2 dV - k^2 \int_V \mathfrak{E}^2 dV = \text{Minimum},$$

ohne Nebenbedingung. Für das spezielle Problem allseitig von vollkommenen Leitern umschlossener Hohlräume ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen bei periodischen Vorgängen (Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$)

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -i\omega\mu\mu_0 \mathfrak{H}$$

und die Beziehung

$$|\text{rot } \mathfrak{E}|^2 = (\omega\mu\mu_0)^2 \mathfrak{H}^2.$$

Zufolge der Gleichheit von elektrischem und magnetischem Energieinhalt im Zeitmittel $\int_V \mu \mu_0 \mathfrak{H}^2 dV = \int_V \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 dV^{11}$), erhält man

$$\int_V |\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 dV = \int_V \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2 \mathfrak{E}^2 dV$$

und somit für den Eigenwert $k^2 = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$:

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{\int_V |\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 dV}{\int_V \mathfrak{E}^2 dV}. \quad (34)$$

Nach dem Obigen wird dieser Wert von k^2 zum Minimum, wenn für \mathfrak{E} die zur Grundschiwingung gehörige Eigenfunktion, die auch der Nebenbedingung genügt, eingesetzt wird. Um zu einem Näherungswert für k zu gelangen, setzt man für \mathfrak{E} eine dem Problem angepasste Feldverteilung an, von der man erwarten kann, dass sie der tatsächlichen Feldverteilung nahekommt. Man kann eine Anzahl solcher Vergleichsfunktionen wählen, welche die Randbedingungen erfüllen. Bildet man aus solchen Funktionen eine Linearkombination mit unbestimmten Koeffizienten, so kann man versuchen, diese Koeffizienten so zu bestimmen, dass man k^2 nach (34) zu einem Minimum macht. Geeignete Vergleichsfunktionen sind im allgemeinen nicht leicht anzugeben. Man kann jedoch auch schon mit *einer* Vergleichsfunktion in manchen Fällen eine brauchbare Näherung erreichen. Der hiermit nach (34) errechnete Wert $\bar{k}^2 \geq k^2$ liegt dem richtigen Eigenwert ersichtlich umso näher, je genauer die Vergleichsfunktion die tatsächliche Feldverteilung annähert.

Für das in Fig. 12 vorliegende Beispiel wurde die Vergleichsfunktion für \mathfrak{E} folgendermassen gewählt:

$$E_r = \frac{E_1}{r} \sin \frac{\pi z}{2h}; \quad E_\varphi = E_z = 0; \quad E_a = \text{const.}$$

mit der Forderung

$$a E_a = E_1 \ln \frac{r_a}{r_i}.$$

In (34) liefert hier nur die azimutale Komponente $\operatorname{rot}_\varphi \mathfrak{E}$ einen Beitrag. Die Auswertung mit der gewählten Vergleichsfunktion liefert nach kurzer Rechnung mit $\bar{k} = 2\pi/\bar{\lambda}$ den Näherungswert $\bar{\lambda}$:

$$\lambda \geq \bar{\lambda} = 4h \sqrt{1 + \frac{r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i}}{a h}}. \quad (35)$$

Diese Näherungsformel ergab in einem Wertebereich von a/h und r_a/r_i , in dem eine brauchbare Näherung erwartet werden kann, eine recht zufriedenstellende Annäherung für die Resonanzwellenlänge. Sie deckt sich übrigens weitgehend mit Näherungsformeln, die auf ganz andere Weise gewonnen wurden⁸⁾.

Die Verstimmung $\Delta\lambda$ durch ein dünnes kreiszylindrisches dielektrisches Stäbchen (Querschnitt f , DK $\varepsilon\varepsilon_0$) zwischen A und B (Fig.12) erhält man unter Zugrundelegung der nämlichen angenäherten Feldverteilung in Anwendung von (15) nach kurzer Rechnung zu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{(\varepsilon-1)f}{2\pi \left(r_a^2 + \frac{ah}{\ln r_a/r_i} \right)} . \quad (36)$$

Zur Verstimmung wurden kreisrunde Stäbchen aus Quarz, Calit, Trolitul, Bernstein und Ardostan verwendet. Die folgende Tabelle zeigt, wie weit (36) die Verhältnisse annähert:

Dielektrikum	Durchmesser in mm	ε	$\Delta\lambda_{\text{theor.}}$ in mm	$\Delta\lambda_{\text{gemessen}}$
Quarz	2,00	3,85	1,06	0,92
Quarz	4,85	3,85	2,67	2,23
Calit	1,83	6,3	1,43	1,25
Trolitul	4,84	2,45	2,81	2,6
Bernstein	2,77	2,6	1,00	0,89
Ardostan	2,00	5,5	3,05	2,6

a) *AC-Methode.* Unter Anwendung von (17) ergab sich:

Dielektrikum	Durchmesser in mm	ε	$R_p \cdot 10^{-5}$ Ohm
Quarz	2,12	3,85	3,88
Quarz	4,85	3,85	3,92
Calit	2,00	6,3	3,9
Trolitul	4,84	2,45	4,15
Bernstein	2,77	2,6	3,9
Ardostan	2,00	5,5	3,84

b) R_p -Methode. Mit drei verschiedenen Kombinationen ergab sich mit (28):

Kombination	$R_p \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$
Bernstein-Quarz	4,0
Ardostan-Quarz	3,7
Calit-Ardostan	3,8

Der Wert von K betrug bei diesen Messungen überall etwa 1,5.

Zusammenfassend lässt sich beim Überblick über die an den verschiedenen Resonanzkreisen durchgeführten Messungen die praktische Brauchbarkeit der angegebenen Methoden feststellen, deren Ergebnisse untereinander ungefähr gleichwertig sind. In einem konkreten Fall wird sich daher die Auswahl der geeigneten Methode darnach richten, welche Methode sich jeweils am einfachsten durchführen lässt.

Die Genauigkeit der Bestimmung des Resonanzwiderstands bei Verwendung der hier beschriebenen Messanordnung kann im Durchschnitt mit 10% angegeben werden, was für die meisten praktischen Fälle genügt. Der experimentelle Aufwand ist dabei nicht weiter getrieben worden, als den normalen Bedürfnissen entspricht. An sich lässt sich die Genauigkeit zweifellos noch erhöhen, wobei, wie gewöhnlich in solchen Fällen, die erreichbare Genauigkeit erheblich langsamer ansteigt als die Anforderungen an den experimentellen Aufwand.

Literaturangaben.

- ¹⁾ F. BORGNIS, Z. f. Phys. **122**, 407 (1944).
- ²⁾ F. BORGNIS, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **54**, 121 (1939).
- ³⁾ F. BORGNIS, Elektrotechn. Zeitschr. **61**, 461 (1940).
- ⁴⁾ J. MÜLLER, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **54**, 157 (1939).
- ⁵⁾ F. BORGNIS, Naturwiss. **31**, 20 (1943).
- ⁶⁾ F. BORGNIS, Physik. Zeitschr. **43**, 284 (1942).
- ⁷⁾ W. DÄLLENBACH, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **61**, 161 (1943).
- ⁸⁾ W. DÄLLENBACH, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **61**, 129 (1943).
- ⁹⁾ P. GRIVET, I, II, Not. aux Comptes rendues de l'Académie des sciences, November 1943.
- ¹⁰⁾ COURANT-HILBERT, Methoden der mathem. Physik I, Berlin 1924.
- ¹¹⁾ F. BORGNIS, Ann. d. Phys. V. **35**, 359 (1939).